

Vesa Petäys

FEA-SOVELLUKSIA OMATARVEOHJELMOINTINA

Kone- ja tuotantotekniikan koulutusohjelma

2018

FEA-sovelluksia omatarveohjelmointina

Petäys, Vesa
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Kone- ja tuotantotekniikan koulutusohjelma
Toukokuu 2018
Ohjaaja: Pulkkinen, Petteri
Sivumäärä: 22
Liitteitä: 1

Asiasanat: Elementtimenetelmä, FEM, FEA, Finite Element Method

Tässä työssä pyritään kehittämään elementtimenetelmän sovelluksia itse ohjelmoiden oman toiminimen puitteissa. Ideana on samalla oppia yksityiskohtaisesti miten tekniikka toimii ja miten elementtimenetelmä toimii.

Toimintaympäristö on oltava sellainen että se on käytettävissä myös koulun ja työn ulkopuolella. Alan valmisohjelmien varaan ei välttämättä voi rakentaa mitään koska työpaikkaa ei ole. Alustavasti ohjelmointiympäristö on asiakaspuolen JavaScript, HTML-lomakkeet lähtötietojen valintaan ja HTML5 Canvas-elementti grafiikan esitystä varten.

Ympäristö on kieltämättä vaatimaton, mutta etuna on että ohjelmat toimivat tavallisessa selaimessa vaikkapa muistitikulta. Ei tarvita tietokantaa, palvelinta, Internet-yhteyttä, selaimen lisäosia. Ohjelman kehittäminen ei vaadi erikoisvälineitä normaalin tietokoneen lisäksi. Lähdekoodi on avointa. Ohjelmat voi yksinkertaisina HTML-sivuina sijoittaa nettiin ilman erikoisjärjestelyjä.

Lämmön johtumisen analyysiin on yritetty perehtyä elementtimenetelmän sovelluksena, mutta siitä tulokset ovat toistaiseksi vähäisiä. Oman hyödyllisen ohjelman kehitys lämmön siirtymisen analysointiin vaatisi huomattavasti enemmän panostusta.

Parhaiten työ on edistynyt lujuusopin alaan kuuluvassa kattotuolien analyysissä. Siinäkin on kuitenkin vielä tekemistä ennen kuin saavutetaan käytännön rakenteita. Työ jää varsinaisesti kesken opinnäytetyön kannalta, mutta aion kylläkin jatkaa tästä opinnäytetyön ulkopuolella.

Programming FEA-applications for personal use

Petäys, Vesa

Satakunnan ammattikorkeakoulu, Satakunta University of Applied Sciences

Degree Programme in Mechanical Engineering

May 2018

Supervisor: Pulkkinen, Petteri

Number of pages: 22

Appendices: 1

Keywords: FEM, FEA, mechanics of materials

The purpose of this thesis was to start to learn technology for real by building own programs.

Finite Element Method (FEM) has been a most interesting subject with many applications. My purpose as a (unemployed) professional programmer is to learn to implement some of the applications of FEA (Finite Element Analysis) myself for my own firm.

I didn't get very far during this thesis, but I intend to continue the important work. Hydrodynamics would have been a very interesting field, but it is probably beyond my possibilities for now. I have studied a book about FEM in heat transfer analysis, but there is still a long way to go for me before some really practical implementations of those ideas.

Mainly I have been working with simple wooden structures which support roofs. FEA for these structures should be particularly simple. The work is still not completed, however.

SISÄLLYS

1	JOHDANTO.....	5
2	KATTOTUOLIEEN LUJUUSOMINAISUUDET.....	6
2.1	Lujuusopin elementtimenetelmän lähteitä.....	6
2.2	Katon lumikuormasta.....	8
2.3	Elementtimenetelmän sovellus kattotuolien analysointiin.....	9
2.4	Äärimmäisen yksinkertainen kattotuolirakenne	10
2.5	Arvio projektin saavutuksista ja kehitystarpeista	12
3	LÄMMÖN JOHTUMISESTA	13
3.1	Lämmön johtumisen perusteita.....	13
3.2	Likimääräinen Galerkin-ratkaisu 2-ulotteiselle elementille.....	14
3.3	Lähteen esimerkki 2.5	16
3.4	Lämmön johtumisen FEA-käsittelyn saavutukset	19
4	YHTEENVETO	20
	LÄHTEET.....	22
	LIITE	

1 JOHDANTO

Tämä opinnäytetyö sisältää omaehtoista paremman insinööriosaamisen opiskelua ja kehittelyä elementtimenetelmän puitteissa. Tavoite on aiheen syvällisempi ymmärtäminen. Teen tämän koulun päättötyön omalle toiminimelleni koska muut yritykset eivät vaikuta työpanoksestani kiinnostuneilta.

Luulenpa että juuri tämän tyyppistä opinnäytetyötä olisi vaikeaa tehdä muille yrityksille, koska tässä toiminnot halutaan toteuttaa itse ja asia yksityiskohtaisesti ymmärtäen. Ei siis pyritä valmiin kaupallisen softan käyttöön, kuten työelämässä on tapana, vaan nimenomaan työskennellään kohti omaehtoista implementaatiota ja omakoh- taista aiheen kunnollista oppimista.

Tavoitteena on vielä joskus kyetä omin toteutuksin yltämään myös fluidien liikkeen elementtimenetelmällä, mutta toistaiseksi tyydyn kehärakenteiden lujuusopin sekä yksinkertaisen lämmön johtumisen käsittelyyn elementtimenetelmällä.

Elementtimenetelmästä käytetään lyhenteitä FEM eli Finite Element Method ja FEA eli Finite Element Analysis. Näistä viimeksi mainittu minusta kuvaa tätä työsarkaa paremmin, koska kyse on juurikin eräänlaisesta analyysistä. Elementtimenetelmällä ei syntetisoida uusia ratkaisuja, vaan analysoidaan muilla tavoin synnytettyjä malleja.

2 KATTOTUOLIEN LUJUUSOMINAISUUDET

Tasoristikoiden ja tasokehien eli sauva- ja ristikkorakenteiden analyysi elementtimenetelmällä on yksinkertaista ja lähtökohta elementtimenetelmän opettelulle, vaikka se ei varsinaisesti sisälläkään sellaista FEM-koneistoa jota käytetään esimerkiksi lämmön johtumisen analysoinnissa.

Kattotuoleja voi analysoida tasokehinä. Varsinaisesti ne tietenkin ovat 3-ulotteisia esineitä, mutta pääasialliset rasitukset ovat analysoitavissa kahdessa ulottuvuudessa. Kattoristikot on pidettävä pystyssä kolmannessa ulottuvuudessa muulla tavoin.

