



SAVONIA

■ OPINNÄYTETYÖ - AMMATTIKORKEAKOULUTUTKINTO
TEKNIIKAN JA LIIKENTEEN ALA

MASTOPILARIKEHÄN FEM-LASKENTA

TEKIJÄ: Jarmo Lampimäki

Koulutusala Tekniikan ja liikenteen ala	
Koulutusohjelma Rakennustekniikan koulutusohjelma	
Työn tekijä(t) Jarmo Lampimäki	
Työn nimi Mastopilarikehän FEM-laskenta	
Päiväys	25.4.2014
Sivumäärä/Liitteet	78/28
Ohjaaja(t) Rakennetekniikan yliopettaja, TkT Arto Puurula ja lehtori, DI Matti Mikkonen	
Toimeksiantaja/Yhteistyökumppani(t) Savonia ammattikorkeakoulu	
<p>Tiivistelmä</p> <p>Tämän insinööryön tavoitteena oli tutkia kehärakenteiden matemaattista mallintamista lineaarisella ja toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmällä, kun kuormituksesta aiheutuvat siirtymät ovat pieniä. Lisäksi tavoitteena oli laatia Savonia-ammattikorkeakoululle opetusmateriaali, jota voidaan hyödyntää rakenteiden mekaniikan opetuksessa. Erityisesti tämän työn päämääränä oli tehdä havainnolliset esimerkit mastopilarikehän solmupistemuuhtujen laskennasta.</p> <p>Superpositioperiaatetta soveltamalla mastopilarikehän FEM-laskentaa varten tehtiin Excel-taulukkolaskentapohja, jolla voidaan laskea sekä lineaarisen että toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmän mukaiset siirtymät, tukireaktiot ja elementtivoimat solmupisteissä. Siitä tehtiin mahdollisimman yleispätevä, jotta käyttäjä voi tarvittaessa muuttaa kuormitustapausta, elementtien geometriaa, materiaaliominaisuuksia tai niiden välisiä liitoskulmia. Erityisesti mielenkiinnonkohteena oli tutkia, kuinka nivelet mallinnetaan elementtimenetelmällä. Vertailulaskelmat tehtiin StruSoft Oy:n Frame Analysis 6.3 -kehäohjelmalla. Niiden avulla voitiin varmistua taulukkolaskentapohjan toimivuudesta.</p> <p>Excel-ohjelmalla lasketut tulokset vastaavat pääosin Frame Analysis -kehäohjelmalla laskettuja vertailuarvoja kolmen desimaalin tarkkuudella. Niistä havaitaan, että toisen kertaluvun voimasuureiden tutkiminen on tärkeä vaihe rakennesuunnittelussa rakenteiden geometriasta aiheutuvan epälineaarisuuden vuoksi. Epälineaarisen analyysin tarve korostuu, mitä hoikempia tai mitä raskaammin kuormitettuja rakenteita suunnitellaan.</p>	
Avainsanat Rakenteiden mekaniikka, elementtimenetelmä, mastopilarikehä, 2. kertaluvun teoria, siirtymä, vapausaste	

Field of Study Technology, Communication and Transport			
Degree Programme Degree Programme in Construction Engineering			
Author(s) Jarmo Lampimäki			
Title of Thesis FEM calculation of Beam-and-Column Structure			
Date	April 25, 2014	Pages/Appendices	78/28
Supervisor(s) Mr Arto Puurula, Principal Lecturer, PhD and Mr Matti Mikkonen, Lecturer, M.Sc.			
Client Organisation /Partners Savonia University of Applied Sciences			
<p>Abstract</p> <p>The aim of this bachelor's thesis was to study the linear and second order theory of finite element modeling of frame structures when assuming displacements are small. The aim was to include the necessary theory needed in FEM calculation of bar and beam systems in the two-dimensional case, because this material will be used as teaching material at Savonia University of Applied Sciences.</p> <p>Firstly, the FE method of frame structures was studied. Secondly, the theoretical part of this thesis was written. Thirdly, the presented theory was illustrated by a practical example of a beam-and-column structure which was calculated with the Excel spreadsheet program. The created spreadsheet was designed to calculate linear and second order deflections, support reactions and element forces at nodal points by applying the principle of superposition. Finally, the accuracy of the calculation results was checked by analyzing the same structure with the structural design software called Frame Analysis 6.3.</p> <p>As a result of this thesis, it was verified that the FEM calculation of the beam-and-column structure corresponds to the comparison calculation made with Frame Analysis 6.3. Furthermore, the second order analysis is an important step in structural design because of geometric non-linear behavior of structures. That is why non-linear displacements and stresses may differ significantly from results calculated in the linear method. Finally, the second order analysis is especially needed when planning slender structures.</p>			
<p>Keywords</p> <p>Structural mechanics, finite element method, finite element modeling, beam-and-column structure, second order analysis of structures, deflection, degree of freedom</p>			

Alkusanat

Esitän kiitokseni Savonia-ammattikorkeakoulun rakennetekniikan yliopettaja Arto Puurulalle mielenkiintoisesta insinööriyön aiheesta, työni ohjauksesta ja arvokkaista kommentteista, jotka vaikuttivat tämän työn rakenteeseen ja sisältöön. Erityisesti kiitän perhettäni ja ystäviäni tuesta ja kannustuksesta opintojeni aikana.

Kuopiossa 25.4.2014

Jarmo Lampimäki

SISÄLTÖ

1	JOHDANTO.....	7
1.1	Tausta ja tavoitteet.....	8
1.2	Elementtimenetelmän kehitysvaiheita.....	9
1.3	Käsitteet.....	10
1.4	Merkinnät.....	11
2	LINEAARISEN ELEMENTTIMENETELMÄN TEORIAA KEHÄRAKENTEILLE.....	12
2.1	Sauvan perusdifferentiaaliyhtälö	12
2.2	Sauvaelementin yhtälö	14
2.3	Palkin perusdifferentiaaliyhtälöt	16
2.4	Neljän vapausasteen palkkielementin yhtälö	20
2.5	Kuuden vapausasteen palkkielementin yhtälö	24
2.6	Vektorisuureiden muuntaminen globaaliin koordinaatistoon	25
2.7	Rakenteen matemaattinen malli.....	28
2.8	Tasapainotarkastelu	28
3	ESIMERKKI MASTOPILARIKEHÄN LINEAARISESTA FEM-LASKENNASTA	30
3.1	Laskentamallin esittely	31
3.2	Jäykkyysmatriisit.....	34
3.3	Siirtymävektorit	35
3.4	Solmupistevoimavektorit.....	36
3.5	Lukitusvoimavektorit	37
3.6	Mastopilarikehän lineaarisen FE-mallin muodostaminen	39
3.7	Siirtymien ja tukireaktioiden ratkaiseminen	41
3.8	Tasapainotarkastelu	42
3.9	Elementtivoimat.....	43
4	TOISEN KERTALUVUN ELEMENTTIMENETELMÄN TEORIAA KEHÄRAKENTEILLE.....	45
4.1	Toisen kertaluvun sauvaelementti	45
4.2	Palkkielementin puristustaivutus	47
4.3	Neljän vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti	51
4.4	Kuuden vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti	56

5	ESIMERKKI SAUVARAKENTTEEN TOISEN KERTALUVUN TEORIAN FEM-LASKENNASTA	57
5.1	Sauvarakenteen laskentamalli	57
5.2	Sauvarakenteen lineaarinen ratkaisu	58
5.3	Sauvarakenteen epälineaarinen ratkaisu	59
6	ESIMERKKI MASTOPILARIKEHÄN TOISEN KERTALUVUN TEORIAN FEM-LASKENNASTA	62
6.1	Epälineaariset jäykkyydsmatriisit	64
6.2	Epälineaariset lukitusvoimavektorit	66
6.3	Mastopilarikehän epälineaarisen FE-mallin muodostaminen ja ratkaiseminen	67
7	MASTOPILARIKEHÄN LASKENTATULOSTEN TARKASTELU	69
7.1	Rasitukset	70
7.2	Geometrisen epälineaarisuuden vaikutus laskentatuloksiin	73
8	YHTEENVETO	77
	LÄHTEET	78

LIITE 1: MASTOPILARIKEHÄN LINEAARISEN JA EPÄLINEAARISEN FE-MALLIN MUODOSTAMINEN

LIITE 2: MASTOPILARIKEHÄN VERTAILULASKELMAT FRAME ANALYSIS -KEHÄOHJELMALLA

1 JOHDANTO

Tietokoneiden laskentakapasiteetin kasvun vuoksi elementtimenetelmä on yleistynyt rakenteiden analysoimisessa. Vaikka nykyaikaisilla FEM-pohjaisilla tietokonesovelluksilla on helppoa ja nopeaa laskea rakenteita, niillä voidaan silti tehdä virheitä, jotka johtavat väärin mitoitustuloksiin. Lukuisista eduistaan huolimatta laskentaohjelmistojen yleistynyt käyttö saattaa johtaa rakenteiden todellisen toiminnan ymmärtämisen hämärtymiseen. Siksi rakenteiden suunnittelijalla täytyy olla valmiudet rakenneanalyysien ratkaisemiseen "käsilaskennalla" voidakseen arvioida asianmukaisen kriittisesti saatuja laskentatuloksia.

Elementtimenetelmässä tarkasteltava rakenne yksinkertaistetaan laskentamalliksi, joka muodostetaan toisiinsa solmupisteiden välityksellä liitetyistä osarakenteista eli elementeistä, kuten esimerkiksi sauvoista, palkeista tai tasoelementeistä. Rakenteen mekaniikan malli voidaan muodostaa kokonaan samantyyppisistä elementeistä tai yhdistelemällä niitä lukuisilla eri tavoilla. Toisiinsa kytketyt elementit muodostavat systeemin, jota kutsutaan elementtiverkoksi. Sen risteyskohtia sanotaan solmupisteiksi. Elementtien välinen liitos voi olla nivelellinen, kimmoinen tai jäykkä.

Elementtiverkko voidaan ajatella jousista rakentuvaksi järjestelmäksi, jossa solmupisteisiin vaikuttavat voimat riippumat muihin solmupisteisiin kohdistuvista voimista. Elementit toimivat kuin jouset, jotka kuormituksen vaikutuksesta muuttavat muotoaan seuraavaan tasapainotilaan asti. (Hietikko 2004, 149.) Suuren systeemin matemaattinen mallintaminen voi johtaa miljoonista tuntemattomista mekaniikan suureista muodostuvaan yhtälöryhmään. On siis selvää, että tietokoneen laskentakapasiteetin hyödyntämistä ja matriisiesityksen käyttämistä tarvitaan.

