



Akseli Forsström

Statiikan soveltaminen esitystekniikan ripustuksissa

Metropolia Ammattikorkeakoulu

Medianomi (AMK)

Esitys- ja teatteritekniikan tutkinto-ohjelma

Opinnäytetyö

9.5.2023

Tiivistelmä

Tekijä(t):	Akseli Forsström
Otsikko:	Statiikan soveltaminen esitystekniikan ripustuksissa
Sivumäärä:	27 sivua
Aika:	9.5.2023
Tutkinto:	Medianomi (AMK)
Tutkinto-ohjelma:	Esitys- ja teatteritekniikka
Suuntautumisvaihtoehto:	
Ohjaaja(t):	Lehtori Timo Hiekkänen

Opinnäyte käsittelee statiikan perusteita ja niiden soveltamista esitystekniikan ripustuksissa. Statiikka, toiselta nimeltään tasapaino-oppi, on fysiikan osa-alue, joka tutkii tasapainossa olevia kappaleita. Tässä työssä keskitytään staattisesti määrättyihin rakenteisiin, joissa rakennetta voi analysoida ilman, että taipumista, venymistä tai muita muodonmuutoksia tarvitsee huomioida.

Esitysteknikolle statiikasta voi olla hyötyä esimerkiksi suunniteltaessa monimutkaisia rakenteita ja ripustuksia, joihin ei löydy valmiita laskelmia kirjallisuudesta. Toisaalta yksinkertaisissakin rakenteissa statiikan ja fysiikan ymmärrys voi auttaa näkemään ja ehkäisemään virheitä ja lisätä näin turvallisuutta. Statiikan ja yleisemminkin insinöörityöteiden opiskelu voi myös helpottaa työskentelyä ja kommunikointia insinöörien kanssa, joita usein tarvitaan avuksi monimutkaisia rakenteita suunniteltaessa.

Opinnäytteen aluksi käsitellään tarvittavia matematiikan ja statiikan käsitteitä. Tarvittavia matemaattisia työkaluja ovat yhtälöparin ratkaiseminen, koordinaatistot ja vektorit. Keskeisiä työssä tarvittavia statiikan käsitteitä ovat jäykkä kappale, tasapainoehdot, vaijerien ja ketjujen mallintaminen sekä useasta osasta koostuvien rakenteiden mallintaminen.

Opinnäytteessä sovelletaan statiikan menetelmiä muutamaan yleiseen esitystekniikan ripustukseen. Käsiteltäviä tilanteita ovat ripustus yhdestä pisteestä, kaksihaarainen bridle-ripustus ja suoran trussin ripustaminen kahdesta pisteestä. Tapauksia käsitellään yleisellä tasolla algebran avulla, sekä kuvitteellisten esimerkkien kautta konkreettisia lukuja käyttäen.

Avainsanat: Esitystekniikka, statiikka, ripustaminen

Tämän opinnäytetyön alkuperä on tarkastettu Turnitin Originality Check -ohjelmalla.

Abstract

Author(s): Akseli Forsström
Title: Application of statics in entertainment rigging
Number of Pages: 27 pages
Date: 9 May 2023

Degree: Bachelor of Culture and Arts
Degree Programme: Live Performance Engineering
Specialisation option:
Instructor(s): Timo Hiekkanen, Senior Lecturer

The thesis discusses the basic principles of statics and their application in entertainment rigging. Statics is a branch of physics concerned with physical systems that are in equilibrium. In the thesis, only so-called statically determinate structures are examined, as they can be analyzed without having to consider the deformations of the structure. In these cases, statics can be used to calculate the forces the components of the structure are subjected to. Here, discussion is limited to structures commonly found in entertainment rigging, but principles of statics can equally be applied to other kinds of structures, too.

Structural calculations or loading tables for the most common rigging situations can be found in literature. However, statics can be used to design more complex structures for which such formulas cannot be readily found. On the other hand, understanding of structures, gained through the study of statics and physics, can help one to spot and prevent potentially dangerous mistakes in the rigging systems. Understanding of statics, and structural engineering in general, can make it easier for entertainment industry professionals to communicate with engineers, who often are needed when designing complex structures.

The thesis begins with discussion of necessary mathematics and statics concepts. The relevant mathematical concepts are coordinate systems and vectors. Solving a system of linear equations in two variables is also examined. The statics topics discussed are the concept of a rigid body, equilibrium equations, modeling of wire ropes and chains as well as modeling of structures consisting of multiple components.

The study continues by applying the principles of statics to common entertainment rigging structures. The structures analyzed are a dead hang, a two-point bridle and a straight truss hung from two points. General formulas for the forces present are derived algebraically. After that, hypothetical examples are analyzed using concrete numerical values for the loads.

Keywords: Entertainment technology, statics, rigging

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Matemaattiset työkalut ja statiikan käsitteet	3
2.1	Yhtälöparin ratkaisu	3
2.2	Koordinaatisto	3
2.3	Skalaarit ja vektorit	4
2.4	Massa ja paino	5
2.5	Jäykkä kappale	6
2.5.1	Tasapaino	7
2.5.2	Vapaakappalekuva	8
2.6	Vaijerien ja ketjujen mallintaminen	9
2.7	Useasta kappaleesta koostuvien rakenteiden mallintaminen	9
3	Statiikan soveltaminen esitystekniikan ripustuksissa	10
3.1	Kappale ripustettuna yhdestä pisteestä	10
3.1.1	Esimerkki	12
3.2	Kaksihaarainen bridle-ripustus	13
3.2.1	Esimerkki	17
3.3	Trussi ripustettuna kahdesta pisteestä	18
3.3.1	Yksi pistekuorma	18
3.3.2	Useampi kuorma	21
3.3.3	Esimerkki 1	21
3.3.4	Esimerkki 2	24
4	Pohdinta	26

1 Johdanto

Tässä työssä analysoidaan esitystekniikassa käytettäviä ripustuksia statiikan keinoin. Ripustuksia suunniteltaessa on osattava laskea voimat, jotka kohdistuvat ripustuksissa käytettäviin välineisiin. Myös ripustusten itse rakennukseen kohdistamat voimat tulee osata laskea. Tämän työn tarkoituksena on esitellä lukijalle statiikan perusteita sekä näiden soveltamista esitystekniikassa tyypillisissä ripustuksissa. Vaikka esiteltyt esimerkit ovat ripustuksia, statiikan menetelmiä voi soveltaa myös muunlaisia rakenteita suunniteltaessa.

Newtonin mekaniikka on fysiikan osa-alue, joka tutkii makroskooppisten kappaleiden liikettä ja käyttäytymistä. Mekaniikka voidaan jakaa eri aloihin usealla tavalla. Eräs tapa on jako dynamiikkaan ja statiikkaan eli tasapaino-oppiin. Näistä dynamiikka käsittelee liikkuvia kappaleita, kun taas statiikka käsittelee kappaleita, jotka ovat paikallaan tai liikkuvat vakionopeudella. (Hartsuijker & Welleman 2006, 4.) Tässä työssä käsitellään esitystekniikassa tyypillisiä ripustuksia, joihin voi soveltaa statiikkaa. Tämä rajaa ulkopuolelle tilanteet, joissa esiintyy muuttuvia voimia tai kuormia. Tällaisia olisivat vaikkapa liikkuvat kuormat, esiintyjien lennätykset tai sirkuksen ilma-akrobatian ripustukset.

Lisäksi tässä työssä rajoitutaan tilanteisiin, joissa kappaleen venyminen tai muut muodonmuutokset ovat niin pieniä, että ne voidaan jättää huomioimatta. Tyypillisiä esitystekniikassa käytettäviä kappaleita, joille tämä oletus pätee, ovat kahdesta pisteestä ripustetut trussit, sakkelit, valaisimet ja kaiuttimet, sekä jännityksessä olevat vaijerit, ketjut ja raksit.

Monia esitystekniikan ripustuksia ei kuitenkaan voi analysoida ilman, että muodonmuutoksia otetaan huomioon. Esimerkiksi trussi ripustettuna kolmesta pysytysuorasta pisteestä on niin sanotusti staattisesti määräämätön, ja trussin muodonmuutokset tulee ottaa huomioon, jotta kuorman jakautuminen ripustuspiSTEILLE voidaan laskea. Myöskään tällaisia tilanteita ei käsitellä tässä työssä.

Lisäksi opinnäytteessä rajoitutaan ripustuksiin, jotka voidaan mallintaa kaksiulotteisina. Vaikka kaikki todelliset rakenteet ovat kolmiulotteisia, monia rakenteita voi mallintaa kaksiulotteisina. Statiikan ongelmia voi käsitellä kaksiulotteisesti, jos kaikki ongelmaan kuuluvat pisteet ja voimat sijaitsevat samalla tasolla (Baker & Haynes, 120). Monet esitystekniikassa usein käytetyt ripustukset, esimerkiksi kaksihaaraiset bridlet ja kahdesta pisteestä ripustetut suorat trussit, voidaan käsitellä kaksiulotteisina. Sen sijaan esimerkiksi kolmihaaraiset bridle-ripustukset tai ympyrätrussit edellyttävät ongelman kolmiulotteista käsittelyä.