Kattotuolit ovat motivoiva aihe koska meidän ilmastossamme jokainen tarvitsee katon päänsä päälle. Mielestäni tekniikan miehen on hyvä ymmärtää kattotuolien periaatteet ja pystyä itse analysoimaan kattorakenteiden lujuusominaisuuksia.

2.1 Lujuusopin elementtimenetelmän lähteitä

Johdannon elementtimenetelmän (FEM) käyttöön lujuusopissa sain SAMK:in syyslukukaudella 2015 Karri Kiven luennoilla kurssilla ”Elementtimenetelmän perusteet” (Kivi 2015). Kurssilla käsiteltiin yksinkertaisia rakenteita joissa oli pieni määrä elementtejä ja korkeintaan 3 tai 4 vapausastetta. Laskettiin Excel-taulukkolaskennalla ja käänteismatriiseja käyttäen. Excel sisältää matriisioperaatioita, mm. käänteismatriisin. Elementtikuormat olivat aina kohtisuorassa elementtejä vasten.

Kattotuoleja varten tarvitaan lisäoppia. Niinpä tutustuin muihin kirjallisiin elementtimenetelmää käsitteleviin lähteisiin. Lujuusopista on kyse (Karhunen ym 1999)

Rakenteiden mekaniikka (Salmi & Kuula 2012) käsittelee rakenteita eri menetelmin ja esittelee myös elementtimenetelmää. Koin tämän lähteen hyödyntämisen kuitenkin vaikeaksi, koska siinä lähtökohtana ovat alan vanhemmat menetelmät, jotka ilmeisesti oletetaan jo hyvin tunnetuiksi elementtimenetelmää koskevassa kirjan loppuosassa.

Tarvitaan myös statiikan tietoja joita edustaa oppikirja (Salmi 2014). Kuormituksen täytyisi olla staattista. Elementtikuormien esittämisessä sovelletaan koulun statiikan palkkitehtävän oppeja palkin leikkausvoiman ja taivutusmomentin esityksessä.

Lujuusopin elementtimenetelmä (Hakala 1994) osoittautui erittäin hyödylliseksi lähteeksi. Siinä on listattu vanha FORTRAN-kielinen ohjelma ELMO (”ELeменти Me-
netelmän Ohjelma”) ja kirjan esimerkki 2.9.6 on teräksinen ristikkokannatin josta voi tarkistaa ohjelman tuloksia (Liite). Kuormat kohdistuvat suoraan solmuihin. Katto-
tuolit eivät ole rakenteeltaan aivan samanlaisia kuin ristikkokannatin, mutta samoja-
kin toimintoja voi käyttää.

Kirjan ristikkokannattimessa on 16 todellista vapausastetta. Kirja sisältää tehokkaan matriisimenetelmän suuren yhtälöryhmän ratkaisemiseksi. Se perustuu Gaussin eli-
minointiin matriisikertolaskuin. Tarvitaan vain symmetrisen nauhamatriisin yläpuoli. Niinpä ei tarvitse ratkaista 16×16 matriisin käänteismatriisia. Rakenteen jäykkyyss-
matriisi on symmetrinen nauhamainen matriisi, jonka ratkaisussa käänteismatriisin käyttö (ammattikorkeakoulun tavanomaiseen tyyliin) olisi tarpeettoman tuhlailevaa.

On helppo itse ohjelmoida rekursiivinen käänteismatriisia käyttävä ratkaisu matrii-
siyhtälön, kuten $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisuksi tyyliin $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$, jossa A on tunnettu jäyk-
kyysmatriisi, A^{-1} on sen turhan raskaasti laskettava käänteismatriisi, \mathbf{b} on tunnettu
solmuvoimavektori ja \mathbf{x} on tuntematon solmuisiirtymävektori. Lineaarialgebra kui-
tenkin opettaa että käänteismatriisin käyttö ei ole edes toivottavaa ja ratkaisuun on
olemassa tehokkaampia stabiileja menetelmiä.

Lähtökohta on puumateriaalin käyttö, koska se on esim. omakotitalorakentamisessa
tavallista. Kone- ja tuotantotekniikassa rakenteet tietenkin ovat yleensä sitkeää ra-
kenneterästä tai vastaavaa. Niinpä olen tutustunut puun lujuusominaisuuksiin ja puun
käyttöön rakenteissa.

Puun rakenne ja ominaisuudet (Kärkkäinen 2007) kertoo puun lujuusominaisuuksis-
ta. Jalavan 1945 tutkimuksen mukaan ilmakehän suomalaisen männyn ja kuusen
taivutuslujuus on 85,7 ... 85,8 MPa ja puristuslujuus 45,2 ... 47,5 MPa, mutta vain

pienissä virheettömissä koekappaleissa. Käytännön rakennuspuutavaralta ei ehkä voi odottaa aivan samaa lujuutta.

Puun lujuusominaisuudet ovat hankalia käsitellä. Puu ei ole tasaista homogeenistä, isotrooppista materiaalia jonka ominaisuudet olisivat samoja kaikissa suunnissa.

Taivutetun puupalkin lujuudessa määräävä on puristuslujuus, koska se on pienempi kuin taivutuslujuus. Poikkileikkaukseltaan suorakulmaisen palkin taipuessa sen yksi sivu venyy ja samalla toinen puoli puristuu kokoon suunnilleen yhtä paljon. Valitettavasti on siis puupalkin taivutuksessa 45 MPa jo varsin suuri jännitys palkin kokoonpuristuvalla puolella. Tuon arvon ylittäminen voi johtaa rakennevaurioihin staattisessakin kuormituksessa. Rakenteissa ei tietenkään voida sallia kuormituksia jotka voivat johtaa pysyviin muodonmuutoksiin tai muihin vaurioihin.

Rakennuspuumateriaalin vetolujuus on tietääkseni melko hyvää luokkaa, noin 90 - 100 MPa. Niinpä puinen lankku toimii vetosauvana suhteellisen hyvin.

Puurakenteita tunnen melko heikosti mutta mm. Timber Designers' Manual (Ozelton & Baird, 2002) sisältää niistä tietoa. Minua järkyttänyt tieto on se että pienehkö epäsymmetrinen kuormitus saattaa olla joillekin rakenteille vaikea käsitellä, vaikka ne kestävät hyvin melko suurtaakin symmetristä kuormaa.

2.2 Katon lumikuormasta

Katon on kannettava mm. rakennuksen talvinen lumikuorma. Rakennusmääräykset sisältävät lumikuormaa koskevia virallisia sääntöjä jotka ovat riippuvaisia rakennuksen sijainnista ja rakennusvuodesta. Tässä ei yritetä korvata rakennusmääräyksiä.