Linearisessa elementtimenetelmässä rakenneosan aksiaaliset siirtymät eivät vaikuta mitenkään taipumaan liittyviin siirtymiin. Siksi tarvitaan rakenteiden epälineaarisen kuormituskäyttäytymisen huomioivaa toisen kertaluvun teoriaan perustuvaa elementtimenetelmää. Rakenneosan siirtymä- ja voimasuureet voidaan ratkaista lineaarista menetelmää tarkemmin, kun huomioidaan puristuksen aiheuttama lisätaipuma. Toisen kertaluvun teoria on kuitenkin likimääräinen, koska tarkka kaarevuuden lauseke linearisoidaan. Mikäli kaarevuuden vaikutus halutaan huomioida, tulee käyttää tarkempia laskentamenetelmiä, kuten suurten siirtymien menetelmiä. Niitä ei kuitenkaan käsitellä tässä työssä.

1.1 Tausta ja tavoitteet

Tämän insinööriyön tausta-aineistona käytetään Sven Thelanderssonin kirjoittamaa *Konstruktionsberäkningar med dator* -nimistä teosta, joka julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1984. Siinä esitetty teoria ei ole vanhentunut. Päinvastoin, teos on yhä ajankohtainen selvitys, kuinka tietokone laskee elementtimenetelmän mukaisia rakenteita. Se on käytännönläheinen, tiivis johdanto lineaariseen ja toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmään.

Insinööriyö perustuu ensisijaisesti tausta-aineiston lukuihin 3 *Finita elementmetoden för plana fackverk och ramar* ja 6 *Geometrisk icke-linjäritet. Stabilitetsproblem*. Yhdenmukaisuuden vuoksi tässä työssä käytetyt symbolit vastaavat pääosin tausta-aineiston merkintöjä. Rakenteiden mekaniikkaa käsittelevän työn kannalta merkittävä pieniin siirtymiin perustuva siirtymämenetelmä esitellään Thelanderssonin teoksen luvussa 2. Vaihtoehtoisena ratkaisutapana voitaisiin käyttää voimamenetelmää, joka kuitenkin ohitetaan tässä yhteydessä.

Tarkoituksena on luoda lineaariseen ja toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmään pohjautuva Excel-laskentaohjelma soveltamalla tausta-aineiston teoriaa mastopilarikehän solmupistesuureiden ratkaisemiseksi. Laskentaohjelmasta tehdään mahdollisimman yleispätevä, jotta sitä voidaan helposti muuttaa vastaamaan annettuja lähtötietoja, joita ovat esimerkiksi elementtien pituudet, niiden väliset liitoskulmat, materiaaliominaisuudet sekä erilaiset kuormitustapaukset.

Tavoitteena on ymmärtää kuormitettujen kehärakenteiden toimintaa, niiden matemaattista mallintamista sekä toisen kertaluvun voimasuureiden vaikutusta mitoituksessa käytettäviin voimasuureisiin. Tämän insinööriyön tuloksena pyritään saamaan selkeä käsitys siitä, kuinka tietokonesovellukset laskevat elementtimenetelmän mukaisia ongelmia. Lisäksi tuotetaan kehärakenteiden elementtimenetelmää käsittelevää opetusmateriaalia, jossa tarvittavat kaavat selostetaan vaihe vaiheelta.

Työn konkreettisenä tuloksena tehdään Excel-taulukkolaskentaohjelma, jolla lasketaan teräsrakenteisen mastopilarikehän siirtymät ja rasitukset lineaarisella ja 2. kertaluvun teorian elementtimenetelmällä ja jonka avulla tarkastellaan puristustaivutuksen vaikutusta rasitukseen. Mastopilarikehän symmetriatason normaalin suuntainen kiepahdus- ja nurjahdustarkastelu sekä palomitoitustarkastelu sivuutetaan. Eurokoodin mukainen mitoitus jätetään käsittelemättä työn yhtenäisyyden ja laajuuden vuoksi. Tarkoitus on ennen kaikkea keskittyä kehärakenteiden mekaniikkaan liittyvien ongelmien ymmärtämiseen ja ratkaisemiseen.

1.2 Elementtimenetelmän kehitysvaiheita

Elementtimenetelmän teorian perusteet esitettiin 1940-luvulla. Sen kehittäjistä mainitaan Richard Courant ja Alexander Hrennikoff. Artikkelissaan vuonna 1943 Courant sovelsi Rayleigh-Ritzin menetelmää vääntösauvaan nykyään tunnetun elementtimenetelmän muodossa. Hän keksi jakaa sauvan poikkileikkauksen kolmion muotoisiin elementteihin ja valitsi tuntemattomiksi suureiksi elementtiverkon solmusuureet. Hrennikoff puolestaan yksinkertaisti jatkuvasta aineesta muodostuvaa rakennetta partikkelisysteemiin perustuvilla sauva- ja palkkirakenteilla. Hän tutki laattaongelmaa arinamallin avulla ja tarkensi tulostaan tihentämällä mallin palkkijakoa. Vasta tietokoneiden laskentakapasiteetin kehitys 1950-luvulla mahdollisti elementtimenetelmän kehityksen nykyiseen muotoonsa. R. Clough käytti ensimmäisenä nimitystä *Finite Element Method* vuonna 1960. (Salmi ja Kuula 2012, 319.)

Elementtimenetelmää kehitettiin aluksi erityisesti lentokoneiden lujuusanalyysiä varten. Sitä sovellettiin pian rakennus- ja konetekniikan ongelmien ratkaisemiseen. Tietokoneiden kehityksen vuoksi sen avulla voitiin ratkaista rakenteiden statiikkaan ja dynamiikkaan liittyviä ongelmia, joita ei aiemmin pystytty ratkaisemaan riittämättömän laskentakapasiteetin puuttumisen vuoksi. Menetelmän luonne ymmärrettiin täysin vasta 1960-luvun lopulla, ja sen yleispätevyyden ansiosta 1970-luvun loppuun mennessä eri alojen insinööreille oli tarjolla monia valmisohjelmistoja. Rakenteiden mekaniikan lisäksi sitä alettiin soveltaa esimerkiksi lämmön ja kosteuden siirron tarkasteluihin, virtausmekaniikkaan, kallio- ja maamekaniikkaan sekä murtumismekaniikkaan. Lisäksi sen huomattiin toimivan jopa akustiikan ja sähkötekniikan ongelmien ratkaisemisessa. (Salmi ja Kuula 2012, 319.)

Elementtimenetelmän matemaattiset perusteet selvitettiin 1970-luvulla, minkä seurauksena sitä voitiin soveltaa yhä laajemmin matemaattisten ongelmien tarkastelussa. Menetelmän pätevyysalueeseen, suppenemisominaisuuksiin ja tulosten tarkkuuden arviointiin saatiin matemaattiset perusteet. Nykyään eri alojen insinöörit soveltavat elementtimenetelmää jokapäiväisessä työssään. Tietokone-sovellusten kehityksestä huolimatta menetelmän teorian ymmärtäminen ja hallitseminen on merkittävä osa insinöörin ammattitaitoa. (Salmi ja Kuula 2012, 319.)

1.3 Käsitteet

Elementillä tarkoitetaan rakenteen yksittäistä rakenneosaa.

Elementtimenetelmä (Finite Element Method, FEM) on numeerinen menetelmä, jonka avulla rakenteiden siirtymät ja voimasuureet lasketaan solmupisteissä reunaehtojen perusteella.

Elementtiverkko on solmupisteiden välityksellä toisiinsa liitettyjen elementtien muodostama systeemi.

Kehä rakentuu vähintään kahdesta palkista, jotka liitetään toisiinsa. Tasokehän palkit sijaitsevat samassa tasossa, kun taas avaruuskehän palkit eivät.

Palkki on yksiulotteinen rakenneosaa, joka kestää vetoa, puristusta, taivutusta, leikkausta ja vääntöä.

Pilari on tavallisesti pystysuoraan rakennettu puristettu sauva tai palkki.

Sauva on yksiulotteinen rakenneosaa. Se kantaa joko veto- tai puristusrasituksen. Sen poikkileikkauksen rasitusta kutsutaan normaalivoimaksi.

Siirtymällä tarkoitetaan elementin tai niistä muodostuvan rakenteen solmupisteen vaaka- tai pystysuuntaista siirtymistä tai kiertymistä.

Sijoittelusummaus tarkoittaa matriisien laajentamista koko rakenteen vapausasteiden lukumäärää vastaaviksi, niiden alkioiden sijoittamista vapausasteiden mukaisille paikoille ja saadun summan laskemista. Vapausasteiden alaindeksien numerot voidaan ajatella koordinaateiksi, jotka määräävät matriisien alkioiden sijainnin laajennetussa matriisissa.

Solmupisteet ovat matemaattisen mallin liitospisteitä, joiden avulla elementit kytketään toisiinsa.

Superpositioperiaate tarkoittaa materiaalin lineaarisella alueella sovellettavaa yhteenlaskuperiaatetta, jonka mukaan siirtymien tai voimien yhteisvaikutuksen kuvaava staattinen suure voidaan laskea kaikkien siirtymä- tai voimakomponenttien aiheuttamien staattisten suureiden summana.

Tuenta merkitsee rakenteen jonkin pisteen yhden tai useamman vapausasteen nivelellistä, kimmoista tai täysin jäykkää sitomista. Rakenteen matemaattista mallia muodostettaessa puhutaan reunaehdoista. Täysin jäykkä tuenta estää pisteen liikkeen tai kiertymisen.

Vapausaste on rakenneosan tai rakenteen solmupisteen liike- tai kiertymismahdollisuus tasossa tai avaruudessa.