Luvussa 2 käsitellään tarvittavaa matematiikkaa ja statiikan käsitteistöä. Matematiikan osalta esitellään lineaarinen yhtälöpari, koordinaatisto ja vektorit. Statiikan osalta käsitellään jäykkiä kappaleita ja niiden tasapainoehtoja sekä vaijereiden ja rakenteiden mallintamista.

Luvussa 3 sovelletaan statiikkaa muutamiin esitystekniikassa yleisiin ripustustilanteisiin. Esitetyt esimerkkitapaukset ovat ripustus yhdestä pisteestä, kaksihaarainen bridle-ripustus ja kahdesta pisteestä ripustettu suora trussi.

2 Matemaattiset työkalut ja statiikan käsitteet

2.1 Yhtälöparin ratkaisu

Tässä työssä tulee usein ratkaistavaksi lineaarinen yhtälöpari, joka on muotoa

$$\begin{cases} a x + b y = e \\ c x + d y = f \end{cases}$$

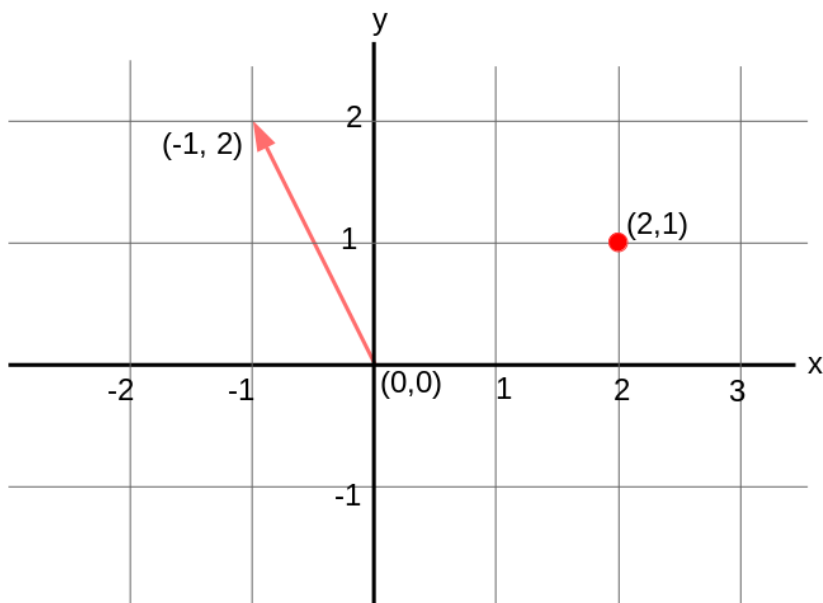
missä tuntemattomat, jotka halutaan ratkaista, ovat x ja y . Muut kirjaimet ovat vakioita. Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x = \frac{e d - f b}{a d - b c} \\ y = \frac{a f - c e}{a d - b c} \end{cases}$$

Nimittäjissä olevan termin $a d - b c$ on oltava erisuuri kuin 0. (Seppänen, Kervinen, Parkkila, Karkela & Meriläinen 2009, 23.)

2.2 Koordinaatisto

Koordinaatisto on järjestelmä, jota käytetään kuvaamaan sijainteja. Tässä työssä esiintyvissä laskuissa käytetään niin kutsuttua karteesista koordinaatistoa. Karteesisen koordinaatiston idea on esitetty kuvassa 1. Kaksiulotteista karteesista koordinaatistoa varten tulee valita origo sekä kaksi toisiinsa kohtisuoraan olevaa suuntaa, joita tavanomaisesti nimitetään kirjaimin x ja y . Kolmiulotteisessa karteesisessa koordinaatistossa kaksiulotteiseen karteesiseen koordinaatistoon lisätään z -akseli, joka on kohtisuorassa xy -tasoon nähden. Pisteiden koordinaatit kuvaavat, paljonko mihinkin suuntaan tulee kulkea origosta lähdettäessä, jotta päästään pisteeseen. Esimerkiksi piste $(1, 0, 0)$ m tarkoittaa pistettä, joka saavutetaan, kun liikutaan origosta yksi metri x -suuntaan. (Baker & Haynes, 18–24.)



Kuva 1. Karteesisen koordinaatiston idea, jossa esimerkin vuoksi merkitty yksi piste ja yksi vektori.

Usein järkevällä origon ja koordinaattiakselien valinnalla saadaan laskuoperaatiot yksinkertaisemmaksi (Baker & Haynes, 19). Tässä työssä käytetään koordinaatistoa, jossa positiivinen y-akseli osoittaa ylöspäin ja positiivinen x-akseli osoittaa kuvissa oikealle. Koska tässä työssä käsitellään ainoastaan kaksiulotteisia tilanteita, voidaan koordinaatisto valita niin, että kaikki pisteet ja vektorit sijaitsevat xy -tasolla. Tällöin niiden z -komponentti on 0, ja tästä syystä z -koordinaatti jätetään tässä työssä usein kirjoittamatta.

2.3 Skalaarit ja vektorit

Skalaarit ovat fysikaalisia suureita, joita voidaan kuvata yhdellä luvulla. Tällaisia ovat esimerkiksi massa, pituus tai aika. (Baker & Haynes, 11; Inkinen & Tuohi 2006, 17.)

Vektoreilla puolestaan on suuruuden lisäksi myös suunta. Vektoreita voidaan kuvata visuaalisesti nuolilla, joilla on tietty pituus ja jotka osoittavat tiettyyn suuntaan. Esimerkiksi voima, nopeus ja kiihtyvyys ovat vektoreita. (Inkinen & Tuohi 2006, 17.)

Myös vektoreita kuvataan edellisessä luvussa käsitellyn koordinaatiston avulla. Vektorin komponentit kuvaavat, missä vektorin kärki sijaitsee. (Baker & Haynes, 18.) Esimerkiksi vektori (2, 3, 0) voidaan kuvata nuolella, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (2, 3, 0). Edellä esitetyssä kuvassa 1 on esimerkki kaksiulotteisen vektorin visuaalisesta esittämisestä.

Tässä työssä vektoria merkitään kirjaimella, jonka päälle on piirretty viiva. Vektorin komponentit esitetään suluisissa pilkulla erotettuna järjestyksessä x, y, z. Komponenttiin viitataan vektorin nimellä ja alaindeksillä x, y tai z. Esimerkiksi $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Kuten koordinaattienkin kohdalla, tässä työssä z-komponentti on yleensä nolla ja se jätetään merkitsemättä.

Kaksi vektoria voidaan laskea yhteen laskemalla niiden skalaarikomponentit yhteen

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

(Hartsuijker & Welleman 2006, 15).

Vektori voidaan kertoa skalaarilla kertomalla sen komponentit kyseisellä skalaarilla (Emri & Voloshin 2016, 564).

Vektorien vähennyslasku voidaan tehdä kertomalla jälkimmäinen vektori luvulla -1 ja laskemalla yhteen, eli siis $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ (Baker & Haynes, 38).

2.4 Massa ja paino

Painolla tarkoitetaan voimaa, joka kohdistuu kappaleeseen gravitaation vaikutuksesta (Kärkkäinen & Mikkonen 2006, 13, 21). Tässä työssä painoa merkitään kirjaimella G. Kappaleen painon suuruus voidaan laskea, kun tunnetaan sen massa (m) kaavalla $G = m g$, missä g on putoamiskiihtyvyys (Inkinen & Tuohi 2006, 99). Putoamiskiihtyvyyden arvo on noin 9.8 m/s², mutta vaihtelee eri puolilla maapalloa (Hartsuijker & Welleman 2006, 21–22). Yksinkertaisuuden vuoksi usein käytetään arvoa 10 m/s², jos tämä johtaa lopputulokseen, jossa rakenteet

ylimitoitetaan. Esimerkiksi 200 kg massaisen kuorman painona voi käyttää 2000 N, jos tämä johtaa liian kestävän, eikä liian heikon rakenteen suunnitteluun.

Massa on kappaleen ominaisuus, joka ei muutu. Painoon sen sijaan vaikuttaa paikka, jossa ollaan. (Inkinen & Tuohi 2006, 98–99.) Esimerkiksi valaisimen massa on sama kuussa ja maassa, mutta paino on kuussa pienempi kuin maassa.

Koska paino on voima ja siten vektori, on sillä suuruuden lisäksi myös suunta. Tässä työssä koordinaatistot on aina valittu niin, että negatiivinen y-akseli osoittaa alaspäin, jolloin paino on vektorina $\vec{G} = (0, -G)$.