Porin seudulla suurimman lumikuorman normiarvo on noin 140 kg/m². Muualla Suomessa suurin lumikuorma voi olla jopa noin 250 ... 300 kg/m². Poikkeusoloissa on ehkä enempikin mahdollista. Esimerkiksi 500 kg/m² olisi jo todella suuri lumikuorma, joten sen yli meneviä tuskin on tarvetta kokeillakaan.

On vaikea tietää paljonko lunta missäkin ja milloinkin sataa, mutta käytännössä on tietenkin noudatettava soveltuvia rakennusmääräyksiä. Tässä halutaan ensisijaisesti kokeilla millaisen kuormituksen lumikuorma voi kattotuolin rakenteille aiheuttaa.

2.3 Elementtimenetelmän sovellus kattotuolien analysointiin

Elementtimenetelmän oppikirjat eivät käsittele erityisesti kattotuoleja. Katon lumi-kuorman kannalta on oleellista että pystysuora lumikuorma on jaettava kattotuolin palkin suuntaiseen ja sitä vasten kohtisuoraan komponenttiin. Tasakattoja ei saa enää rakentaa, joten lumikuorma ei koskaan ole aivan kohtisuorassa katon palkkia vasten.

Kattotuolin palkeissa on oleellista että niiden täytyy ulottua talon seinien ulkopuolelle. Talossa täytyy nimittäin olla räystäät jotka johtavat sade- ja sulamisveden turvalisesti kantavien seinien ulkopuolelle. Niinpä kattotuolin ylin palkki eli yläpaarre ylettyy tukipisteiden ulkopuolelle kummallakin lappeella. Tämä tarkoittaa sitä että elementtimenetelmän mukaiseen ratkaisuun tulee väkisin suhteellisen paljon vapausasteita, mukaan lukien vapaiden räystäiden päiden kaikki vapausasteet.

Ideana kattotuolien analyysissä on alkaa mahdollisimman yksinkertaisesta rakenteesta ja koettaa edetä siitä kohti monimutkaisempia kehärakenteita. Rakenteen solmu-siirtymien ratkaisussa käytetään kirjan (Hakala 1994) FORTRAN-ohjelman tehokasta menettelytapaa soveltuvien osin. Elementtikuormia eli laskentasolmujen välissä sijaitsevia kuormituksia on kuitenkin voitava käsitellä sujuvasti. Tässä ei nimittäin muuta olekaan kuin elementtikuormia.

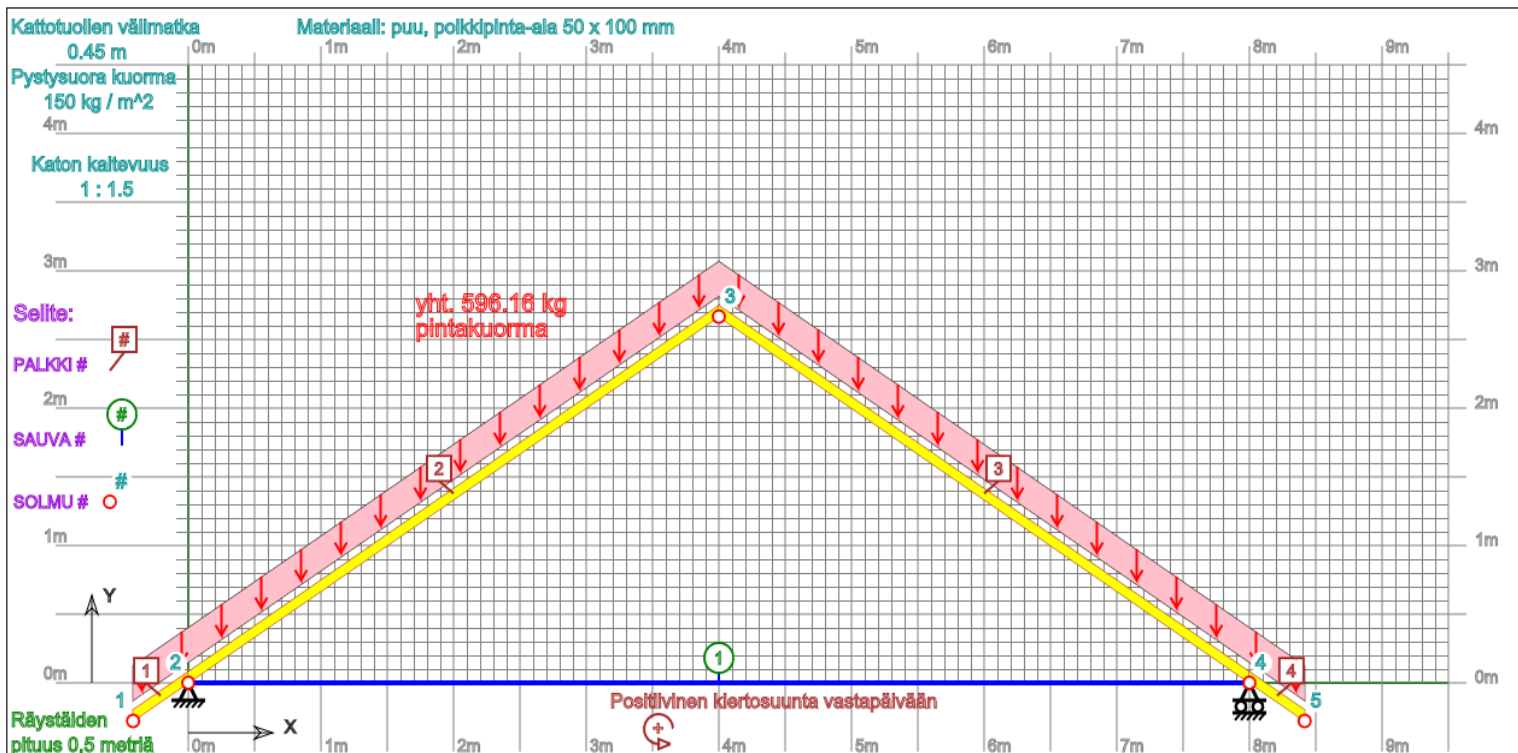
Ohjelmointiympäristönä toimii tavallinen selain, JavaScript, HTML-lomakkeet lähtötiedoille ja HTML5 Canvas-elementti grafiikalle. Nämä ovat käytettävissä myös työelämän ja koulun ulkopuolella, eivätkä vaadi erikoistyökaluja. Puutteena toki on JavaScript:in olematon virheidenkäsittely joka vaatii huolellisuutta. Ympäristö ei ole erikoisen tehokas, mutta uskon laskentatehon riittävän, vaikka http-protokolla ei erikoisemmin pidä sivun odottelemisesta. Tehtävä ei ole erikoisen raskas.