1.4 Merkinät

A	elementin poikkipinta-ala
b	elementin poikkipinta-alan leveys
c	$\cos \varphi$, elementin globaalin kiertokulman kosini $\cos(kL)$ epälineaarisessa elementtimenetelmässä
E	kimmokerroin
h	elementin poikkipinta-alan korkeus
I	elementin jäyhyysmomentti valitun akselin suhteen
k	elementin jousivakio EA/L lauseke $\sqrt{P/(EI)}$ toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässä lineaarisen tai epälineaarisen globaalin jäykkyyismatriisin alkiot $k_A \dots k_E$
L	elementin pituus, elementin solmupisteiden välinen etäisyys
M	taivutusmomentti
N	normaalivoima
P	elementtivoima globaalissa koordinaatistossa, elementtivoima yleensä, elementin puristus
P^o	lukitusvoima globaalissa koordinaatistossa, lukitusvoima yleensä
q	solmupisteiden välille jakautunut kuorma
Q	tukireaktio, tukivoima
r	siirtymä yleensä globaalissa koordinaatistossa
s	$\sin \varphi$, elementin globaalin kiertokulman sini $\sin(kL)$ epälineaarisessa elementtimenetelmässä
u	siirtymä globaalin koordinaatiston x -akselin suunnassa tai siirtymä yleensä
v	siirtymä globaalin koordinaatiston y -akselin suunnassa
V	leikkausvoima lineaarisessa elementtimenetelmässä
x	elementin pituuskoordinaatti
α	absoluuttikulma
Δ	fysikaalisen suureen muutos
ε	suhteellinen venymä
θ	absoluuttikulma, elementin globaalin kiertokulman muutos
Λ	kuormituskerroin
σ	normaalijännitys, taivutusjännitys
φ	elementin globaali kiertokulma
$[A]$	elementin siirtymä- ja voimasuureiden muuntomatriisi
$[K]$	rakenteen globaali jäykkyyismatriisi
$[K^e]$	elementin ekvivalentti globaali jäykkyyismatriisi
$[K^o]$	sauvaelementin toisen kertaluvun teorian huomioiva jäykkyyismatriisi
$[P]$	elementtivoimavektori globaalissa koordinaatistossa
$[r]$	globaalin koordinaatiston mukainen siirtymävektori
$[R]$	solmupistevoimavektori globaalissa koordinaatistossa
$[R^o]$	lukitusvoimavektori globaalissa koordinaatistossa

2 LINEAARISEN ELEMENTTIMENETELMÄN TEORIAA KEHÄRAKENTEILLE

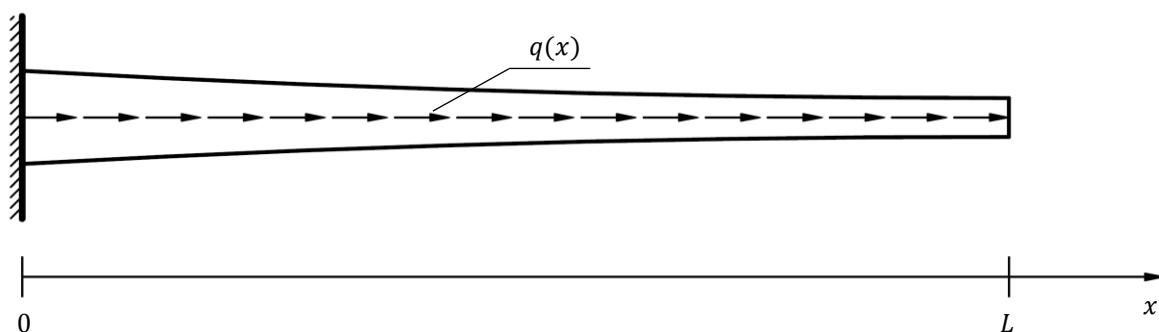
Tässä luvussa esitetty perustuu Sven Thelanderssonin *Konstruktionsberäkningar med dator*-teoksen 3. lukuun, jossa johdetaan elementtimenetelmän teoria kehä- ja ristikkorakenteille. Seuraavissa aliluissa perehdytään tausta-aineistossa esitettyyn teoriaan ja selostetaan yhtälöt, joihin kehärakenteiden elementtimenetelmä perustuu. Aihealuetta rajataan pienten siirtymien teorian mukaisen tasokehien elementtimenetelmään. Aliluvuissa 2.1 ja 2.3 johdetaan sauvan ja palkin perusdifferentiaaliyhtälöt, joiden avulla lopulta muodostetaan kuormitetun rakenteen käyttäytymistä kuvaava matemaattinen malli. Mallissa huomioidaan rakenteen elementtien jäykkyydet, solmupisteisiin ja niiden välille kohdistuvat ulkoiset kuormat sekä solmupisteiden siirtymät ja kiertymät. Materiaalin lineaarisuuteen pohjautuva rakenteen matemaattinen malli kirjoitetaan muotoon

$$[K][r] = [R] - [R^0]. \quad (1)$$

Yhtälön (1) vasen puoli kuvaa rakenteen jäykkyyden ja oikea puoli siihen kohdistuvat ulkoiset voimat. Matriisi $[K]$ ilmaisee rakenteen jäykkyyden. Globaali siirtymävektori $[r]$ kuvaa rakenteen solmupisteiden mahdolliset siirtymät ja kiertymät. Vektori $[R]$ sisältää solmupistevoimat, kun taas $[R^0]$ kuvaa solmupisteiden välille kohdistuvista voimista aiheutuvia lukitusvoimia. Niiden vastaluvut kuormittavat rakennetta samalla tavalla kuin solmupisteiden väliset voimat. Koska elementtimenetelmässä lasketaan tuntemattomat solmusuureet, elementin alueelle kohdistuva kuorma täytyy muuntaa solmupisteissä vaikuttaviksi pistemäisiksi voimakomponenteiksi ulkoista voimavaikutusta muuttamatta.

2.1 Sauvan perusdifferentiaaliyhtälö

Tarkastellaan kuvassa 1 esitettyä suoraa, kimmoista sauvaa. Sitä kuormitetaan pituusakselin suuntaisella, viivamaisella kuormalla $q(x)$. Aksiaalinen kuormitus ei aiheuta sauvan mihinkään poikkileikkaukseen taivutusmomenttia eikä leikkausvoimaa. Sauvan poikkipinta-ala muuttuu pituuskoordinaatin funktiona, joten sitä merkitään symbolilla $A(x)$.

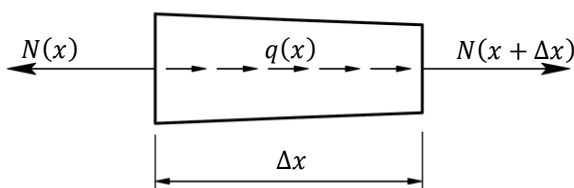


KUVA 1. Aksiaalisesti kuormitettu sauva (Lampimäki 2014-01-22)

Kiinnitetään nyt huomio sauvan kahteen pisteeseen. Ne sijaitsevat kuormittamattoman sauvan kohdissa x ja $x + \Delta x$. Ajatellaan, että x -akselin normaalin suuntaiset suorat leikkaavat niiden kohdalta

sauvasta hyvin pienen osan, jota nimitetään differentiaaliseksi alkioksi. Sen pituutta liioitellaan suuresti kuvassa 2. Kuormituksen vaikutuksesta sauva joko puristuu tai venyy, ja tarkasteltavien pisteiden siirtymiksi saadaan $u(x)$ ja $u(x + \Delta x)$. Vastaavasti differentiaalisen elementin normaalivoimia merkitään symboleilla $N(x)$ ja $N(x + \Delta x)$. Tarkasteltavien pisteiden siirtymäkomponenttien perusteella sen pituuden muutokseksi lasketaan $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$. Kun Δx lähestyy nollaa, sauvan venymäksi pisteessä x saadaan tulos (2). Sen mukaan sauvan venymä on aksiaalisen siirtymän derivaatta. Koska sauva muodostuu jatkuvasta aineesta, raja-arvo on aina olemassa. Näin ollen venymän funktion täytyy olla jatkuva välillä $0 \leq x \leq L$.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}. \quad (2)$$



KUVA 2. Sauvan differentiaalinen pala (Lampimäki 2014-01-22)

Sauvan jokaisen osan on oltava tasapainossa, kun kimmainen kappale on tasapainossa. Sauvan differentiaaliseen palaan kohdistuvien voimien summan on oltava siis nolla. Edelleen sen tasapainoehdoksi kirjoitetaan $-N(x) + q(x) \cdot \Delta x + N(x + \Delta x) = 0$. Voimien vaakasuuntainen tasapaino kuvaa täysin sauvan differentiaalisen elementin tasapainon, koska muun suuntaisia voimia tai momenttia ei kohdistu sauvaan tai sen mihinkään osaan. Differentiaalisen elementin tasapainoa kuvaavan yhtälön raja-arvotarkastelu antaa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x) + q(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q(x) = \frac{dN}{dx} + q(x) = 0. \quad (3)$$

Koska kuormitetun rakenteen tai rakenneosan oletetaan toimivan lineaarisesti, normaalijännitys σ_x on suoraan verrannollinen suhteelliseen venymään ε_x Hooken lain mukaisesti. Yleensä jännityksen ja venymän välinen yhteys esitetään kaavan (4) mukaisessa muodossa, jossa verrannollisuuskerroin E tarkoittaa materiaalin jäykkyysominaisuuksia kuvaavaa kimmokerrointa. Toisaalta keskimääräinen normaalijännitys voidaan laskea sauvaan kohdistuvan normaalivoiman ja sen poikkipinta-alan suhteen kaavan (5) mukaisesti. Edelleen kaavat (2), (4) ja (5) johtavat normaalivoiman muotoon (6).