Kolmiulotteisissa kappaleissa paino on jakautunut kappaleeseen. Tässä työssä käsiteltävissä laskuissa tämä jakautunut paino voidaan kuitenkin korvata yhdellä pistemäisellä voimalla, joka kohdistuu kappaleen painopisteeseen. Usein kappaleiden tarkkoja painopisteitä ei tunneta. Joskus nämä löytävät kappaleiden valmistajien datalehtisistä tai laskentaohjelman avulla. Muissa tapauksissa voidaan käyttää esimerkiksi kappaleen symmetrioihin perustuvia arvioita (Kärkäinen & Mikkonen 2006, 101).

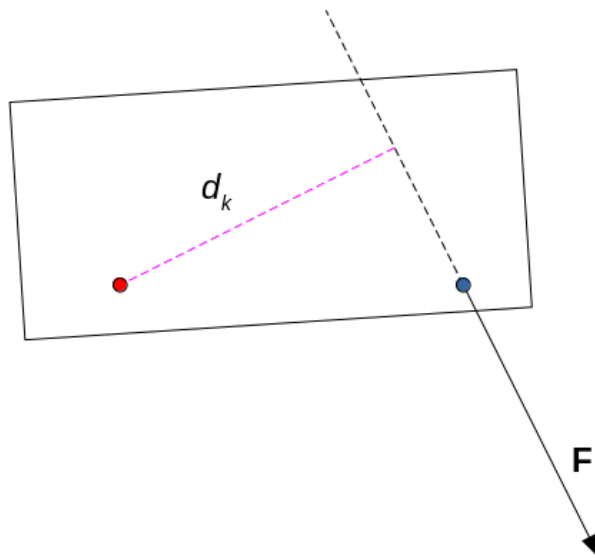
2.5 Jäykkä kappale

Jäykkä kappale on kappale, jonka muoto ei muutu sitä kuormitettaessa. Todellisuudessa kaikkien kappaleiden muoto muuttuu kuormitettaessa, joten tämä on yksinkertaistus todellisuudesta (Salmi 2001, 11 & 15; Baker & Haynes, 50.) Kappale voidaan kuitenkin mallintaa jäykkänä kappaleena, jos sen muoto muuttuu siihen vaikuttavien voimien takia merkityksettömän vähän (Emri & Voloshin 2016, 30).

Kun kappaleeseen kohdistuu voimia, ne aiheuttavat momentteja. Momentit kuvaavat, miten voimat vääntävät kappaletta ja yrittävät saada sen pyörimään. Yleisessä tapauksessa momentti on itseasiassa vektorisuure. Koska tässä työssä esitetyissä tilanteissa pisteet ja voimat sijaitsevat xy-tasossa, kaikki mo-

mentit ovat z-suuntaisia, jolloin riittää, että tarkastellaan tätä yhtä momenttivektorin komponenttia. (Baker & Haynes, 85–86, 120.) Näin ollen momenttia voidaan käsitellä skalaarina, jota tässä työssä merkitään kirjaimella M . Tässä työssä käytetyssä merkkikonventiossa positiivinen momentti on vastapäivään.

Voimien aiheuttamat momentit lasketaan aina jonkin pisteen, niin kutsutun momenttipisteen, suhteen. Voiman F aiheuttaman momentin suuruus voidaan laskea kaavasta $M = F d_k$, missä d_k on kohtisuora etäisyys voiman vaikutussuorasta momenttipisteeseen. (Baker & Haynes, 91; Salmi 2001, 29.) Momentin laskemista on havainnollistettu kuvassa 2.



Kuva 2. Momentin laskeminen punaisella merkityn momenttipisteen suhteen, kun voima F kohdistuu sinisellä merkittyyn pisteeseen. Voiman vaikutussuoraa on jatkettu mustalla katkoviivalla. Kohtisuora etäisyys voiman vaikutussuoran ja momenttipisteen välillä on merkitty magentalla katkoviivalla.

2.5.1 Tasapaino

Jäykän kappaleen, joka pysyy paikallaan, sanotaan olevan pysyvässä lepotilassa (Kärkkäinen & Mikkonen 2006, 14). Tässä työssä käsitellään ainoastaan sellaisia kappaleita, jotka ovat pysyvässä lepotilassa.

Kappale, joka on pysyvässä lepotilassa, on myös tasapainotilassa. Pysyvää lepotilasta poiketen tasapainotilassa oleva kappale voi kuitenkin liikkua vakionopeudella. (Kärkkäinen & Mikkonen 2006, 14.) Teatteritekniikassa esimerkiksi vakionopeudella liikkuva ansas on tasapainotilassa, mutta ei lepotilassa. Paikallaan oleva ansas puolestaan on sekä lepotilassa että tasapainotilassa.

Tässä työssä keskitytään kaksiulotteisiin tilanteisiin, joissa kaikki kappaleet ja voimat sijaitsevat xy-tasossa. Näissä tilanteissa jäykkä kappale on tasapainotilassa kun

$$\begin{cases} \sum_i F_{x,i} = 0 \\ \sum_i F_{y,i} = 0 \\ \sum_i M_i = 0 \end{cases}$$

joista kahden ensimmäisen yhtälön mukaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien summan sekä x- että y-suunnassa on oltava 0, ja alimman yhtälön mukaan momenttien summan on oltava 0. (Emri & Voloshin 2016, 113; Inkinen & Tuohi 2006, 273.) Näitä yhtälöitä kutsutaan tasapainoyhtälöiksi.

Tässä työssä ongelmia lähestytään seuraavalla tavalla: aluksi todetaan yleiseen elämäkokemukseen perustuen, että tutkittava kappale on lepotilassa. Tästä päätellään, että kappale on myös tasapainotilassa, ja näin ollen edeltävien yhtälöiden on pädeittävä. Tämän jälkeen saadaan tasapainoyhtälöitä käyttäen ratkaistua halutut voimat.

2.5.2 Vapaakappalekuva

Jäykkiä kappaleita analysoitaessa on tapana laatia kappaleen vapaakappalekuva. Vapaakappalekuvaan on piirretty analysoitava kappale ilman ympäristöään, ja siihen on merkitty kappaleeseen vaikuttavat ulkoiset voimat. (Salmi 2001, 115.)

2.6 Vaijerien ja ketjujen mallintaminen

Köysillä tarkoitetaan kappaleita, joissa voi olla ainoastaan vetojännitystä, ei puristusta tai taivutusrasitusta. Esimerkiksi vaijerit ja ketjut voidaan mallintaa köysinä. (Emri & Voloshin, 253, 390.)

Vaijerit ja ketjut, yleisemmin köydet, eivät ole jäykkiä kappaleita. Tästä syystä edellä esitetyt tasapainoyhtälöt pitää käsittää hieman eri tavalla. Jos köysi on tasapainossa, myös edellä mainitut tasapainoyhtälöt pätevät, eli köyteen vaikuttavien ulkoisten voimien ja momenttien summat ovat 0. Sen sijaan toisin päin päättely ei päde: jos yhtälöt pätevät, ei tästä voida päätellä onko köysi tasapainossa vai ei. (Salmi 2001, 225.)

Tässä työssä käsitellyissä tapauksissa köysiin vaikuttaa kahdenlaisia voimia: köyden päistä köyteen kohdistuvat voimat, sekä köyden oma paino. Jos paino on pieni suhteessa päihin kohdistuvaan jännitykseen, voidaan oma paino jättää huomiotta ja olettaa köyden olevan täysin suora (Emri & Voloshin 2016, 390–393).

2.7 Useasta kappaleesta koostuvien rakenteiden mallintaminen

Useat todelliset rakenteet voidaan ratkaista jakamalla ne useaan eri osaan (Emri & Voloshin 2016, 458). Jos näiden muodostama kokonaisuus on tasapainossa, on kaikkien osien itsessään oltava tasapainossa (Baker & Haynes, 137).

Kun kappale jaetaan osiin, kustakin osasta laaditaan oma vapaakappalekuvasa, joihin merkitään ulkoisten voimien lisäksi muiden osien toisiinsa kohdistamat voimat (Baker & Haynes, 137, 152–153). Tätä menetelmää käsitellään tarkemmin sovellusesimerkkien yhteydessä.