2.4 Äärimmäisen yksinkertainen kattotuolirakenne

Esimerkki ohjelman grafiikasta joka esittää laskennan lähtötiedot:

Yksinkertainen harjakaton kattoristikko elementtimenetelmällä

Ohje Materiaali: puu, 5cm*10cm Jänneväli: 8 m Kaltevuus: 1:1.5 Pintakuorma: 150 kg/m² Kattotuoliväli: 450 mm Pistekuorma: puuttuu toistaiseksi OK



Kuva 1; Kattotuolin laskennan lähtötiedot HTML5 Canvas-grafiikan avulla esitettynä

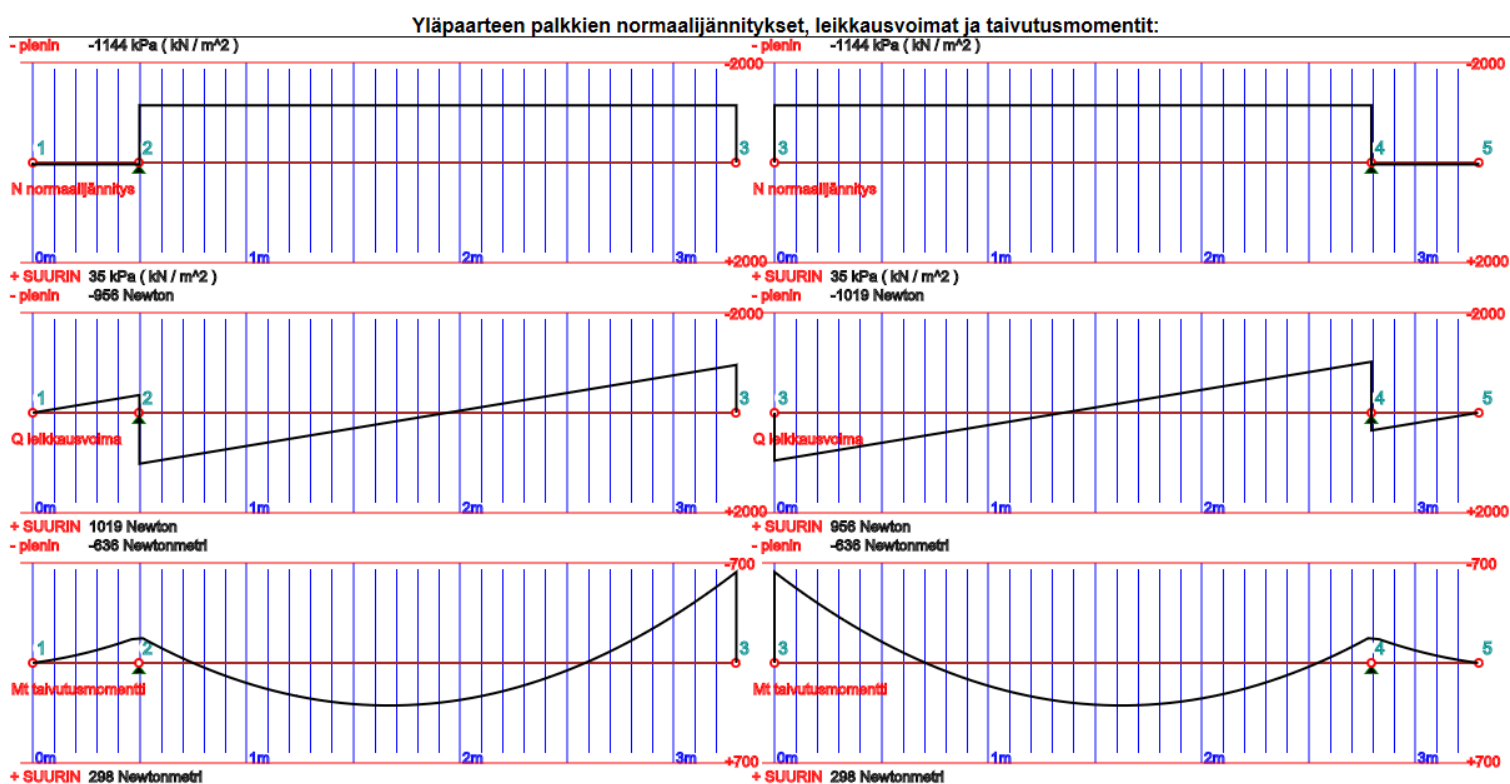
Tässä on laskennallisesti neljään osaan jaettu yläpaarre eli 4 palkkia, vetosauva alapaarteena, 5 laskentanosmua ja solmuissa 12 todellista vapausastetta.

Jänneväli 8 metriä on aika iso tälle äärimmäisen yksinkertaiselle rakenteelle kun palkit ovat poikkileikkaukseltaan 2” x 4” eli 50 mm x 100 mm puulankkaa. Yläpaarteen vailla tukea oleva osa muodostuu melko pitkäksi.

Palkkien normaalijännitys-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttipiirrokset ovat kovin oleellisia palkkien rasitusten arvioinnissa. Ne ovat hankalampia toteuttaa kuin aluksi kuvittelin. Koulun statiikan palkkitehtävän perusopeilla ei tässä pärjää kovin hyvin.

Haluan ajatella että yläpaarteiden puolikkaat räystäään päästä katon harjalle lepäävät tässä kahden tuen varassa. Täten yläpaarteiden isostaattisten puolikkaiden tukireaktiot voisi ratkaista tasapainoehtojen avulla. Tapaus muuttuu hyperstaattiseksi jos yläpaarteiden puolikasta tuetaan kolmannella tuella.

Varsinainen laskennallinen murheenkryyni on se että kattotuolin yläpaarteiden puolikkaat nojaavat toisiaan vasten. Katon harjalla ei ole todellista kiinteää tukipistettä (vaikka halusin edellä ajatella että harja on yläpaarteiden toinen tukipiste). Katon harja joustaa kuormituksen mukaan kolmessa vapausasteessa.



Kuva 2; Kattotuolin yläpaarteiden palkkien normaalijännitykset, leikkausvoimat ja taivutusmomentit

Yllä on koitettu piirtää yläpaarteiden palkkien normaalijännitykset, leikkausvoimat ja taivutusmomentit kun katon jänneväli on 5 metriä, räystäät 50 cm, katon kaltevuus 1:2, kattotuolien välimatka 600 mm ja lumikuorma vaakatasolle 150 kg/m².

Näiden piirrosten käsittely ja esitys ei kuitenkaan ole vielä ohjelmassa hyvällä tasolla. Leikkausvoimapiirros ei mielestäni ole oikein realistinen koska se ei huomioi palkkien nojaamista toisiaan vasten katon harjalla.