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (4)$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (5)$$

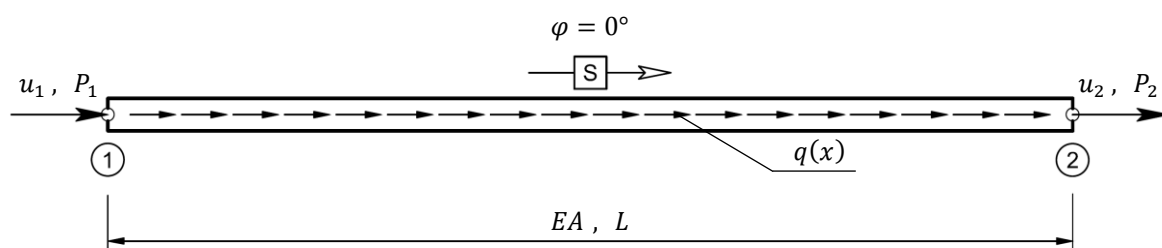
$$N = A\sigma_x = EA\varepsilon_x = EA \frac{du}{dx} \quad (6)$$

Aksiaalisesti kuormitetun sauvan perusdifferentiaaliyhtälö (7) saadaan, kun sauvan tasapainoehdon raja-arvotarkastelun tulokseen (3) sijoitetaan normaalivoiman suuruutta kuvaava yhtälö (6). Laskennan yksinkertaisuuden vuoksi elementtien aksiaaliset jäykkyydet kuitenkin oletetaan vakioksi, ja yhtälö (7) sievenee muotoon (8).

$$\frac{dN}{dx} + q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\left(EA \frac{du}{dx}\right)}{dx} + q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) + q(x) = 0 \quad (7)$$

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (8)$$

2.2 Sauvaelementin yhtälö



KUVA 3. Aksiaalisesti kuormitettu sauvaelementti \boxed{S} (Lampimäki 2014-01-22)

Tarkastellaan kuvassa 3 näkyvää sauvaelementtiä, joka asetetaan yhdensuuntaiseksi globaalin koordinaatiston x -akselin kanssa. Sen paikallisten päätepisteiden numerot 1 ja 2 on ympyröity. Kun numerolla 1 merkitty pää valitaan alkupisteeksi, sauvan suunta on määritelty. Nyt sen kiertokulmaksi voidaan merkitä $\varphi = 0^\circ$. Mahdollisen kierron ajatellaan tapahtuvan sauvan alkupisteen suhteen. Jos esimerkiksi sauvan päätepisteiden paikat valittaisiin toisinpäin, kiertokulmaksi voitaisiin merkitä $\varphi = 180^\circ$, jos kierto tapahtuu positiiviseen suuntaan eli vastapäivään. Valitsemalla kierto vastapäivään positiiviseksi ja kierto myötäpäivään negatiiviseksi (taulukko 1) vältetään sekaannuksilta elementin asennosta ja suunnasta. On syytä korostaa, että kiertokulman suuruudella ja suunnalla on ratkaiseva merkitys laskennassa saatuihin siirtymä- ja voimasuureiden lukuarvoihin. Sama pätee myös voimakomponentteihin, joiden positiiviset suunnat käyvät ilmi taulukosta 2.

TAULUKKO 1. Globaalin kiertokulman merkkisääntö

Kiertosuunta		Kiertokulman suuruus
vastapäivään	↺	$\varphi \geq 0^\circ$
myötäpäivään	↻	$\varphi < 0^\circ$

TAULUKKO 2. Solmusuureiden positiiviset globaalisuunnat

Solmusuure		
siirtymä oikealle	voima oikealle	→
siirtymä ylös	voima ylös	↑
kiertymä vastapäivään	momentti vastapäivään	↺

Nyt kun merkkisopimukset on määritelty yksiselitteisesti, tutkitaan tarkemmin kuvan 3 sauvaelementtiä. Sitä kuormitetaan pituusakselin suuntaisella, tasaisesti jakautuneella viivakuormalla $q(x)$, jonka vaikutussuora yhtyy sauvan poikkileikkauksen painopisteakseliin. Sauvan aksiaalista jäykkyyttä kuvaava normaalijäykkyys EA valitaan vakioksi. Vaakasuuntaisen kuormituksen vuoksi elementillä on kaksi vapausastetta u_1 ja u_2 . Sen tuentatapa antaa reunaehdoiksi $u_1 = u(0)$ ja $u_2 = u(L)$. Erityisesti haetaan ratkaisua tapaukseen, jossa elementtivoimat ovat $P_1 = -N(0)$ ja $P_2 = N(L)$. Jotta yhtä suuret ja yhdensuuntaiset voimat olisivat keskenään tasapainossa, elementtivoimien täytyy olla vielä vastakkaissuuntaiset eli $-P_1 = P_2$.

Sovelletaan superpositioperiaatetta jakamalla ongelma kahteen osatapaukseen. Ensin tutkitaan osatapaus, jossa tasaisesti jakautunut viivakuorma on $q(x) = 0$. Sijoitetaan sen arvo sauvan perusdifferentsiaaliryhtälön muotoon (8), koska normaalijäykkyys valittiin aiemmin vakioksi. Tämän jälkeen tarkastellaan toinen osatapaus, jossa elementtiä kuormittaa tasaisesti jakautunut kuorma $q(x) \neq 0$. Superpositioperiaatteen mukaan osatapauksen voimat ja siirtymät voidaan summata niiden yhteisvaikutuksen laskemiseksi, kun jännitykset eivät ylitä sauvan materiaalin suhteellisuusrajaa.

Ensimmäisestä osatapauksesta saadaan sauvan siirtymäfunktion $u(x)$ yleinen muoto (9), jonka integraalivakiot C_1 ja C_2 ratkaistaan tehtävänannon yhteydessä ilmoitettujen reunaehtojen $u_1 = u(0)$ ja $u_2 = u(L)$ perusteella. Siirtymäfunktion ratkaisu (10) saadaan sijoittamalla yleiseen muotoon (9) ratkaistujen integraalivakioiden arvot.

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad EA \frac{d^2u}{dx^2} + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \int 0 \, dx = C_1$$

$$u(x) = \int C_1 \, dx = C_1x + C_2 \quad (9)$$

$$u_1 = u(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = u_1$$

$$u_2 = u(L) = C_1L + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{u_2 - C_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$u(x) = C_1x + C_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1 = \frac{1}{L}[(u_2 - u_1)x + u_1L] = \frac{1}{L}[u_1(L - x) + u_2x] \quad (10)$$

Kun sauvan pituuden muutokseksi määritellään $\Delta L = u_2 - u_1$, yhtälön (6) perusteella sauvan elementtivoimaa $N(x)$ kuvaavaksi yleiseksi yhtälöksi saadaan johdettua yhtälö (11). Pituuden muutoksen määritelmästä seuraa suoraan statiikassa sovittu merkkisääntö: vetoa pidetään positiivisena ja puristusta negatiivisena rasituksena. Nyt elementtivoimat P_1 ja P_2 voidaan ratkaista, kun huomioidaan, että sauvan tasapainoehtojen perusteella elementtivoimat ovat itseisarvoiltaan yhtä suuret, yhdensuuntaiset mutta vastakkaissuuntaiset. Sauvan elementtivoimia kuvaavat yhtälöt (12) ja (13) voidaan yhdistää matriisiyhtälöksi (14), joka edelleen voidaan esittää lyhyemmin kaavalla (15).

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} = EA \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) \quad (11)$$

$$P_1 = -N(0) = \frac{EA}{L} (u_1 - u_2) \quad (12)$$

$$P_2 = N(L) = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[P] = [K^e][u] \quad (15)$$

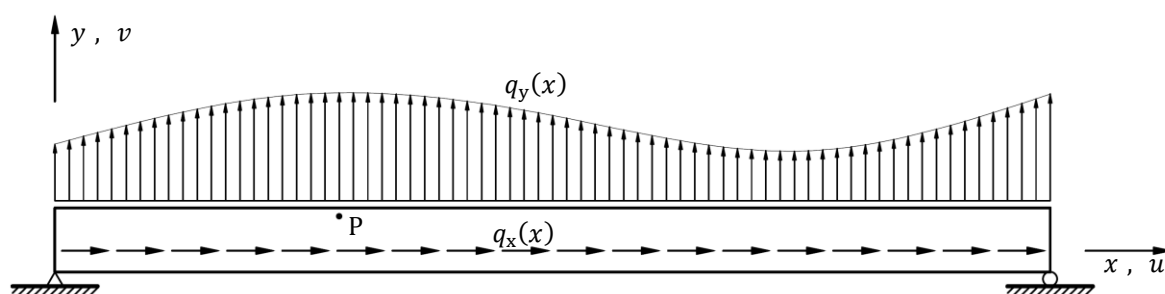
Tarkastellaan nyt osatapausta, jossa sauvaa kuormitetaan tasaisesti jakautuneella viivakuormalla $q(x) \neq 0$. Tasaisesti jakautunut kuorma voidaan korvata lukitusvoimilla, jotka vaikuttavat sauvan päissä. Sauva ikään kuin lukitaan paikalleen, ja ratkaisu tähän tapaukseen saadaan siten, että superpositioperiaatteen mukaisesti yhtälöön (14) summataan lukkovoimia kuvaava voimavektori. Näin saadaan sauvaelementin yhtälö (16), jossa huomioidaan sauvan jäykkyys, siirtymät, solmupisteisiin ja niiden välille kohdistuvat ulkoiset voimat. Se esitetään kaavalla (17), joka saataisiin rakenteen matemaattista mallia $[K][r] = [R] - [R^o]$ vastaavaan muotoon siirtämällä lukitusvoimavektori samalle puolelle kuin solmupistevoimavektori.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[P] = [K^e][u] + [P^o] \quad (17)$$

2.3 Palkin perusdifferentiaaliyhtälöt

Tekninen palkkiteoria rakentuu kolmen oletuksen varaan. Ensimmäkin siirtymien ja kiertymien oletetaan olevan pieniä. Toiseksi materiaalin jännityksen ja venymän välinen yhteys noudattaa Hooke'n lakia (yhteys (4)). Kolmanneksi leikkausvoiman aiheuttama palkin poikkileikkauksen kiertyminen on merkityksetön, minkä vuoksi Bernoullin hypoteesin oletetaan olevan voimassa. Kuormituksen kasvaessa palkin poikkileikkaus säilyy siis palkin pituussäikeiden normaalin suuntaisena tasona.