3 Statiikan soveltaminen esitystekniikan ripustuksissa

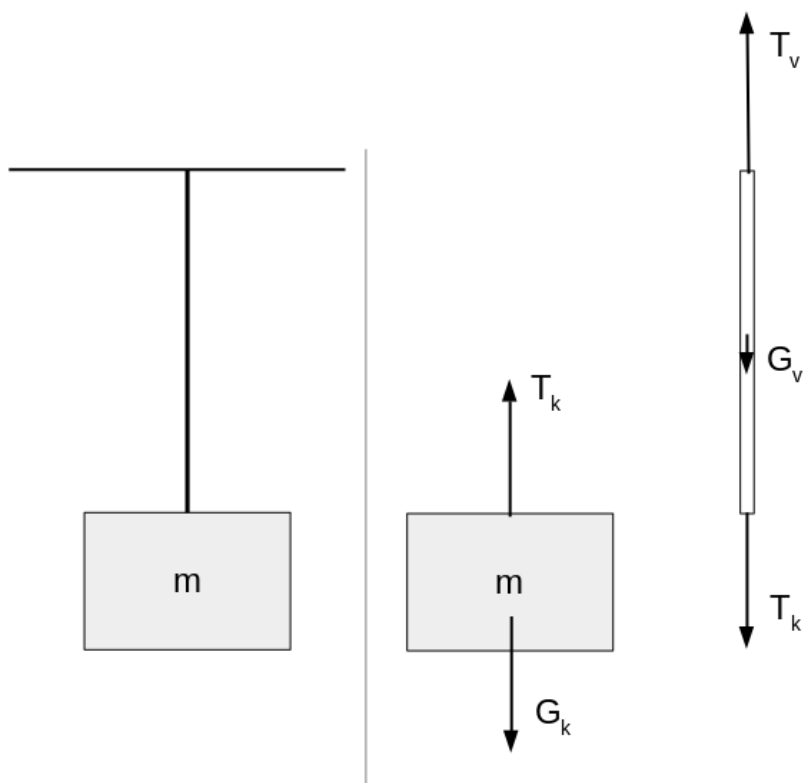
3.1 Kappale ripustettuna yhdestä pisteestä

Tutkitaan kuvan 3 mukaista pysyvässä lepotilassa olevaa rakennetta, jossa taakka on ripustettu vaijerilla. Taakan oletetaan olevan sellainen, että sen voi mallintaa jäykkänä kappaleena. Tässä tavoitteena on ratkaista vaijerin päihin kohdistuvat voimat.

Jotta kaikki halutut voimat saadaan ratkaistua, on rakenne usein jaettava useaan osaan. Kaikista osista piirretään omat vapaakappalekuvansa, ja ratkaistaan näissä esiintyvät tuntemattomat voimat tasapainoyhtälöiden avulla. (Salmi 2002, 159.)

Tässä esimerkissä rakenne jaetaan kahteen osaan: ripustettuun taakkaan ja vaijeriin. Molempien vapaakappalekuvat on esitetty kuvassa 3. Kappaleeseen vaikuttaa sen oma paino ja vaijerin siihen kohdistama voima. Vaijeri ei pysty välittämään momentteja, eivätkä myöskään useimmat vaijerin ja kuorman liitokset. Vaijeriin vaikuttaa yläpäähän kiinnityksen kohdistama voima, vaijerin oma paino sekä kuorman kohdistama voima, joka on yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen vaijerin kuormaan kohdistamaan voimaan nähden.

Kuormaan vaikuttaa kaksi voimaa. Koska voimia on kaksi, voidaan tasapainoyhtälöiden voimayhtälöistä päätellä, että voimien on oltava yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset. Momenttiyhtälöstä taas voidaan päätellä, että voimien on sijaittava samalla vaikutussuoralla. (Salmi 2002, 134.) Tässä tapauksessa taakan paino on suoraan alaspäin, joten vaijerin taakkaan kohdistaman voiman on siis oltava suoraan ylöspäin. Taakan paino kohdistuu sen painopisteeseen, ja koska painon suunta on suoraan alas, edeltävän perusteella on taakan ja vaijerin kiinnityksen sijaittava suoraan painopisteen yläpuolella.



Kuva 3. Vasemmalla yksinkertaistettu kuva katosta ripustetusta kuormasta. Oikealla kuorman ja vaijerin vapaakappalekuvat.

Tarkastellaan seuraavaksi vaijeria. Edellisessä kappaleessa todettiin, että vaijerin taakkaan kohdistuma jännitys on suoraan ylöspäin, joten taakan vaijeriin kohdistama voima on suoraan alaspäin. Samoin vaijerin oma paino on suoraan alaspäin. Tasapainoyhtälöistä voidaan päätellä, että vaijerin ylemmän pään voiman tulee olla pystysuora ja suoraan ylöspäin.

Kahden edeltävän kappaleen tulokset voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$\begin{cases} T_k = G_k \\ T_v = G_v + T_k = G_v + G_k \end{cases}$$

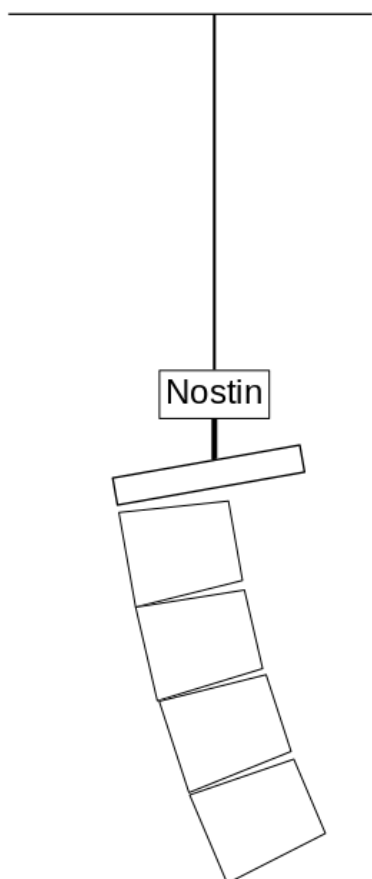
Vaijeriin kohdistuva voima on siis ylhäällä jonkin verran suurempi kuin alhaalla, koska ylhäällä voima aiheutuu sekä vaijerin omasta painosta että taakan pai-

nosta, alhaalla vain taakan painosta. Tässä tilanteessa vaijeri ja vaijerin ylemmän pään ripustuksen tulee mitoittaa niin, että ne kestävät vaijerin ja kuorman painon. Alempi kiinnitys kuormaan voidaan mitoittaa kestämään ainoastaan kuorman kokonaispainon, tosin yleensä vaijerin massa on niin pieni, ettei tällaisesta optimoinnista ole mitään hyötyä.

Edellä mainittua menettelyä voidaan soveltaa myös tilanteisiin, jotka koostuvat useammasta kuin kahdesta osasta, jotka on kiinnitetty toisiinsa sakkeleilla tai muilla liitoksilla, jotka eivät voi välittää momentteja. Esimerkiksi tällaisesta tilanteesta on ripustus, jossa alhaaltapäin katsoen on taakka, sakkeli, vaijeri, nostin ja ketju, joka kiinnitetty kattoon. Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan jakaa ripustus näihin viiteen osaan, piirtää jokaiselle oma vapaakappalekuvansa ja ratkaista kuten edellä. Jos koko rakenne on ripustettu yhdestä pisteestä, eikä siihen vaikuta tämän lisäksi muita ulkoisia voimia tai momentteja kuin paino, päädytään vastaavaan tulokseen: katon ripustuspisteeseen kohdistuu voima, joka on kaikkien osien painojen summa.

3.1.1 Esimerkki

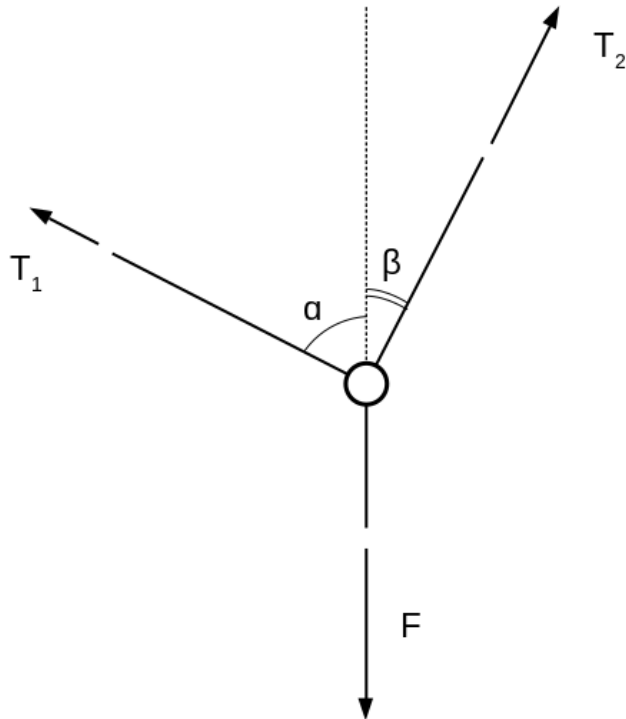
Lasketaan kuvassa 4 katon ripustuspisteeseen kohdistuva voima. Kaiuttimien kokonaismassa on 180 kg. Nostimen massa ketjuineen on 30 kg. Kaapeleiden ja ripustusvälineiden massaksi arvioidaan yläkanttiin 10 kg. Kokonaiskuorma on näiden summa 220 kg, ja paino on ylöspäin pyöristettynä 2200 N. Edellisen luvun perusteella tiedetään, että tämä on katon ripustuspisteeseen kohdistuva voima, sekä myös yläraja nostimeen, sakkeleihin ja muihin mahdollisiin ripustuksessa käytettyihin komponentteihin kohdistuviin voimiin.