Piirros esittää nimenomaan normaalijännityksen, eli normaalivoimat on laskettu palkin jännitykseksi jakamalla voima poikkipinta-alalla. Oikeassa se on sikäli että yläpaarteessa on tässä tapauksessa noin megapascalin suuruinen puristusjännitys tukien ja harjan välillä.

Taivutusmomenttipiirroksen olen pakottanut järkeväksi lievää väkivaltaa käyttäen. Mielestäni katon harjalla on tukimomentti joka aiheuttaa siellä negatiivisen taivutusmomentin. Niinpä yläpaarteet eivät taivu aivan niin paljon kuin ne taipuisivat ilman tukimomenttia. Luullakseni alle 1000 Nm taivutusmomentit yläpaarteessa ovat vielä riittävän pieniä kun materiaali on poikkileikkaukseltaan 50mm x 100 mm puulankku.

Yläpaarteen puolikkaiden päät nojaavat toisiaan vasten, joten palkkien päiden leikkausvoima ja normaalivoima ainakin osittain kytkeytyvät toisiinsa. Vasen palkki aiheuttaa pintakuormallaan oikeaan palkin päähän sen pituuden suuntaisen normaalivoiman ja pituutta vasten kohtisuoran leikkausvoiman, riippuen palkkien välisestä kulmasta. Oikea palkki vaikuttaa vastaavalla tavalla vasemman palkin päähän.

2.5 Arvio projektin saavutuksista ja kehitystarpeista

Käytännön kattotuolirakenteet ovat toki tätä monimutkaisempia. Monimutkaisemmilla rakenteilla saadaan taivutusmomentti yläpaarteessa pysymään kyllin pienenä. Käytännössä kattotuolin yläpaarretta tuetaan alapaarteen kautta useilla sauvoilla tai palkkeilla niin että ylimmän palkin tukematon osuus jää lyhyeksi. Yläpaarrehan joutuu kantamaan koko katon päällä olevan elementtikuorman. Käytännöllisemmissä kattotuolirakenteissa voisi olla ainakin 30 vapausastetta, mutta en usko sen olevan liikaa tälle projektille.

3 LÄMMÖN JOHTUMISESTA

Johtuminen on eräs tapa, jolla lämpö voi aineessa siirtyä paikasta toiseen. Lämmön johtuessa aine ei siirry pitkää matkaa, vaan kyse on aineen pienten osien värähdysliikkeestä joka välittyy osasesta toiseen.

Tästä aiheesta en ole koulussa saanut erikoisempaa opetusta, vaan tämä on hyvin pitkälti ”hyppy tuntemattomaan”. Elementtimenetelmän toteutuksessa tukeudun tässä vahvasti lähteeseen *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis* (Lewis, Morgan, Thomas & Seetharamu 1996)

Tavoite on oppia aiheesta askeleittain lisää seuraillen ym. kirjan teoriaa ja esimerkkejä. Ideana on sellainen että oma toteutus on oikean suuntainen jos se on kirjan esimerkkien kanssa yhteensopiva. Siltä pohjalta voi oppia ja kehitellä lisää.

3.1 Lämmön johtumisen perusteita

Perinteisen käsityksen mukaan lämmön johtumista kuvaa Fourier'in yhtälö:

$$q_x = -k A \frac{dT}{dx}$$

jossa lyhenteillä on seuraava merkitys:

q_x lämpövirta suuntaan x [$W = \frac{J}{s}$]

k lämmön johtuvuuden kerroin [$\frac{W}{m K}$]

A pinta-ala [m^2]

$\frac{dT}{dx}$ lämpötilan T gradientti suuntaan x [$\frac{K}{m}$]

Negatiivisen etumerkin merkitys on se että lämpö virtaa lämpötilaeroon nähden päinvastaiseen suuntaan, korkeammasta lämpötilasta matalampaan lämpötilaan.

Elementtimenetelmän mukainen lämmön johtumisen käsittely vaatii kuitenkin omat toimintatapansa, jotka poikkeavat perinteestä. Lähteessä Fourier'in lämmön johtumisen laki esitetään eri muodossa:

$$\mathbf{q} = -k (\text{grad } T) \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

jossa uusilla lyhenteillä on seuraava merkitys:

q	lämpövirta <i>pinta-alan yksikköä kohti</i> vektorin \mathbf{n} suunnassa $[\frac{W}{m^2}]$
\cdot	pistetulo kahden vektorin välillä (skalaaritulo)
\mathbf{n}	pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori
$\frac{\partial}{\partial n}$	derivointi vektorin \mathbf{n} suunnassa

Lämpötila muodostaa skalaarikentän. Sen muutoksen voimakkuutta kuvaava gradientti (grad T) on kuitenkin vektori joten pistetulo on kahden vektorin välillä.

Tässä yhteydessä pyritään aiheen kokonaisvaltaiseen käsittelyyn, joten lämmön johtumisen lisäksi on huomioitava muitakin tekijöitä. Niinpä periaatteellisena lähtökohdiana on seuraava yleinen lämmön johtumisen yhtälö:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } T) + Q$$

jossa uusilla lyhenteillä on seuraava merkitys

ρ	aineen tiheys $[\frac{kg}{m^3}]$
c	aineen ominaislämpökapasiteetti $[\frac{J}{kg K}]$
$\frac{\partial T}{\partial t}$	lämpötilan T aikaderivaatta $[\frac{K}{s}]$
div	divergenssi, eräänlainen integraali vektorille
Q	lämmön tuotanto alueen sisällä <i>tilavuusyksikköä kohti</i> $[\frac{W}{m^3}]$

Tässä $c \frac{\partial T}{\partial t}$ kuvaa lämmön määrän lisääntymistä tutkitussa tilavuudessa. Jos tilanne on stationaarinen, eli lämpö ei kokonaisuutena lisääny, niin sen voi merkitä nollassi. Stationaarisessa prosessissa lämpöä tosin siirtyy koko ajan, mutta lämpötilojen suhteen tilanne säilyy samana, ei muutosta lämpötiloissa ajan kuluessa.

Tässä aine oletetaan isotrooppiseksi niin että sen ominaisuudet ovat samat kaikissa suunnissa. Lämmönjohtumiskerroin k oletetaan vakioksi, lämpötilasta riippumattomaksi. Aine voidaan olettaa myös homogeeniseksi eli tasa-aineiseksi.