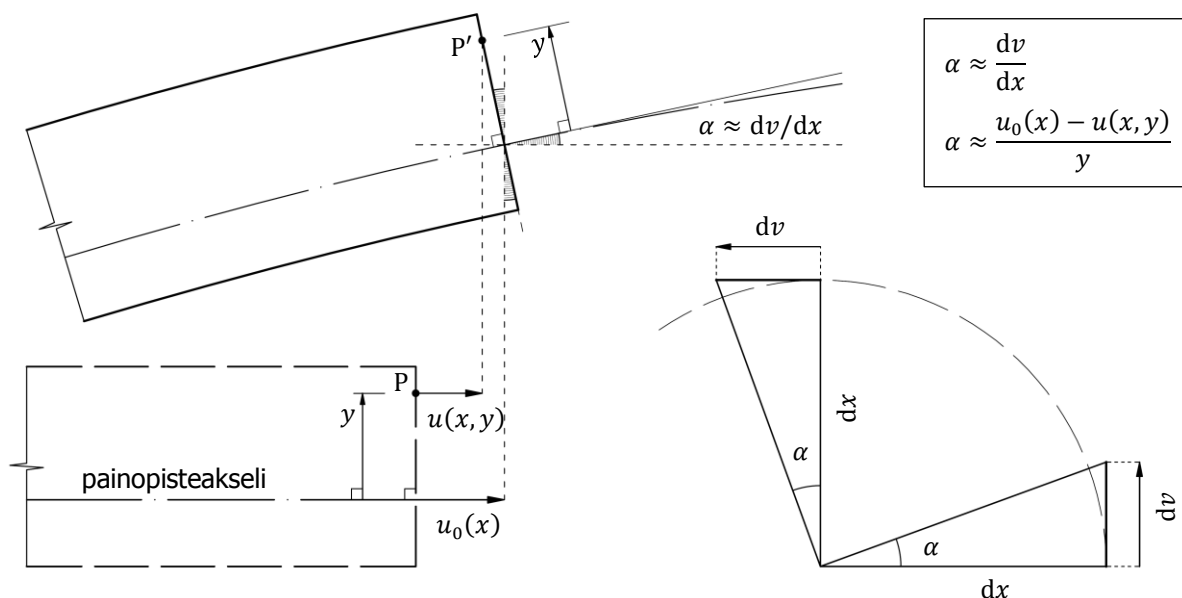
KUVA 4. Kuormitettu palkki (Lampimäki 2014-01-22)

Tarkastellaan kuvan 4 suoraa, kimmoista palkkia, jonka poikkileikkaus on symmetrinen. Palkkia kuormitetaan symmetriatasossa jakaantuneella kuormalla, jonka komponentit ovat $q_x(x)$ x -akselin suunnassa ja $q_y(x)$ y -akselin suunnassa. Kuormittamattoman, suoran palkin painopisteakseli valitaan koordinaatiston x -akseliksi. Materiaalipiste P tunnustetaan koordinaattien (x, y) perusteella. Sen siirtymää mitataan suhteellisesti tähän asemaan nähden, kun otetaan käyttöön seuraavat siirtymä-funktiot:

1. $u(x, y)$ kuvaa materiaalipisteen P siirtymän x -akselin suunnassa.
2. $u_0(x) = u_0(x, 0)$ ilmoittaa palkkiakselilla sijaitsevan pisteen siirtymän x -suunnassa.
3. $v(x)$ ilmoittaa palkkiakselilla olevan pisteen siirtymän y -akselin suunnassa.

Määritetään materiaalipisteen $P(x, y)$ siirtymä vain x -akselin suunnassa, koska y -akselin suuntainen siirtymä on merkityksetön silloin, kun siirtymät ovat pieniä. Kuvasta 5 nähdään, että palkki taipuu globaalin koordinaatiston positiiviseen y -suuntaan. Palkin poikkileikkaus kiertyy positiiviseen suuntaan kulman $\alpha \ll 1$ verran. Loivan siirtymäkentän vuoksi palkin poikkileikkauksen kiertymä on hyvin pieni, ja absoluuttikulman arvoksi oletetaan $\alpha \approx dv/dx$. Toisin sanoen palkin poikkileikkauksen kiertymä oletetaan taipuman derivaatan $v'(x)$ suuruiseksi.

Kuormitus aiheuttaa palkkiin deformatiiviseen tilaan eli palkin alkuperäinen muoto vääristyy. Sen seurauksena materiaalipisteen P alkuperäinen asema siirtyy pisteeseen P'. Kuvan 5 avulla sen x -akselin suuntaiseksi siirtymäksi approksimoidaan yhteys (18). Saman kuvan perusteella havaitaan, että materiaalipisteen P' kautta kulkevan palkin pituussuuntaisen taipuneen kuidun venymä saadaan derivoimalla funktio $u(x, y)$. Tutkitaan siis funktion $u(x, y)$ muutosnopeutta. Lasketaan sen derivaatta, ja kirjoitetaan tulokseksi yhteys (19).



KUVA 5. Palkin poikkileikkauksen kiertyminen jatkuvasta kuormituksesta (Lampimäki 2014-01-22)

$$\alpha \approx \frac{u_0(x) - u(x, y)}{y} \quad \Leftrightarrow \quad u(x, y) = u_0(x) - \alpha y = u_0(x) - y \frac{dv}{dx} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \approx \varepsilon_x \approx \varepsilon_x(x, y) = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (19)$$

Koska palkin materiaalin oletetaan käyttäytyvän Hooken lain mukaisesti (materiaalilaki (4)) ja koska mahdollinen y -akselin suunnan jännitys $\sigma_y(x)$ vaikuttaa x -suunnan jännitykseen $\sigma_x(x)$ merkityksettömän vähän, palkin normaalijännityksen lausekkeeksi voidaan kirjoittaa yhteys (20), joka saadaan sijoittamalla venymän ε_x arvoksi lauseke (19).

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad (20)$$

Palkin poikkileikkauksen kokonaisvoimavaikutus määritetään jännitysten resultanttien $N = N(x)$ ja $M = M(x)$ avulla. Normaalivoimaa pidetään positiivisena, kun poikkileikkauksen pintaan kohdistuu vetorasitus, kuten aliluvussa 2.2 todettiin. Taivutusmomentti lasketaan positiiviseksi, kun palkin alapuoleen kohdistuu vetorasitus. Näin ollen positiivinen taivutusmomentti kupertaa palkin alapuolen.

Palkin poikkileikkauspinnan painopisteakselissa pätee $y = 0$, minkä vuoksi yhtälö (21) on voimassa. Lujuusopin mukaan palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti I valitun akselin suhteen lasketaan kaavasta (22). Edelleen on itsestään selvää, että palkin poikkipinta-ala on yhtä suuri kuin sen pinta-alkioiden summa, ja yhteys (23) on tosi. Normaalivoimalle pätee kaava (24), joka vastaa muodoltaan sauvalle johdettua tulosta (6). Taivutusmomentille puolestaan pätee kaava (25). Normaalivoiman kaava saadaan suoraan integroimalla normaalijännitykselle johdettu yhteys (20), kun taas taivutusmomentin lauseke saadaan yhtälöiden (20) - (23) perusteella. Kuvista 4 ja 5 havaitaan, että palkin yläpinta kupertuu alapinnan sijaan, minkä vuoksi jännityksen σ_x eteen lisätään miinusmerkki. Tulosta (25) kutsutaan kimmoviivan linearisoiduksi differentiaaliyhtälöksi.

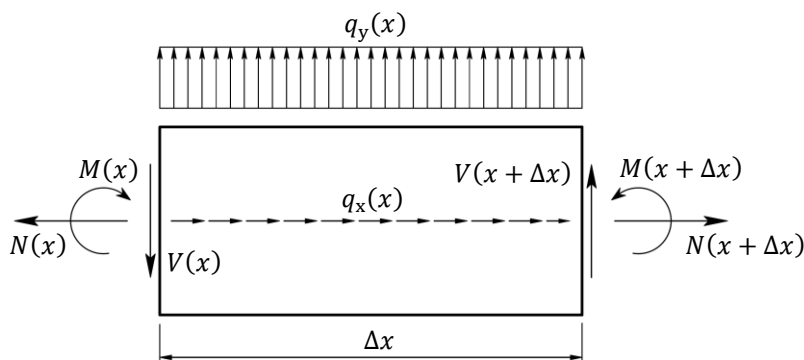
$$\int_A y \, dA = 0 \quad (21)$$

$$I = \int_A y^2 \, dA \quad (22)$$

$$\int_A dA = A \quad (23)$$

$$N = N(x) = \int_A \sigma_x \, dA = \int_A E \varepsilon_x \, dA = E \left(\frac{du_0}{dx} \int_A dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y \, dA \right) = EA \frac{du_0}{dx} \quad (24)$$

$$M = M(x) = \int_A -\sigma_x y \, dA = -E \left(\frac{d}{dx} u_0 \int_A y \, dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 \, dA \right) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (25)$$



KUVA 6. Kuormitetun palkin differentiaalinen alkio (Lampimäki 2014-01-22)

Tarkastellaan kuvan 6 vääristymättömän palkin differentiaalisen elementin tasapainoehdot, kun poikkileikkauksen kiertymä $\alpha \approx dv/dx$ ja normaalivoima $N(x)$ oletetaan suhteellisen pieniksi. Tasotapauksessa differentiaalisella palalla voi olla kolme vapausastetta, minkä vuoksi voimakomponenttien pitää olla tasapainossa vaaka- ja pystysuunnassa. Edelleen differentiaalipalan keskipisteen suhteen laskettujen momenttien summan täytyy olla nolla, jotta tasapainotila olisi mahdollinen. Tasapainoyhtälöiden raja-arvotarkastelut antavat tulokset (26) - (28). Voimakomponenttien positiiviset suunnat vastaavat taulukossa 2 esitettyjä suuntia.

$$\rightarrow \quad -N(x) + q_x(x) \cdot \Delta x + N(x + \Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x) + q_x(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q_x(x) = \frac{dN}{dx} + q_x(x) = 0 \quad (26)$$

$$\uparrow \quad -V(x) + q_y(x) \cdot \Delta x + V(x + \Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x) + q_y(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} + q_y(x) = \frac{dV}{dx} + q_y(x) = 0 \quad (27)$$

$$\curvearrowright \quad -M(x) + V(x) \cdot \frac{\Delta x}{2} + V(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{2} + M(x + \Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} + V(x) = \frac{dM}{dx} + V(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = -\frac{dM}{dx} \quad (28)$$

Sijoitetaan yhtälöön (26) normaalivoiman arvo (24), ja palkille saadaan normaalivoiman vaikutuksen kuvaava yhtälö (29), joka vastaa sauvan perusedifferentiaaliyhtälöä (7). Merkinnät eroavat hieman toisistaan, mutta kyse on samasta asiasta.

$$\frac{dN}{dx} + q_x(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du_0}{dx} \right) + q_x(x) = 0 \quad (29)$$

Momenttitasapainoyhtälön raja-arvotarkastelun (28) perusteella todetaan, että leikkausvoiman itseisarvo on taivutusmomentin derivaatta valitun koordinaatiston positiivisista suunnista riippumatta, kun toisen potenssin termi jätetään merkityksettömänä huomioimatta. Sijoittamalla pystysuuntaisten voimien tasapainoehdon raja-arvotarkasteluun (27) momenttitasapainoehdon raja-arvotarkastelun approksimoitu tulos (28) havaitaan, että taivutusmomentin toinen derivaatta palkin pituuskoordinaatin x suhteen on pystysuuntaisen kuormituksen suuruinen. Saatu tulos esitetään muodossa (30).