Kuva 4. Kaiutin ripustettuna nostimen avulla.

3.2 Kaksihaarainen bridle-ripustus

Kuvassa 5 on esitetty kahdesta pisteestä tehty bridle-ripustus. Kuten edellä, rakenne jaetaan useampaan kappaleeseen. Analysoidaan sakkelia tai nostorengasta, jossa vaijerit yhtyvät. Kappaleeseen vaikuttaa tunnettu kuvassa alaspäin suuntautuva voima F sekä tuntemattomat vaijerien voimat T_1 ja T_2 .



Kuva 5. Kaksihaarainen bridle-ripustus. Kuvassa positiivinen x-akseli osoittaa oikealle ja positiivinen y-akseli ylöspäin.

Soveltamalla tasapainoyhtälöiden voimayhtälöitä saadaan

$$\begin{cases} T_{x,1} + T_{x,2} = 0 \\ T_{y,1} + T_{y,2} + F_y = 0 \end{cases}$$

eli voimien summan on oltava 0 x- ja y-suunnassa. Tuntemattomia on ainoastaan kaksi, joten nämä yhtälöt riittävät ratkaisemaan vaijerien voimat.

Kirjoittamalla edelliset yhtälöt kulmien avulla saadaan

$$\begin{cases} -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = 0 \\ T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta - F = 0 \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on aluvussa 2.1 esitetyn ratkaisukaavan mukaan

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} F \\ T_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} F \end{cases}$$

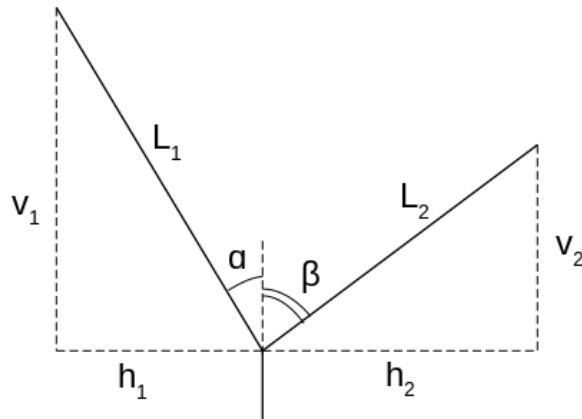
Huomataan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja, jos vaijerien välinen kulma on 180 astetta tai 0 astetta. Nämä tapaukset ovat joko fyysikaalisesti mahdottomia, tai niitä ei voi ratkaista statiikan keinoin. Samoin jos tulokseksi saadaan negatiivisia voimia tulos ei kuvaa todellista fyysikaalista tilannetta: vaijerissa voi olla vain vetojännitystä, ei puristusta. Huomattavaa on, että toisen vaijerin kulma voi hyvin olla yli 90 astetta, eli vaijeri voi vetää pistettä alaspäin ja sivulle.

Erikoistapauksessa, jossa molemmat kulmat ovat yhtä suuret, saadaan voimien kaavaksi

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2 \cos \alpha} F$$

Usein tunnetaan pisteiden väliset etäisyydet eikä vaijerien kulmia. Kulmat saadaan laskettua trigonometrian avulla. Käyttämällä kuvan 6 mukaisia merkintöjä, saadaan trigonometrinen funktioiden arvoiksi (esim. Donovan 2008, 11-12)

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= h_1/L_1 \\ \sin \beta &= h_2/L_2 \\ \cos \alpha &= v_1/L_1 \\ \cos \beta &= v_2/L_2 \end{aligned}$$



Kuva 6. Apukuva trigonometrinen funktioiden laskemiseen kulmista. L_1 ja L_2 ovat vaijerien pituudet. Kuvaan on merkitty myös katon pisteiden ja halutun ripustuspisteen väliset vaaka- ja pystysuuntaiset etäisyydet sekä vaijerien kulmat.

Kulmia ei ole tarpeen ratkaista, vaan saadut sinit ja kosinit voidaan sijoittaa edellä johdettuihin vaijerien voimien kaavoihin, jolloin voimiksi saadaan

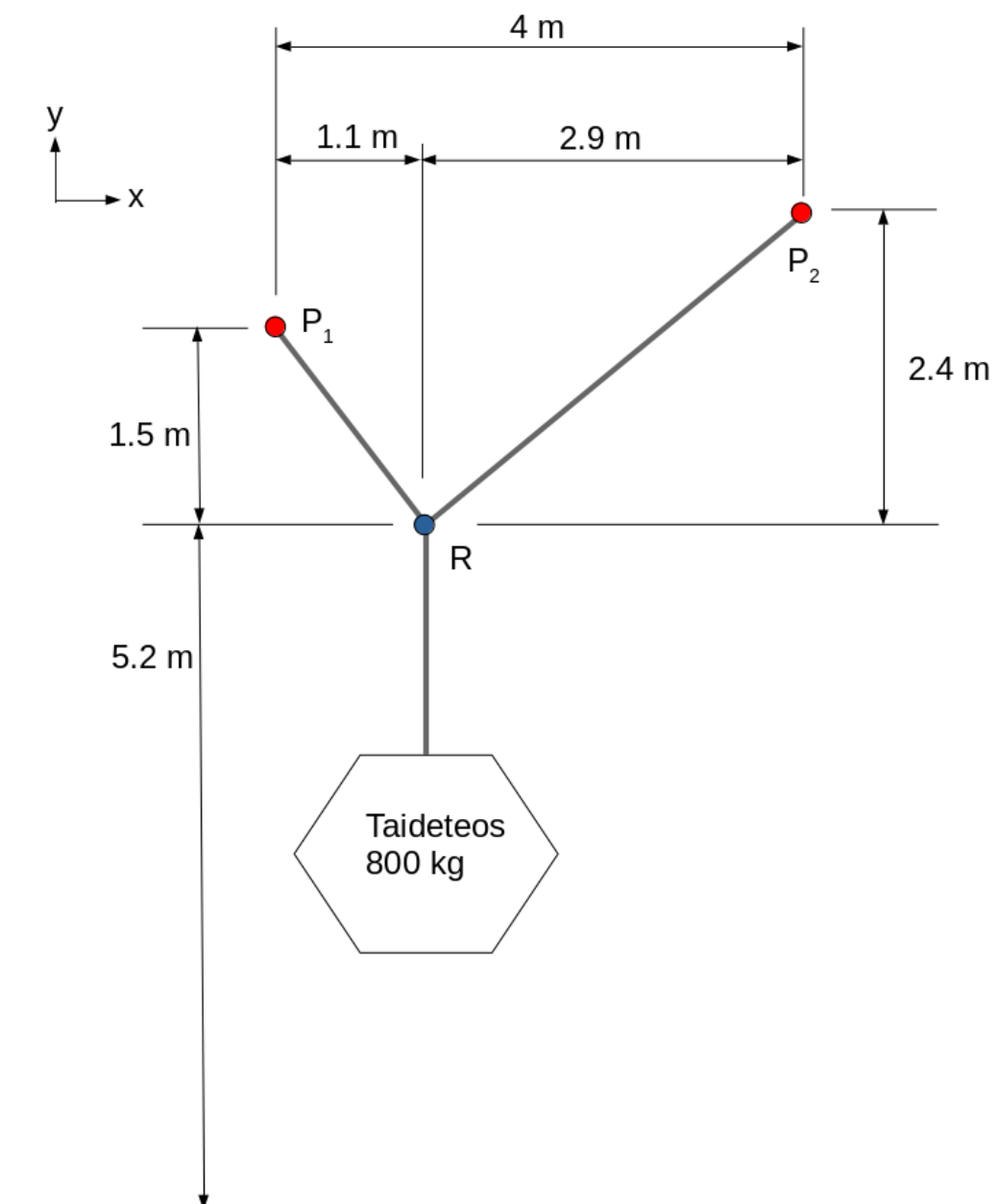
$$\begin{cases} T_1 = \frac{L_1 h_2}{h_1 v_2 + h_2 v_1} F \\ T_2 = \frac{L_2 h_1}{h_1 v_2 + h_2 v_1} F \end{cases}$$

Vaijerien pituudet voidaan laskea Pythagoraan lauseella, esimerkiksi $L_1 = \sqrt{h_1^2 + v_1^2}$.

Nämä kaavat ovat käytännössä käyttökelpoisemmat kuin kulmien avulla ilmaistut kaavat. Vastaavat kaavat on esitystekniikan kirjallisuudessa esittänyt esimerkiksi Donovan (2008, 21-1) ja Hall (2013, 29–35).