3.2 Likimääräinen Galerkin-ratkaisu 2-ulotteiselle elementille

Integroinnissa apuna voidaan käyttää muotofunktioita

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \quad N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \quad N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4$$

jossa arvot ξ ja η ovat välille $-1 \dots +1$ skaalatut tason koordinaatit

Ratkaisussa käytetään yritefunktioita \check{T} ja niiden painoarvoja. Elementtimenetelmän mukainen ratkaisu elementille e johdetaan vaatimuksesta

$$\int_e k \text{grad } \check{T} \cdot \text{grad } N_i \, dx \, dy = \int_e Q N_i \, dx \, dy - q_i$$

jossa integraalit elementin alueessa eli \int_e ovat kaksinkertaisia integraaleja

Lähtökohtaisesti ongelmaa luonnehtivat 4 yhtälöä ovat integraaleja kuten

$$\sum_{j=1}^4 \left[\int_e k \text{grad } N_j \cdot \text{grad } N_i \, dx \, dy \right] T_j = \int_e Q N_i \, dx \, dy - q_i$$

Lopulta ratkaisu voidaan kuitenkin esittää matriisimuodossa

$$\mathbf{K}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{M}_e \mathbf{Q}_e - \mathbf{q}_e$$

jossa vasemmalla on elementin jäykkymatriisi \mathbf{K} ja oikealla massamatriisi \mathbf{M} , dimensio 4×4 . Vektori \mathbf{T} sisältää lämpötilat neljässä pisteessä. Vektori \mathbf{Q} liittyy lämmöntuotantoon alueen sisällä ja vektori \mathbf{q} sisältää lämpövirratt alueen rajoilla.

Matriisien tyypilliset alkiot ovat

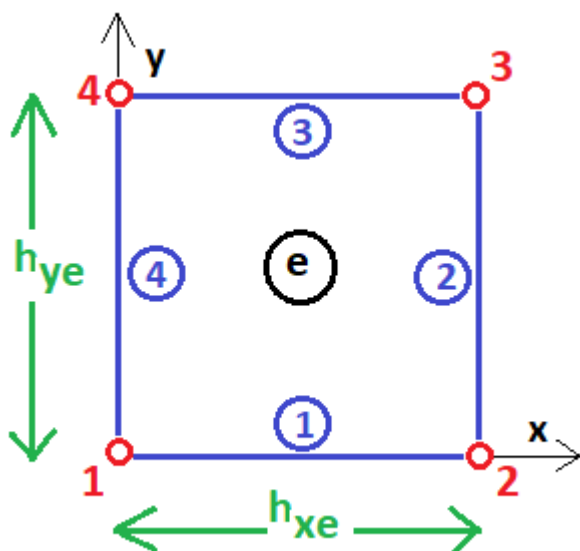
$$[\mathbf{K}_e]_{ij} = \frac{1}{h_{xe} h_{ye}} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \left(h_{ye}^2 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + h_{xe}^2 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta \right]$$

$$[\mathbf{M}_e]_{ij} = \frac{h_{xe} h_{ye}}{4} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_j N_i \, d\xi \, d\eta \right]$$

Muotofunktioiden avulla matriisien sisältöä voidaan analyttisesti integroida yksinkertaisemmaksi.

3.3 Lähteen esimerkki 2.5

Ensimmäisenä askeleena pyritään ymmärtämään ja ratkaisemaan lähteen esimerkki, jossa on yksi 2-ulotteinen suorakulmainen elementti, 4 solmua, 4 sivua, stationaarinen tapaus (lämpötilat eivät muutu ajan kuluessa), vakio lämmönjohtavuuskerroin k . Kuva havainnollistaa asetelmaa. Esimerkki on hyvin pelkistetty.



Kuva 3 ; 4-solmuinen suorakulmainen elementti

Käsitellään lämpötilan jakautumista neliömaisessa alueessa $0 \leq x, y \leq 1$, joten $h_{xe} = h_{ye} = 1$

Materiaalin lämmönjohtavuuskerroin on vakio $k = 2$

Uutta lämpöä syntyy alueen sisällä määrällä $Q = 4(x^2 + y^2)$ pinta-alayksikköä kohti

Reunaehdot:

- Sivut $x = 0$ ja $y = 0$ eli sivut numero 4 ja 1 ovat lämpötilassa $T = 10$
- Sivuilla $x = 1$ ja $y = 1$ eli sivuilla numero 2 ja 3 on lämpövirta $q = -4T + 40$

Reunaehtojen perusteella tunnemme siis lämpötilat solmuissa 1, 2 ja 4 eli nämä lämpötilat ovat sivujen 4 ja 1 mukaisia vakioita $T_1 = T_2 = T_4 = 10$. Sen sijaan lämpötila T_3 eli lämpötila pisteessä $(x=1, y=1)$ on tuntematon.

Kun tehtävänannosta tiedämme kaavan jonka mukaan lämpöä syntyy alueen sisällä: $Q = 4(x^2 + y^2)$, voimme laskea lämmön tuotannon solmuissa $Q_1 = 4(0+0) = 0$, $Q_2 = 4(1+0) = 4$, $Q_3 = 4(1+1) = 8$ ja $Q_4 = 4(0+1) = 4$

Galerkin-menetelmän mukainen likimääräinen ratkaisu voidaan pelkistää seuraavaan matriisiyhtälöön jonka matriisien sisältö on integroitu analyyttisesti:

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Tässä siis tunnetaan solmujen lämpötilan arvot $T_1 = T_2 = T_4 = 10$ sekä lämmöntuotannon arvot solmuissa $Q_1 = 0$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 8$, $Q_4 = 4$. Ensimmäisenä kiinnostaa tuntematon lämpötila T_3 .

Kolmannen solmun suhteen ylläolevasta matriisiyhtälöstä riittää käsitellä osaa joka koostuu matriisien kolmansista riveistä:

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} [1 \quad 2 \quad 4 \quad 2] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} - q_3$$