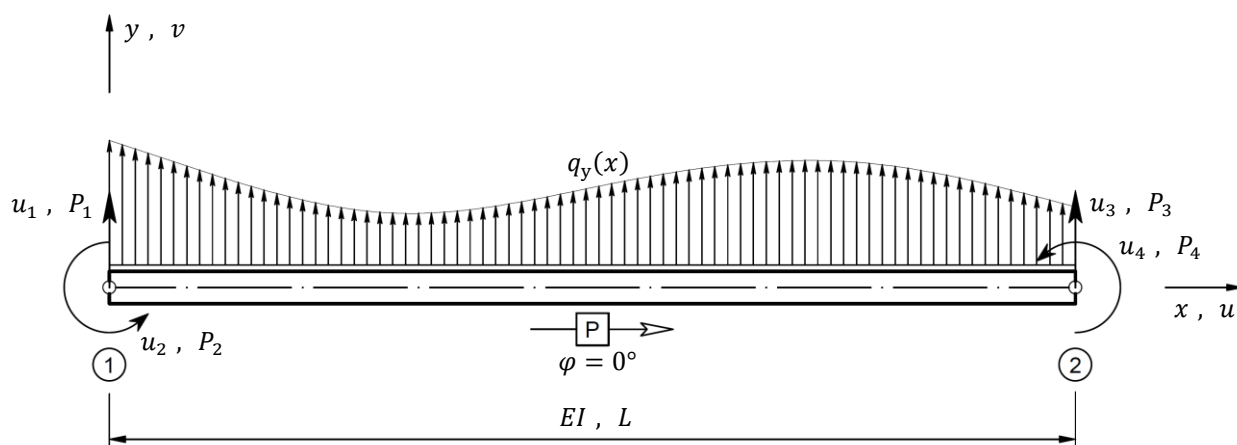
$$\frac{dV}{dx} + q_y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(-\frac{dM}{dx} \right) + q_y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) - q_y(x) = 0 \quad (30)$$

Tasopalkin perusdifferentiaaliyhtälöt saadaan siis kahdesta erillisestä yhtälöstä. Yhtälö (29) kuvaa aksiaalisen kuormituksen vaikutuksen, kun taas yhtälö (30) huomioi taipuman vaikutuksen. Tässä yhteydessä erillisyyks merkitsee sitä, että puristuksesta ja taivutuksesta aiheutuvia muodonmuutoksia ei ole kytketty toisiinsa. Ensimmäisen kertaluvun teoriassa palkin aksiaaliset siirtymät eivät vaikuta mitenkään taipumaan liittyviin siirtymiin. Yhtälöt (29) ja (30) mallintavat rakenteen tai sen osan kuormituskäyttäytymistä riittävän tarkasti, kun siirtymät ovat pieniä. Jos normaali- ja taivutusjäykkyys (EA ja EI) oletetaan vakioiksi, palkin perusdifferentiaaliyhtälöt voidaan sieventää muotoihin (31) ja (32).

$$EA \frac{d^2u_0}{dx^2} + q_x(x) = 0 \quad (31)$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} - q_y(x) = 0 \quad (32)$$

2.4 Neljän vapausasteen palkkielementin yhtälö



KUVA 7. Neljän vapausasteen palkkielementti [P] (Lampimäki 2014-01-22)

Johdetaan siirtymien u_1, u_2, u_3 ja u_4 sekä elementtivoimien P_1, P_2, P_3 ja P_4 välinen yhteys tarkastelemalla palkkielementtiä, jolla on neljä vapausastetta kuvan 7 mukaisesti. Sillä on kaksi pystysuuntaista siirtymävapausastetta ja kaksi kiertymävapausastetta. Sen globaali kierto kulma olkoon $\varphi = 0^\circ$.

Elementtiä kuormitetaan mielivaltaisesti jakautuneella pystysuuntaisella kuormalla $q_y(x)$. Sen poikkipinta-ala A ja taivutusjäykkyys EI oletetaan vakioiksi.

Kaikki siirtymät liittyvät palkin taipumaan, joten reunaehdoiksi kirjoitetaan seuraavat: $u_1 = v(0)$, $u_2 = v'(0)$, $u_3 = v(L)$ ja $u_4 = v'(L)$. Kuten kuvasta 7 näkyy, palkkia puristavaa voimaa ei nyt tarkastella. Tarkoituksena on tutkia palkin taipumista ja sen poikkileikkauksen kiertymistä. Ongelma voidaan jakaa kahteen osatapaukseen soveltamalla superpositioperiaatetta, kuten sauvaelementin yhtälön (16) johtamisessa tehtiin. Tutkitaan aluksi osatapaus, jossa $q_y(x) = 0$. Koska taivutusjäykkyys on vakio eikä siis x :n funktio, palkin taipumaa kuvaa yhtälö (32) sievenee. Sen ratkaisuksi saadaan tulos (33), joka on taipumafunktion yleinen muoto.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q_y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad EI \frac{d^4 v}{dx^4} - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = \int 0 \, dx = C_1$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dv}{dx} = v'(x) = \int C_1 x + C_2 \, dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$v(x) = \int C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \, dx = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (33)$$

Taipumafunktion yleisen ratkaisun (33) derivaatta $v'(x)$ kuvaa palkin poikkileikkauksen kiertymistä niin kuin aliluvussa 2.3 ja erityisesti kuvassa 5 esitetään. Kaikkien siirtymäfunktioiden u_1, u_2, u_3 ja u_4 yleiset ratkaisut saadaan reunaehtojen perusteella, kun muuttujalle x annetaan palkin päätepisteiden x -koordinaattien arvot alla esitetyllä tavalla. Siirtymäfunktioiden yleiset ratkaisut yhdistetään matriisiyhtälöön (34).

$$u_1 = v(0) = C_1 \frac{0^3}{6} + C_2 \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = C_4 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = C_4$$

$$u_2 = v'(0) = C_1 \frac{0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3 = C_3 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = C_3$$

$$u_3 = v(L) = C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4$$

$$u_4 = v'(L) = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 \quad \Leftrightarrow \quad u_4 = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(L) \\ v'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3/6 & L^2/2 & L & 1 \\ L^2/2 & L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Integraalivakiot $C_3 = u_2$ ja $C_4 = u_1$ ratkaistiin suoraan sijoittamalla siirtymäfunktioiden lausekkeisiin muuttujan arvo $x = 0$. Vakiot C_1 ja C_2 sen sijaan ratkaistaan muodostamalla yhtälöpari funktioista $u_3 = v(L)$ ja $u_4 = v'(L)$. Jälkimmäinen kerrotaan luvulla $-L/2$, minkä jälkeen lasketaan yhtälöiden summa puolittain. Ratkaisuna saadaan C_1 ja C_2 . Ratkaistut integraalivakiot kootaan matriisimuotoon (35).

$$\begin{cases} u_3 = C_1 L^3/6 + C_2 L^2/2 + u_2 L + u_1 \\ u_4 = C_1 L^2/2 + C_2 L + u_2 \end{cases}$$

$$u_3 - u_4 \frac{L}{2} = -C_1 \frac{L^3}{12} + u_2 \frac{L}{2} + u_1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{12}{L^3} u_1 + \frac{6}{L^2} u_2 - \frac{12}{L^3} u_3 + \frac{6}{L^2} u_4$$

$$u_3 = \left(\frac{12}{L^3} u_1 + \frac{6}{L^2} u_2 - \frac{12}{L^3} u_3 + \frac{6}{L^2} u_4 \right) \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + u_2 L + u_1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -\frac{6}{L^2} u_1 - \frac{4}{L} u_2 + \frac{6}{L^2} u_3 - \frac{2}{L} u_4$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Palkkielementtiin kohdistuva taivutusmomentti lasketaan kaavasta (36) sijoittamalla yhtälöön (25) taipumafunktion $v(x)$ toisen derivaatan arvo, joka ratkaistiin edellisellä sivulla. Lisäksi yhtälöstä (25) saadaan leikkausvoiman suuruus (37), kun huomioidaan yhteys (28). On syytä korostaa lujuusopissa esitettyä yhteyttä leikkausvoiman ja taivutusmomentin välillä: Leikkausvoiman itseisarvo on taivutusmomentin derivaatta.

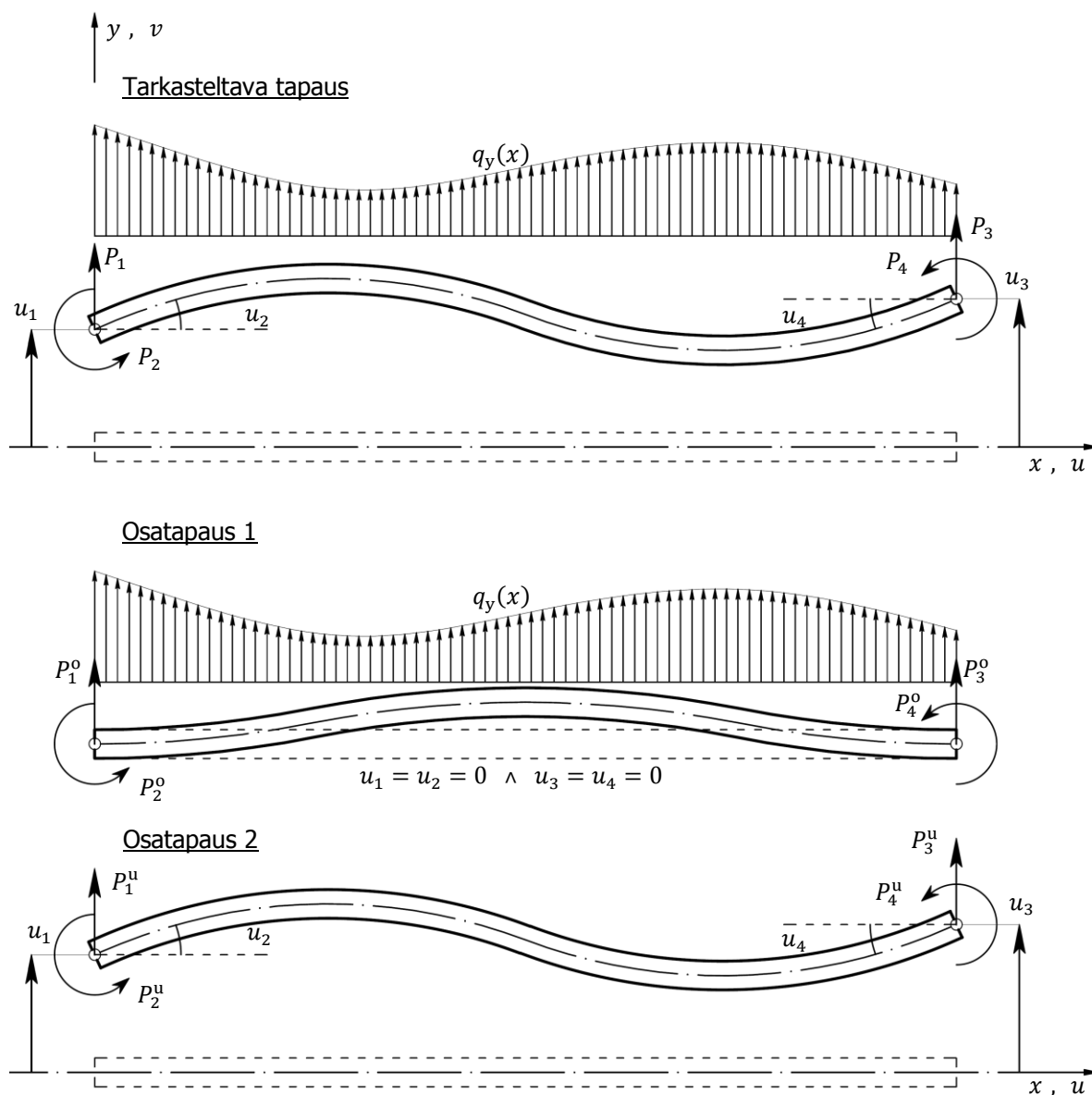
$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = EI(C_1 x + C_2) = EI \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = -\frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 v}{dx^3} = EIC_1 = EI \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Nyt ratkaistaan ensimmäisen osatapauksen mukainen neljän vapausasteen palkin elementtivoimat, kun kuormitus $q_y(x) = 0$. Tuloksiin (36) ja (37) sijoitetaan pituuskoordinaatin x arvot, jotka vastaavat palkkielementin alkua- ja loppupistettä eli $x = 0$ ja $x = L$. Lisäksi integraalivakioiden arvoiksi annetaan yhteyden (35) mukaiset arvot. Sievennyksen jälkeen saadaan ensimmäisen osatapauksen mukaiset elementtivoimat (38), jotka edelleen voidaan esittää tiiviimmin kaavalla (15).