3.2.1 Esimerkki

Kaksi kiinteää ripustuspistettä P_1 ja P_2 sijaitsevat kuvan 7 mukaisissa kohdissa. Näiden väliin kohtaan R halutaan sijoittaa ripustuspiste, johon ripustetaan 800 kg massainen taideteos.



Kuva 7. Taideteoksen ripustus

Aluksi lasketaan vaijerien pituudet:

$$L_1 = \sqrt{(1,1 \text{ m})^2 + (1,5 \text{ m})^2} \approx 1,860 \dots \text{ m}$$

$$L_2 = \sqrt{(2,9 \text{ m})^2 + (2,4 \text{ m})^2} \approx 3,764 \dots \text{ m}$$

Taideteoksen painon voi pyöristää ylöspäin arvoon 8000 N. Sijoittamalla etäisyydet kaavoihin saadaan

$$\begin{cases} T_1 = \frac{(1,860 \dots \text{ m})(2,9 \text{ m})}{(1,1 \text{ m})(2,4 \text{ m}) + (2,9 \text{ m})(1,5 \text{ m})} (8000 \text{ N}) = 6173,7 \dots \text{ N} \approx 6200 \text{ N} \\ T_2 = \frac{(3,764 \dots \text{ m})(1,1 \text{ m})}{(1,1 \text{ m})(2,4 \text{ m}) + (2,9 \text{ m})(1,5 \text{ m})} (8000 \text{ N}) = 4739,0 \dots \text{ N} \approx 4700 \text{ N} \end{cases}$$

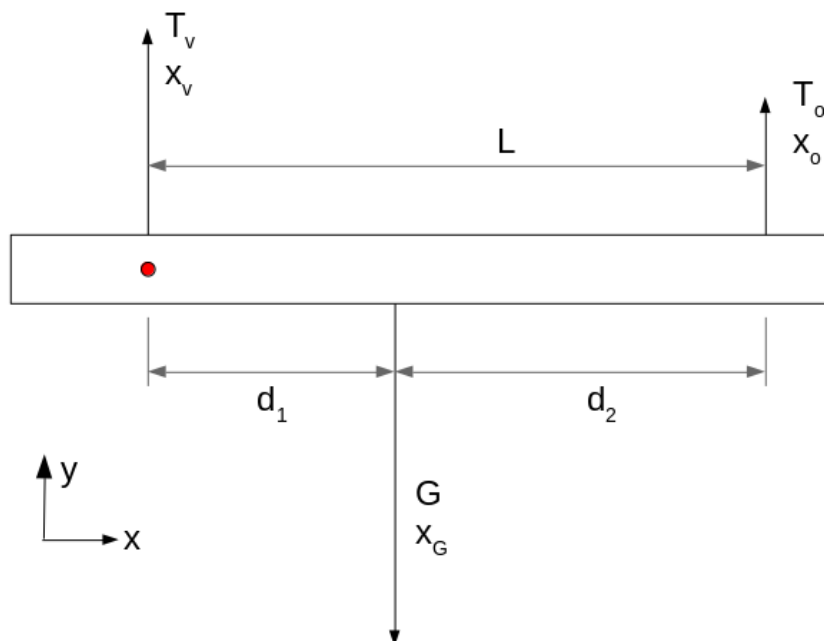
Vaijerien oletetaan olevan massattomia ja täysin suorina. Koska taideteoksen paino on merkittävästi vaijerien painoa suurempi, voidaan olettaa vaijerien olevan suorina ja painottomia (Emri & Voloshin 2016, 390). Myöskään erityisesti esitystekniikkaa käsittelevät kirjoittajat, esimerkiksi Paulson (2015), Glerum (2007, 17–28), Hall (2013, 29–35) tai Higgs (2008, 97–98), eivät yleensä huomioi vaijerien omaa painoa. Vaijerin oman painon ja taipumisen huomioimisesta esitystekniikan ripustuksissa on kirjoittanut esimerkiksi Donovan (2008, 23-1–23-19). Vaijerien oman massan huomioimista käsittelevät statiikan oppikirjoissa esimerkiksi Salmi (2001, 225–244) ja Emri & Voloshin (2016, 403–450).

3.3 Trussi ripustettuna kahdesta pisteestä

3.3.1 Yksi pistekuorma

Tutkitaan kuvassa 8 olevaa vapaakappalekuvaa, jossa trussi on ripustettu kahdesta pystysuorasta pisteestä ja trussiin on ripustettu yksi pistemäinen kuorma, jonka voima kohdistuu suoraan alaspäin. Toistaiseksi trussin oma massa jätetään huomiotta; myöhemmin palataan siihen, miten sen voi huomioida laskuissa.

Kuvassa on merkitty myös voimien vaikutuspisteiden x-koordinaatit. Kohtia, joihin nostimet on kiinnitetty trussissa kutsutaan tukipisteiksi, ja raksin tai muun kiinnityksen näihin pisteisiin kohdistamia voimia tukireaktioiksi. Tarkastelemalla tasapainoyhtälöitä ja momenttien yhtälöitä nähdään, että y-koordinaatilla ei ole väliä: voimien tasapainoyhtälöissä paikkoja ei tarvita ollenkaan, ja momenteja laskiessa ainoastaan kohtisuoralla etäisyydellä voiman vaikutussuorasta on väliä.



Kuva 8. Vapaakappalekuva kahdesta pisteestä ripustetusta trussista, johon kohdistuu yksi pistekuorma.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitään tukipisteiden välin pituutta $L = x_o - x_v$, joka on valitussa koordinaatistossa aina positiivinen. Merkitään kuorman etäisyyttä vasemmasta tukipisteestä $d_1 = x_G - x_v$. Tämä on negatiivinen, jos

kuorma on vasemman pisteen vasemmalla puolella, muuten positiivinen. Merkitään vastaavasti kuorman etäisyyttä oikeasta tukipisteestä $d_2 = x_o - x_G$, joka on positiivinen, jos kuorma on oikean pisteen vasemmalla puolella.

Kirjoitetaan vektorit kuvan mukaisin symbolein

$$\bar{T}_v = (0, T_v) \quad \bar{T}_o = (0, T_o) \quad \bar{G} = (0, -G)$$

Seuraavaksi lasketaan momentit kuvaan merkityn punaisen pisteen suhteen. Momentin suuruus on momenttipisteen etäisyys voiman vaikutussuorasta. Tässä kaikki voimat ovat pystysuoria, eli y-akselin suuntaisia. Momenttipisteen etäisyys voiman vaikutussuorasta on siis sama kuin momenttipisteen ja voiman vaikutuspisteen välinen x-akselin suuntainen etäisyys. Positiiviset momentit ovat tässä työssä käytetyssä merkkikonventiossa sellaisia, jotka pyrkivät saamaan kappaleen pyörimään vastapäivään. Vasemman tukireaktion, oikean tukireaktion ja kuorman aiheuttamat momentit, tässä järjestyksessä, ovat

$$M_v = 0 \cdot T_v = 0 \quad M_o = L T_o \quad M_G = -d_1 G$$

Nämä voidaan sijoittaa tasapainoyhtälöihin

$$\begin{cases} T_v + T_o - G = 0 \\ M_v + M_o + M_G = L T_o - d_1 G = 0 \end{cases}$$

Koska missään voimassa ei ollut x-suuntaisia komponentteja, olisi saatu yhtälö $0 = 0$. Tämä on tietenkin aina tosi, ja siksi se voitiin jättää kirjoittamatta.

Kun tunnetut termit siirretään yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle, voidaan soveltaa luvussa 2.1 esitettyä yhtälöparin ratkaisukaavaa ja ratkaista tuntemattomat voimat T_o ja T_v . Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} T_v = \frac{d_2}{L} G \\ T_o = \frac{d_1}{L} G \end{cases}$$

Vastaavat kaavat esitystekniikan kirjallisuudessa ovat esittäneet esimerkiksi Hall (2013, 67), Donovan(2018, 16-1) ja Paulson (2015).

Kuten aiemmin todettiin, vaijereissa voi esiintyä ainoastaan vetäviä voimia, ei puristavia. Tässä tapauksessa voimien merkit valittiin niin että puristavat voimat olisivat negatiivisia. Kun tämän kaltaisia ongelmia ratkaistaan, tulee muistaa tarkistaa, että ratkaisuna saadut vaijerien jännitykset ovat vetäviä eivätkä puristavia.