Tämän kertolaskut voidaan suorittaa ja saada yhtälö jossa yllämainitut tunnetut arvot on korvattu numeerisilla arvoillaan:

$$\frac{2}{3} (-10 - 10/2 + 2 * T_3 - 10/2) = \frac{1}{36} (1*0 + 2*4 + 4*8 + 2*4) - q_3$$

$$\frac{2}{3} (2 * T_3 - 20) = \frac{48}{36} - q_3$$

$$\frac{2}{3} (2 * T_3 - 20) = \frac{4}{3} - q_3$$

Tuntematon q_3 on hiukan ongelmallisempi. Onneksi lähde esittää elementin sivujen integraalien lopputuloksina seuraavat kaavat:

$$q_3 = \frac{1}{6} (\aleph_2 + 2 \aleph_3) + \frac{1}{6} (2 \aleph_3 + \aleph_4)$$

$$\aleph_2 = -4 T_2 + 40$$

$$\aleph_3 = -4 T_3 + 40$$

$$\aleph_4 = -4 T_4 + 40$$

Näiden perusteella

$$q_3 = \frac{1}{6} (-4 * T_2 + 40 + 2 * (-4 * T_3 + 40) + 2 * (-4 * T_3 + 40) - 4 * T_4 + 40)$$

$$q_3 = \frac{1}{6} (-40 + 40 + 4 * (-4 * T_3 + 40) - 40 + 40)$$

$$q_3 = \frac{1}{6} (-16 * T_3 + 160)$$

$$q_3 = -\frac{8}{3} T_3 + \frac{80}{3}$$

Sijoittamalla tämä T_3 :n suhteen ratkaistu q_3 ylläolevaan yhtälöön jää siihen vain yksi tuntematon joka voidaan ratkaista:

$$\frac{2}{3} (2 * T_3 - 20) = \frac{4}{3} - q_3$$

$$\frac{2}{3} (2 * T_3 - 20) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{8}{3} * T_3 + \frac{80}{3} \right)$$

$$\frac{2}{3} (2 * T_3 - 20) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} * T_3 - \frac{80}{3}$$

$$\frac{4}{3} * T_3 - \frac{8}{3} * T_3 = \frac{40}{3} + \frac{4}{3} - \frac{80}{3}$$

$$-\frac{4}{3} * T_3 = -\frac{36}{3}$$

$$T_3 = \frac{3 * 36}{4 * 3} = 9 \quad \text{joka tulos täsmää lähteen kanssa}$$

Tämän lisäksi halutaan ratkaista tuntemattomat lämpövirrat. Kun $T_3 = 9$ niin q_3 lie helppo laskea ylläolevasta kaavasta:

$$q_3 = -\frac{8}{3} T_3 + \frac{80}{3}$$

$$q_3 = -\frac{8 * 9}{3} + \frac{80}{3} = \frac{8}{3}$$

Muut lämpövirrat voisi koettaa ratkaista ylläolevasta matriisiyhtälöstä kun kaikki solmujen lämpötilat jo tunnetaan. Esimerkiksi sivun 2 lämpövirralle q_2 saadaan

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} [2 \quad 4 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} - q_2$$

$$\frac{2}{3} (-5 + 20 - 9/2 - 10) = \frac{1}{36} (2*0 + 4*4 + 2*8 + 1*4) - q_2$$

$$q_2 = \frac{36}{36} - \frac{2 * 0,5}{3} = \frac{2}{3}$$

Lämpövirtojen summa pitäisi ilmeisesti olla nolla koska kyseessä on stationaarinen tapaus? Niinpä muiden lämpövirtojen summan täytyisi ehkä olla $q_1 + q_4 = -\frac{10}{3}$?

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} - q_1$$

$$q_1 = 0$$

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} - q_4$$

$$q_4 = \frac{2}{3}$$

3.4 Lämmön johtumisen FEA-käsittelyn saavutukset

Aihe on mutkikas ja saavutukset ohjelmoinnissa ovat jääneet perin vaatimattomiksi. Ratkaisu analyyttisesti integroiden on mahdollista vain kaikkein yksinkertaisimmissa tapauksissa. Käytännössä integraalit olisi tehtävä numeerisesti. Sujuva ohjelma voisi kuitenkin edellyttää myös analyyttistä integrointia ohjelman sisällä.

4 YHTEENVETO

Kehittyneempi elementtimenetelmän mukainen ohjelmointi itse toteuttaen ei käytännössä ole aivan niin yksinkertaista kuin voisi kuvitella. Pidän sellaista kuitenkin jokseenkin ainoana mahdollisuutena todella oppia jotakin kunnolla ja yksityiskohtaisesti ymmärtäen.

Haluan ajatella olevani ammattitaitoinen ohjelmistosuunnittelija joka ei tyydy pelkkiin taloudellis-hallinnollisiin sovelluksiin ja tietokantoihin, vaan pystyy laajentumaan myös tieteellis-teknilliseen ohjelmointiin. Työelämässähän yleisesti käytetään kaupallisia valmisohjelmia, mutta minusta omatarveohjelmoinnille ja ohjelmointitaidoille on edelleen tarvetta, tulee aina olemaan.

Kattotuolin kaltaisen tasokehän analyysi sentään on suhteellisen yksinkertainen toteuttaa, koska lujuusopissa palkki voidaan kuvata yksinkertaisella tavalla ja sen käytös rasituksessa oletetaan lineaariseksi. Lujuusopinkin alueelta kuitenkin löytyy mutkikkaampia tapauksia. Esimerkiksi kolmiulotteisten kuorirakenteiden analyysi elementtimenetelmällä vaatisi jo huomattavasti enemmän. En kuitenkaan usko lujuusopin alalla pyrkiväni omalla ohjelmalla muuhun kuin erilaisten kattotuolien analysointiin.

Kattotuolien elementtien normaalivoimien, leikkausvoimien ja taivutusmomenttien käsittely ei tässä vielä ole aivan kunnossa. Ekvivalenttivoimista puhdistettujen elementtien lokaalien voimien ja momenttien käytössä on jokin ongelma joka pitäisi selvittää. Ensimmäinen kattotuolirakenne on vielä liian yksinkertainen käytännön ratkaisuihin verrattuna. Epäsymmetristen kuormitusten kokeileminen olisi tärkeää, mutta tässä kattorakenteen kuorma on vielä puhtaasti symmetrinen. Pienehkökin epäsymmetrinen kuormitus saattaa olla hankala joillekin rakenteille jotka kantavat hyvin melko isoakin symmetristä kuormaa.

Selaimen JavaScript on vaatimaton työkalu, mutta en usko että sen ominaisuuksia ihan helposti pystyy ulosmittamaan, järkevästi toimien. Niinpä uskon siihen vielä jatkossakin, raskaammissakin tehtävissä. Kiusallisinta JavaScriptissä on kunnollisten

virheilmoitusten puute. Tyhjää ruutua ei oikein voi nimittää virheilmoitukseksi ja sellaisen aiheuttava vika voi olla melkein missä tahansa. Niinpä JavaScriptiä ei oikein voi suositella yleisesti ohjelmointikieleksi isompiin projekteihin, käyttöominaisuuksien puutteellisuuden vuoksi, mutta se on tavallaan ilmainen ja pystyy enempään kuin mitä moni luulee.