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

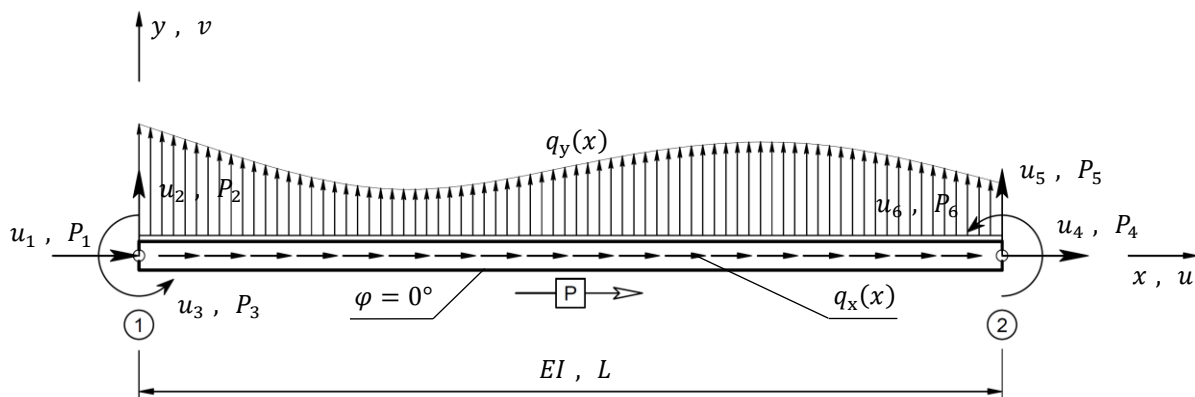


KUVA 8. Palkin kuormituskäyttäytymisen osatapaukset (Lampimäki 2014-01-22)

Seuraavaksi tarkastellaan osatapausta, jossa elementtiä kuormitetaan mielivaltaisesti pystysuuntaisella jakautuneella kuormalla. Soveltamalla superpositioperiaatetta ongelma voidaan edelleen jakaa kahteen osatapaukseen niin kuin kuvassa 8 esitetään. Ensimmäisessä osatapauksessa tarkastellaan tapausta, jossa otetaan huomioon kuorman $q_y(x)$ vaikutus ja jossa vapausasteet u_1, u_2, u_3 ja u_4 ovat lukitut. Toisessa osatapauksessa huomioidaan siirtymien vaikutus. Neljän vapausasteen palkkielementin elementtivoimiksi saadaan siis kaavaa (17) vastaava muoto $[P] = [K^e][u] + [P^o]$ eli

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

2.5 Kuuden vapausasteen palkkielementin yhtälö



KUVA 9. Palkkielementti $[P]$, jolla on kuusi siirtymävapausastetta (Lampimäki 2014-01-22)

Tämän insinööriyön johdannossa esitettiin, että lineaarisessa elementtimenetelmässä puristus ei lisää palkin taipumaa. Sanotaan, että sauva- ja palkkivaikutusta ei ole yhdistetty, minkä vuoksi kuuden vapausasteen palkin elementtiyhtälöt yhdistetään matriisiyhtälöksi (40), joka muodostetaan yhdistämällä sauvaelementin yhtälö (16) ja neljän vapausasteen palkkielementin yhtälö (39). Molemmat laajennetaan kuuden vapausasteen mukaiseksi, minkä jälkeen niiden summa voidaan laskea. Nyt on muodostettu yhteys ulkoisten voimien ja siirtymien välille. Yhtälö (40) huomioi tasossa sijaitsevaan elementtiin kohdistuvat rasitukset puristuksesta, vedosta, leikkauksesta ja taivutuksesta.

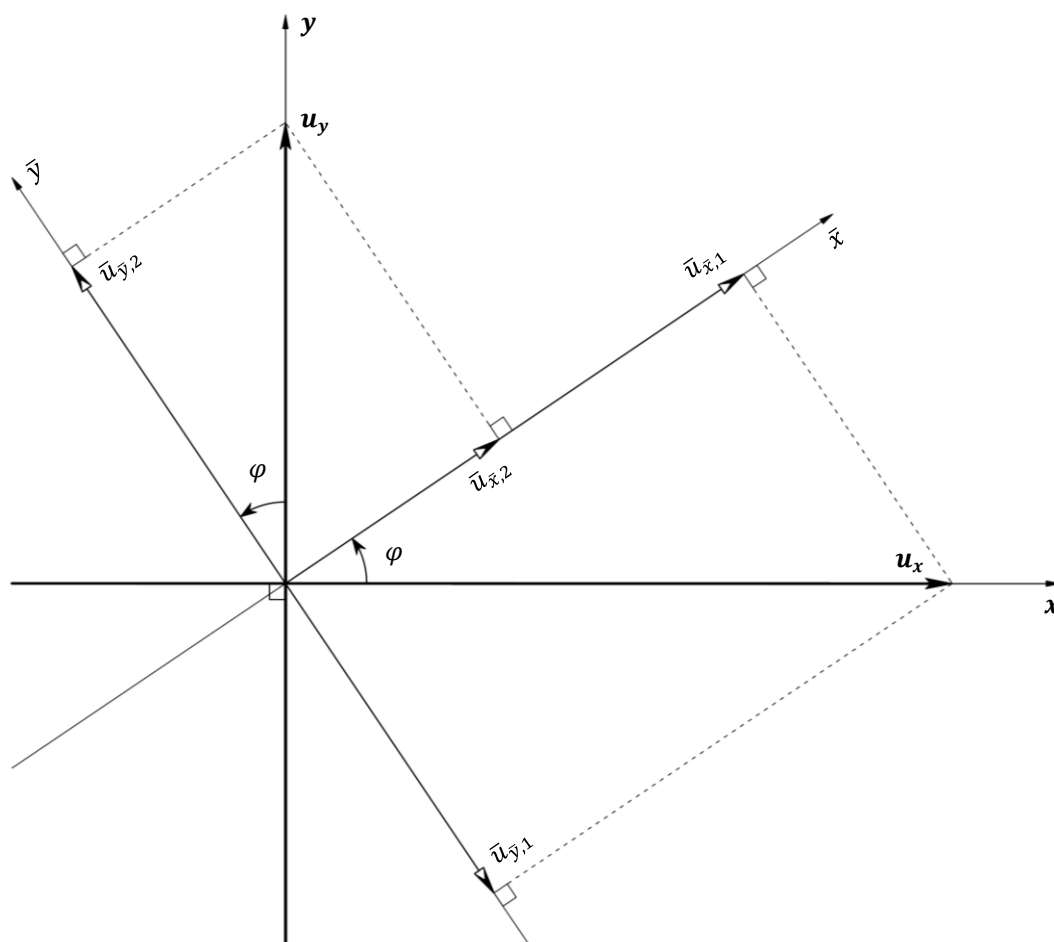
Yhtälö (40) on johdettu tutkimalla sauvaa ja palkkia tapauksissa, joissa globaaliksi kiertokulmaksi määritettiin $\varphi = 0^\circ$. Tällöin paikallisen ja globaalin koordinaatiston akselit yhtyvät. Tämä merkitsee sitä, että elementtiyhtälö (40) viittaa paikalliseen koordinaatistoon, jossa \bar{x} -akseli vastaa elementin painopisteakselia. Jotta saadaan muodostettua yksittäisen elementin matemaattinen malli, yhtälö (40) on muunnettava globaaliin koordinaatistoon. Lisäksi todetaan, että ekvivalentti jäykkymatriisi $[K^e]$ on symmetrinen neliömatriisi, koska sen rivit ja sarakkeet vastaavat toisiaan. Näin ollen on voimassa $[K^e] = [K^e]^T$.

$$[P] = [K^e][u] + [P^0]$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \\ P_5^0 \\ P_6^0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

2.6 Vektorisuureiden muuntaminen globaaliin koordinaatistoon

Solmuseureiden muuntaminen koordinaatistosta toiseen on tärkeä vaihe kehärakenteiden FEM-laskennassa. Voimat ja siirtymät täytyy muuntaa globaalin koordinaatiston mukaisiksi, kun tarkastellaan rakennetta kokonaisuutena ja jotta erilliset elementit voidaan kytkeä matemaattisesti yhteen. Yksitaisen elementin tarkastelussa sen sijaan tarvitaan lokaalia eli paikallista koordinaatistoa. Määritetään siis voimien ja siirtymien välinen yhteys eri koordinaatistoissa. Yksiselitteisyyden vuoksi paikallisen koordinaatiston vektorikomponentit kirjoitetaan lisäämällä vaakaviiva niitä kuvaavien symbolien päälle.