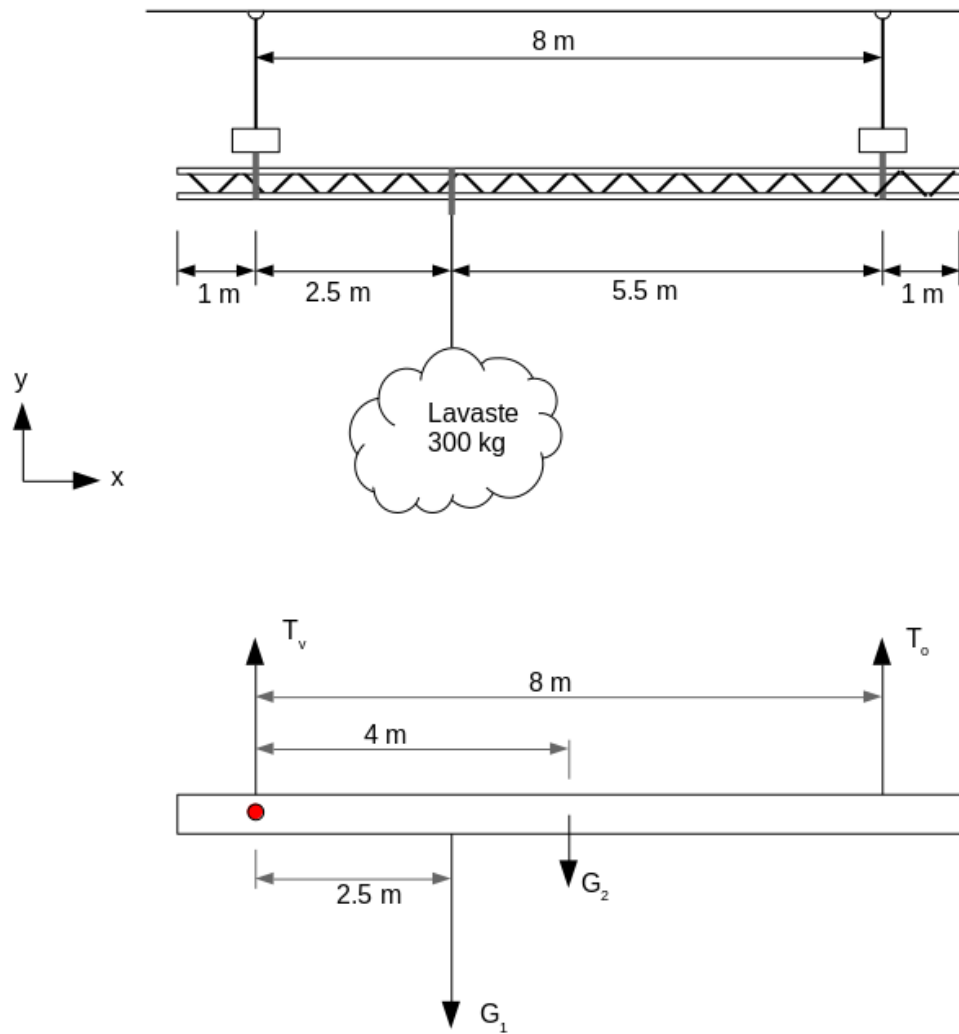
3.3.2 Useampi kuorma

Mikäli trussiin kohdistuu useampi kuormittava voima, voidaan käyttää seuraavaa menetelmää: lasketaan ripustusten tukireaktiot kullekin voimalle yksin, ikään kuin tämä olisi ainut vaikuttava voima. Tämän jälkeen lasketaan kaikki saadut tukireaktiot yhteen, jolloin saadaan ripustusten trussiin kohdistama voima. (Hall 2013, 67–74.).

Erilaisten jakautuneiden kuormien kohdalla on järkevää korvata jakautunut voima yhdellä pistevoimalla, joka kohdistuu kuorman painopisteeseen. Esitystekniikassa tyypillisiä tällaisia kuormia ovat esimerkiksi suorakulmaiset verhot, tasaisin välein sijoitetut valaisimet, trussissa oleva kaapelointi ja trussin oma paino. (Donovan 2008, 16-4; Hall 2013, 73–74.)

3.3.3 Esimerkki 1

Tutkitaan kuvan 9 yläosassa esitettyä rakennetta. Trussin vapaakappalekuva on kuvan 9 alaosassa. Trussiin vaikuttaa kaksi tuntematonta ylöspäin suuntautuvaa voimaa tukipisteiden kohdalla, sekä lavasteesta johtuva voima ja trussin oma paino.



Kuva 9. Trussi, johon on ripustettu pistekuorma. Ylhäällä: kaavio ripustuksesta. Alhaalla: trussin vapaakappalekuva.

Lavasteen ja vaijerin analyysi on täysin vastaava, kuin mitä on esitetty luvussa 3.1. Lavasteen massa on 300 kg, ja jos lasketaan vaijerin ja muiden ripustuksessa käytettyjen välineiden massaksi 5 kg, saadaan kokonaispainoksi $G_1 = 3000$ N. Tämä voima suuntautuu suoraan alaspäin. Sen etäisyys vasemmasta tukipisteestä on $d_1 = 2,5$ m ja oikeasta pisteestä $d_2 = 8$ m $-$ $2,5$ m $= 5,5$ m. Pisteiden etäisyys on $L = 8$ m. Tämän voiman aiheuttamat tukireaktiot lasketaan edellisessä luvussa olevilla kaavoilla, jolloin voimiksi saadaan

$$\begin{cases} T_{v,1} = \frac{5,5 \text{ m}}{8 \text{ m}} (3000 \text{ N}) \approx 2063 \text{ N} \\ T_{o,1} = \frac{2,5 \text{ m}}{8 \text{ m}} (3000 \text{ N}) \approx 938 \text{ N} \end{cases}$$

Trussin oma paino on jakautunut tasaisesti trussille, mutta kuten yllä todettiin, tämä voidaan korvata painopisteeseen sijoitetulla pistekuormalla. Hyvä approksimaatio painopisteen sijainnille on trussin geometrinen keskipiste (Donovan 2008, 16-4). Tässä esimerkissä se sijaitsee 4 m etäisyydellä vasemmasta ripustus-
pisteestä. Trussin massa on 60 kg, jolloin paino on $G_2 = 600 \text{ N}$. Koska trussi sijaitsee symmetrisesti suhteessa tukipisteisiin, voidaan päätellä, että voima jakautuu näille tasaisesti (Donovan 2008, 16-4). Molempien voima on siis $T_{v,2} = T_{o,2} = 300 \text{ N}$. Samaa tulokseen olisi päädytty soveltamalla samoja kaavoja kuin edellisessä kappaleessa lavasteen kohdalla. Huomaamalla kuorman symmetrinen jakautuminen voidaan kuitenkin usein välttää turhia laskuja.

Tukireaktiot saadaan, kun lasketaan edellä saadut tulokset yhteen.

$$\begin{cases} T_o = T_{o,1} + T_{o,2} \approx 2063 \text{ N} + 300 \text{ N} = 2363 \text{ N} \\ T_v = T_{v,1} + T_{v,2} \approx 938 \text{ N} + 300 \text{ N} = 1238 \text{ N} \end{cases}$$

Edellä saadut voimat ovat siis voimat, jotka nostimen koukku kohdistaa raksin tai muun välityksellä trussiin. On syytä varmistaa, että nämä ovat merkittävästi positiivisia eli suuntautuvat ylöspäin, koska ketju, sakkeli ja raksi voivat välittää vain vetäviä voimia.