Lämmön johtumisessa pääsin toistaiseksi vain aivan alkeisiin kiinni. Käyttökelpoinen ohjelma edellyttäisi useampien elementtien käyttöä ja elementtien muoto pitäisi olla joustavampi eikä pelkkä suorakaide, piirteitä joita tässä ei ole lainkaan mukana. Olisi myös perehdyttävä tärkeisiin tapauksiin joissa lämpötilat muuttuvat. Lämpöhän kyllä virtaa koko ajan, eli lämpövirtaa on, mutta isostaattisessa tapauksessa lämpötilat pysyvät vakioina. Aihe on kuitenkin kokonaisuutena tekniikassa hyvin tärkeä, joten toivon pystyväni vielä myöhemmin siinä etenemään.

Ehkä kaikkein kiinnostavinta olisi elementtimenetelmän soveltaminen hydrodynamiikkaan, mutta se vaikuttaa olevan minulle tässä vaiheessa liian vaativaa. Tosin elementtimenetelmän peruskoneisto on periaatteessa sama sitten kun pitemmälle pääsee, eli kun pystyy sujuvasti diskretisoimaan tutkittavan olion sopiviksi elementeiksi ja toteuttamaan kokonaisuuden analyysin elementtien kautta ko. erikoisalalle ominaisin toiminnoin. Hydrodynamiikan ala on kuitenkin mutkikas, joten siinä on vaikea päästä alkuun ja saavuttaa käytännössä merkittäviä tuloksia.

Työ jäi tavallaan kesken ja uskon että se tulee tosiasiasa aina olemaan kesken, vaikka kehitystä vähitellen tapahtuukin. Kattotuoleissa kuitenkin pääsin hyvään alkuun.

LÄHTEET

Hakala M, 1994, Lujuusopin elementtimenetelmä, Otatieto, 5.painos

Karhunen J., Lassila V. Pyy S., Ranta A., Räsänen S., Saikkonen M. & Suosara E., 1999, Lujuusoppi, Otatieto, 6.painos

Kivi K., 2015, Elementtimenetelmän perusteet. kurssin luentomateriaali SAMK:issa, kone- ja tuotantotekniikan koulutuksessa syyslukukaudella 2015

Kärkkäinen, M., 2007, Puun rakenne ja ominaisuudet, Metsäkustannus

Lewis R.W, Morgan K, Thomas H.R & Seetharamu K.N, 1996, The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis, John Wiley & sons, Chichester

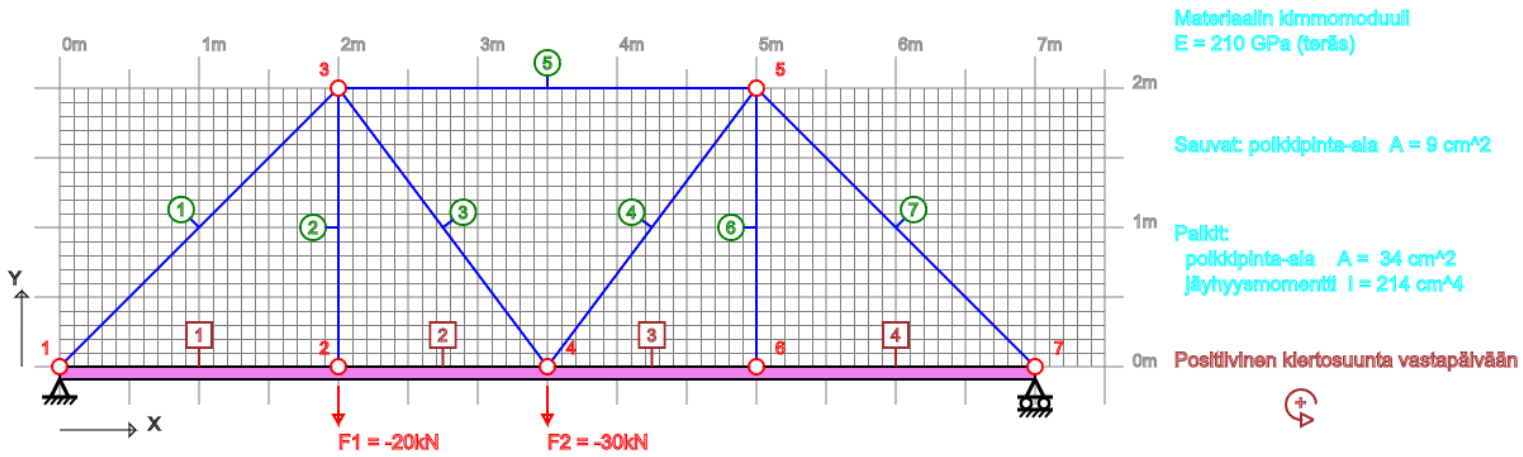
Ozelton E.C. & Baird J.A, 2002, Timber designers' manual, Blackwell Science, third edition

Salmi T & Kuula K, 2012, Rakenteiden mekaniikka, Pressus Oy; Tampere

Salmi T., 2014, Statiikka, Pressus Oy, 4.painos

Lujuusopin elementtimenetelmä (Hakala 1994) esimerkki 2.9.6 omalla ohjelmalla

Ristikkokannatin elementtimenetelmällä



SOLMUSIIRTYMÄT SOLMUITTAIN & VAPAAUSASTEITTAIN

SOLMU	1.vapausaste X-suunta (m)	2.vapausaste Y-suunta (m)	3.vapausaste rotaatio (rad)
1	0	0	-867.65E-6
2	79.366E-6	-0.001452824	-443.93E-6
3	403.14E-6	-0.001251182	0
4	138.89E-6	-0.001641141	193.45E-6
5	-157.05E-6	-0.001017343	0
6	182.4E-6	-0.001030761	514.28E-6
7	240.41E-6	0	515.93E-6

SAUVAELEMENTTIEN NORMAALIVOIMAT JA -JÄNNITYKSET

ELEMENTTI NRO	NORMAALIVOIMA (Newton)	NORMAALIJÄNNITYS (Pa = N/m ²)
1	-40069.79	-44.522E+6
2	19055.11	21.172E+6
3	11598.14	12.887E+6
4	24303.23	27.004E+6
5	-35292.5	-39.214E+6
6	1267.985	1.4089E+6
7	-29289.17	-32.544E+6

PALKKIELEMENTTIEN SOLMUVOIMAT JA -MOMENTIT

ELEMENTTI NRO	SOLMU NRO	NORMAALIVOIMA (Newton)	LEIKKAUSVOIMA (N)	TAIVUTUSMOMENTTI (Nm)
1	1	-28333.62	952.0922	909.49E-15
	2	28333.62	-952.0922	1904.184
2	2	-28333.62	7.204159	-1904.184
	4	28333.62	-7.204159	1914.991
3	4	-20710.57	-1271.703	-1914.991
	6	20710.57	1271.703	7.436098
4	6	-20710.57	-3.718049	-7.436098
	7	20710.57	3.718049	-909.49E-15