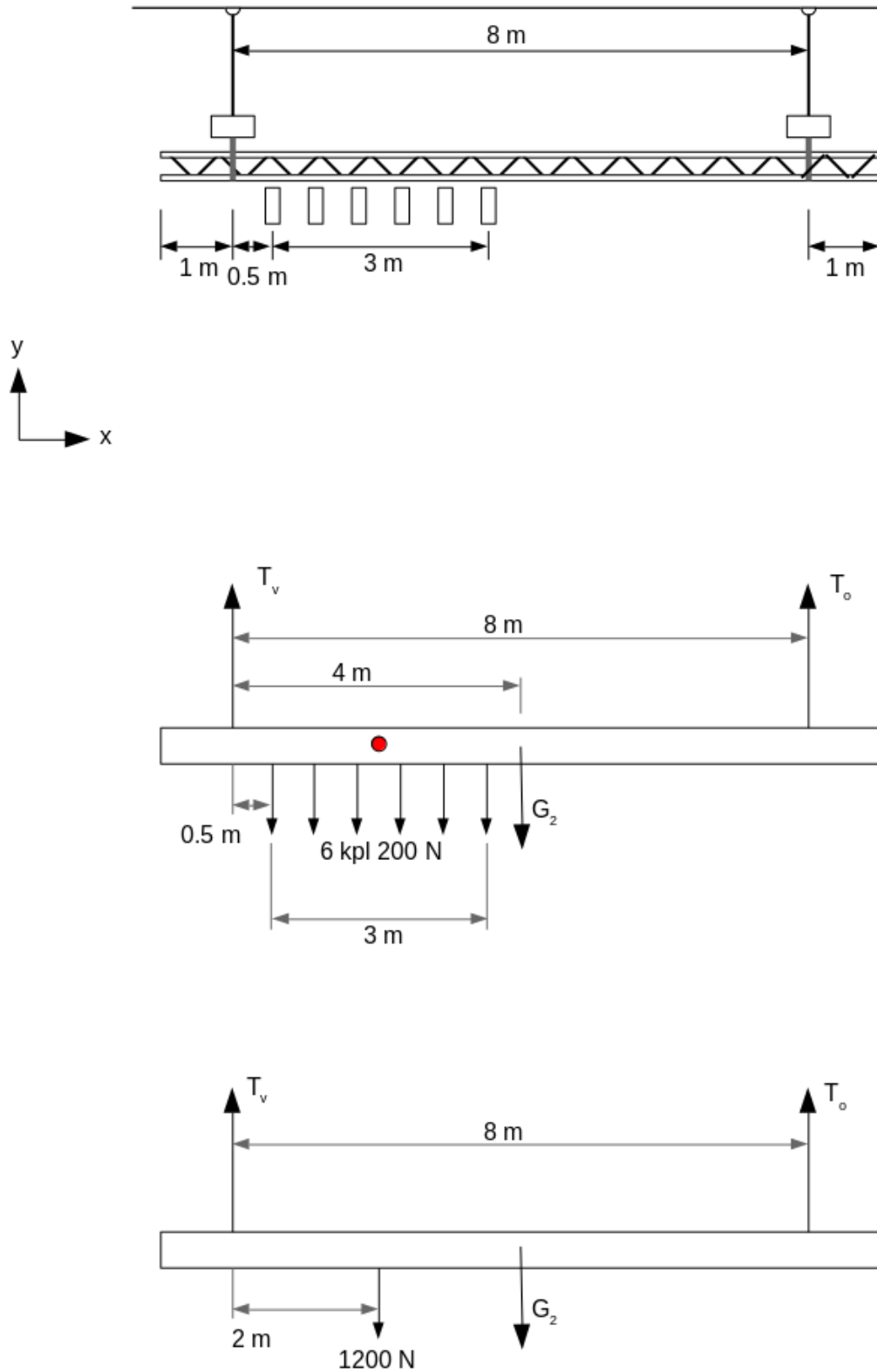
Seuraava askel on laskea katon ripustuspisteisiin kohdistuvat voimat. Koska voima on suoraan alaspäin, tämä on vastaava tilanne kuin luvussa 3.1 esitetty ripustus. Tässä voidaan siis hyödyntää edellä mainitussa luvussa saatuja tuloksia. Jos yhden nostimen, raksin ja sakkeliin paino on 350 N, on katon vasemmanpuoleiselle ripustuspisteelle välittyvä voima $2363 \text{ N} + 350 \text{ N} = 2713 \text{ N}$, eli pyöristettynä 2700 N. Katon oikeanpuoleiselle pisteelle kohdistuva voima on $1238 \text{ N} + 350 \text{ N} = 1588 \text{ N}$, pyöristettynä 1600 N.

3.3.4 Esimerkki 2

Kuusi valaisinta on ripustettu tasaisin 60 cm:n välein kuvan 10 yläosan mukaan. Trussin vapaakappalekuvan on kuvassa 10 keskellä.

Periaatteessa tässä voitaisiin edetä samoin kuin edellisessä esimerkissä: laskea tukireaktiot kaikille valaisimille sekä trussin omalle painolle erikseen, ja laskea nämä yhteen. Koska valaisimet on sijoitettu tasaisin välein, osoittautuu paljon helpommaksi korvata nämä yhdellä voimalla, joka kohdistuu näiden painopisteeseen. Valaisimet ovat sijoittuneet 3 metrin matkalle, joten keskikohta on $3 \text{ m} / 2 = 1,5 \text{ m}$ reunimmäisestä valaisimesta. Vasemmanpuoleisesta tukipisteestä mitattuna valaisinten painopiste on siis 2 m etäisyydellä. Tämä piste on merkitty kuvan 9 keskimmaisessä kuvassa punaisella pisteellä.

Yhden valaisimen paino on 200 N, joten painopisteeseen sijoitettavan voiman suuruus on $6 \cdot 200 \text{ N} = 1200 \text{ N}$. Tasaisesti sijoitettujen samanpainoisten valaisimien painot voidaan siis korvata niiden keskikohtaan sijoitetulla voimalla, joka on yksittäisten valaisimien painojen summa. Tämä on esitetty kuvassa 9 alhaalla. Tästä voidaan edetä samoin kuin edellisessä esimerkissä.



Kuva 10. Kuusi valaisinta ripustettuna trussista. Ylhäällä: kuva ripustuksesta. Keskellä: trussin vapaakappalekuva. Alhaalla: vapaakappalekuva, kun valaisinten kohdistamat voimat on korvattu painopisteeseen kohdistuvalla voimalla.

4 Pohdinta

Tässä työssä käsiteltiin statiikan soveltamista esitystekniikan ripustuksiin.

Työssä esiteltiin matematiikan ja statiikan keskeisiä käsitteitä ja esiteltiin niiden käyttöä esitystekniikassa tyypillisten ripustusten laskemisessa. Saatuja tuloksia myös verrattiin esitystekniikan kirjallisuudessa esitettyihin kaavoihin. Huomattiin, että statiikan periaatteita soveltamalla päädyttiin samoihin kaavoihin kuin mitä esitystekniikan alan kirjallisuudessa on yleisesti esitetty.

Opinnäytteessä sekä matematiikan että ripustustilanteiden käsittely on kuitenkin välttämättä rajoitettua. Mahdollisia jatkotutkimuksen kohteita olisivatkin käsittelyn laajentaminen koskemaan kolmiulotteisia rakenteita ja ripustuksia sekä monimutkaisempia staattisesti määrättyjä tilanteita. Mahdollinen jatkotutkimuksen aihe olisi myös dynaamisten kuormien ja liikkuvien rakenteiden käsittely, sillä useimpiin ripustuksiin kohdistuu dynaamisia voimia ainakin nostamisen ja laskeamisen aikana. Myös rakenteiden muodonmuutosten, kuten venymisen ja taipumisen käsittely olisi esitystekniikan näkökulmasta hyödyllistä, sillä tämänkaltaista analyysia edellyttäviä rakenteita käytetään esitystekniikassa usein.

Rakenteiden ja ripustusratkaisujen taustalla olevan fysiikan ja matematiikan ymmärtäminen mahdollistaa sellaiset monimutkaisen rakenteet, joiden suunnitteluun ei löydy valmiita kaavoja tai taulukoita kirjallisuudesta tai valmistajien dokumentaatiosta. Toisaalta yksinkertaisissakin ongelmissa statiikan perusteiden ja rakennelaskelmien ymmärtäminen antaa intuitiivista ymmärrystä rakenteiden toiminnasta ja voi näin auttaa näkemään potentiaalisia ongelmakohtia tai virheitä ja täten lisätä turvallisuutta. Rakenteiden fysikaalisten ja matemaattisten lainalaisuuksien, ja yleisemminkin insinööritieteiden opiskelu voi myös helpottaa esitystekniikan ammattilaisten työskentelyä ja kommunikointia insinöörien kanssa, joita usein tarvitaan avuksi monimutkaisia rakenteita suunniteltaessa.

Lähteet

Baker, Daniel W. & Haynes, William. Engineering Statics – Open and Interactive. <https://engineeringstatics.org/pdf/statics.pdf>. Luettu 8.4.2023.

Donovan, Harry. 2008. Entertainment rigging: A practical guide for riggers and managers. Revised 2008. Seattle, WA: Rigging Seminars.

Emri, Igor & Voloshin, Arkady. 2016. Statics. New York: Springer.

Glerum, Jay. O. 2007 Stage rigging handbook. 3. painos. Carbondale: Southern Illinois University Press.

Hall, Delbert L. 2013. Rigging math made simple. Johnson City, TN: Spring Knoll Press.

Hartsuijker, C. & Welleman, J. W. 2006. Engineering Mechanics. Dordrecht: Springer.

Higgs, Chris. 2008. An introduction to rigging in the entertainment industry. 2. painos. Cambridge: Entertainment Technology Press.

Inkinen, Pentti & Tuohi, Jukka. 2006. Momentti 1: Insinöörifysiikka. 11. painos. Helsinki: Otava.

Kärkkäinen, Markku & Mikkonen, Pasi. 2006. Insinöörin mekaniikka. Helsinki: WSOY.

Paulson, Rocky. 2015. Forces and Formulas. Sapsis, Bill (toim.): Entertainment rigging in the 21st century: Compilation of work on rigging practices, safety, and related topics. Burlington, MA: Focal Press.

Salmi, Tapio. 2001. Statiikka. 2. painos. Tampere: Pressus.

Seppänen, Raimo & Kervinen, Martti & Parkkila, Irma & Karkela, Lea & Meriläinen, Pekka. 2009. Maol taulukot. 7. painos. Helsinki: MAOL ry ja Otava.