KUVA 10. Siirtymäkomponenttien projektiot paikalliseen koordinaatistoon (Lampimäki 2014-04-08)

Pisteen A siirtymä paikkaan A' voidaan käsittää vektoriksi, jonka komponentit ovat \bar{u}_1 ja \bar{u}_2 paikallisessa koordinaatistossa ja u_1 ja u_2 globaalissa koordinaatistossa. Johdetaan vektorikomponenttien välinen yhteys eri koordinaatistojen välillä. Projisoidaan globaalin koordinaatiston vektorikomponentit paikallisen koordinaatiston akselleille, jotka ovat kiertyneen kulman φ verran positiiviseen suuntaan kuvassa 10 näytetyllä tavalla. Koska kaikki kuvaan muodostuneet kolmiot ovat suorakulmaisia, trigonometriset funktiot $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$ voidaan muodostaa suorakulmaisen kolmion trigonometrian periaatteiden mukaisesti. Niiden avulla lasketaan paikallisen koordinaattiakselien suuntaisten siirtymäkomponenttien summat $\bar{u}_{\bar{x},1} + \bar{u}_{\bar{x},2}$ ja $\bar{u}_{\bar{y},1} + \bar{u}_{\bar{y},2}$. Näin päädytään elementin translaatiosiirtymät kuvaaviin tuloksiin (41) ja (42).

$$\cos \varphi = \frac{\bar{u}_{\bar{x},1}}{u_x} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_{\bar{x},1} = \cos \varphi \cdot u_x$$

$$\sin \varphi = \frac{\bar{u}_{\bar{x},2}}{u_y} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_{\bar{x},2} = \sin \varphi \cdot u_y$$

$$\sum_{i=1}^2 \bar{u}_{\bar{x},i} = \bar{u}_{\bar{x},1} + \bar{u}_{\bar{x},2} = \cos \varphi \cdot u_x + \sin \varphi \cdot u_y$$

$$\sin \varphi = \frac{-\bar{u}_{\bar{y},1}}{u_x} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_{\bar{y},1} = -\sin \varphi \cdot u_x$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{u}_{\bar{y},2}}{u_y} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_{\bar{y},2} = \cos \varphi \cdot u_y$$

$$\sum_{j=1}^2 \bar{u}_{\bar{y},j} = \bar{u}_{\bar{y},1} + \bar{u}_{\bar{y},2} = -\sin \varphi \cdot u_x + \cos \varphi \cdot u_y$$

$$\begin{bmatrix} \sum \bar{u}_{\bar{x},i} \\ \sum \bar{u}_{\bar{y},j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{\bar{x},1} + \bar{u}_{\bar{x},2} \\ \bar{u}_{\bar{y},1} + \bar{u}_{\bar{y},2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Yleistetään tulokset (41) ja (42) paikallisille siirtymä- ja voimakomponenteille. Merkitään elementin solmusuureiden muuntomatriisia symbolilla $[A]$. Elementin siirtymiksi paikallisessa koordinaatiossa saadaan yhtälö (43), joka lasketaan kaavan (44) mukaisesti. Koska voimakomponentit ovat vektoreita siirtymäkomponenttien lailla, elementtivoimat $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_6$ saadaan yhtälöistä (45) ja (46). Tutkimalla vektoreiden muuntomatriisia $[A]$ huomataan, että koordinaatiston kierto ei vaikuta mitenkään kiertymä- tai momenttikomponentteihin. Niiden arvo säilyy samana missä tahansa koordinaatistossa. Näin ollen kirjoitetaan tärkeät tulokset $\bar{u}_3 = u_3$, $\bar{u}_6 = u_6$, $\bar{P}_3 = P_3$ ja $\bar{P}_6 = P_6$.

$$[\bar{u}] = [A][u] \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi u_1 + \sin \varphi u_2 \\ -\sin \varphi u_1 + \cos \varphi u_2 \\ u_3 \\ \cos \varphi u_4 + \sin \varphi u_5 \\ -\sin \varphi u_4 + \cos \varphi u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$[\bar{P}] = [A][P] \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi P_1 + \sin \varphi P_2 \\ -\sin \varphi P_1 + \cos \varphi P_2 \\ P_3 \\ \cos \varphi P_4 + \sin \varphi P_5 \\ -\sin \varphi P_4 + \cos \varphi P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Muuntomatriisi $[A]$ on ortogonaalinen eli $[A]^{-1} = [A]^T$, koska pätee $[A]^T[A] = [A][A]^T = [I]$. Matriisin $[I]$ pääälävistäjän alkiot saavat arvon 1, minkä vuoksi sitä sanotaan ykkösmatriisiksi. Aliluvun alussa sovitun symbolien kirjoitussäännön nojalla elementtiyhtälö (40) esitetään yleisessä muodossaan $[\bar{P}] = [\bar{K}^e][\bar{u}] + [\bar{P}^o]$, ja kaavojen (43) ja (45) perusteella se sievenee aiemmin esitettyyn matriisi- muotoon (17). Lisäksi saadaan laskennan kannalta hyödyllinen tulos (47). Sen avulla paikallisen koordinaatiston mukainen elementin jäykkyydsmatriisi saadaan muutettua globaalin koordinaatistoon.

Lukijan on syytä huomata, että matriisitulo ei ole vaihdannainen. Siksi tulosta (47) ei voi sieventää kertomalla muuntomatriisi ja sen transponoitu muoto ykkösmatriisiksi. Sen sijaan tulo $[A]^T[\bar{K}^e][A]$ voidaan laskea vaiheittain, ja saadaan laskennassa käyttökelpoinen globaali jäykkyydsmatriisi (48). Muunnos paikallisesta globaaliin koordinaatistoon ei vaikuta matriisin symmetrisyyteen, kuten kaavoja (40) ja (48) vertaamalla havaitaan. Tilan säästämiseksi otetaan käyttöön taulukon 3 vaihtoehtoiset symbolit. Merkitään trigonometrisia funktioita kirjaimilla c ja s , kun taas kaavan (40) mukaisille jäykkyydsmatriisin alkioille valitaan symbolit $k_A \dots k_E$. Lukijaa kehoitetaan laskemaan harjoituksena tulo $[A]^T[\bar{K}^e][A]$ ja varmistumaan kaavan (48) oikeellisuudesta.

$$[\bar{P}] = [\bar{K}^e][\bar{u}] + [\bar{P}^o] \quad \Leftrightarrow \quad [A][P] = [\bar{K}^e][A][u] + [A][P^o]$$

$$[A]^T[A][P] = [A]^T[\bar{K}^e][A][u] + [A]^T[A][P^o]$$

$$[P] = [A]^T[\bar{K}^e][A][u] + [P^o] = [K^e][u] + [P^o]$$

$$[K^e] = [A]^T[\bar{K}^e][A] \quad (47)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} c^2 k_A + s^2 k_B & cs(k_A - k_B) & -sk_C & -c^2 k_A - s^2 k_B & cs(k_B - k_A) & -sk_C \\ cs(k_A - k_B) & s^2 k_A + c^2 k_B & ck_C & cs(k_B - k_A) & -s^2 k_A - c^2 k_B & ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_D & sk_C & -ck_C & k_E \\ -c^2 k_A - s^2 k_B & cs(k_B - k_A) & sk_C & c^2 k_A + s^2 k_B & cs(k_A - k_B) & sk_C \\ cs(k_B - k_A) & -s^2 k_A - c^2 k_B & -ck_C & cs(k_A - k_B) & s^2 k_A + c^2 k_B & -ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_E & sk_C & -ck_C & k_D \end{bmatrix} \quad (48)$$

TAULUKKO 3. Merkintöjen vaihtoehtoiset symbolit

Trigonometriset funktiot		Jäykkyydsmatriisin alkiot				
$c = \cos \varphi$	$s = \sin \varphi$	$k_A = \frac{EA}{L}$	$k_B = \frac{12EI}{L^3}$	$k_C = \frac{6EI}{L^2}$	$k_D = \frac{4EI}{L}$	$k_E = \frac{2EI}{L}$

2.7 Rakenteen matemaattinen malli

Rakenteen matemaattinen malli $[K][r] = [R] - [R^0]$ muodostetaan soveltamalla superpositioperiaatetta, mikä tarkoittaa yksittäisten elementtien matemaattisten mallien summan laskemista. Puhutaan sijoittelusummauksesta. Ajatellaan, että rakenteen vapausasteet ovat kuin koordinaatteja, joiden avulla matriisien alkiot sijoitetaan oikeille paikoilleen summan laskemista varten. Esimerkiksi koko rakenteen jäykkyyttä kuvaava matriisi $[K]$ muodostetaan siten, että yksittäisen elementin jäykkyyssmatriisin alkiot sijoitetaan vapausasteiden mukaisille paikoille. Samalla periaatteella muodostetaan ulkoisia voimia kuvaavat vektorit. Rakenteen matemaattinen malli voidaan näin ollen esittää muodossa (49), jossa alaindeksi n ilmoittaa vapausasteiden lukumäärän. Edelleen havaitaan, että jäykkyyssmatriisi on neliömatriisi. Ellei näin olisi, sille ei voitaisi laskea siirtymien ratkaisemisessa tarvittavaa käänteismatriisia.

$$[K][r] = [R] - [R^0]$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ \vdots \\ R_n^0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Rakenteen matemaattinen malli muodostuu epähomogeenisesta yhtälöryhmästä, koska ulkoiset kuormat ovat nolasta eroavia eli $[R - R^0] \neq 0$. Lisäksi on voimassa $\det[K] \neq 0$, minkä vuoksi kuormitetun rakenteen siirtymävektorille on aina olemassa yksiselitteinen ratkaisu tilanteessa, jossa yhtälöiden ja tuntemattomien suureiden lukumäärä on yhtä suuri.

Siirtymät ratkaistaan rakenteen matemaattisesta mallista $[K][r] = [R] - [R^0]$ matriisialgebran laskusääntöjen mukaisesti kaavalla (50). Seuraavaksi ratkaistaan tukireaktiot. Rakenteen kannalta ne ovat ulkoisia voimia, minkä vuoksi ne ratkaistaan solmupistevoimavektorista $[R]$. Rakenteen jäykkyyssmatriisin käänteismatriisi $[K]^{-1}$ voidaan ratkaista esimerkiksi Gaussin eliminointimenetelmällä tai taulukkolaskentaohjelmalla.

$$[r] = [K]^{-1}[R - R^0] \quad (50)$$

2.8 Tasapainotarkastelu

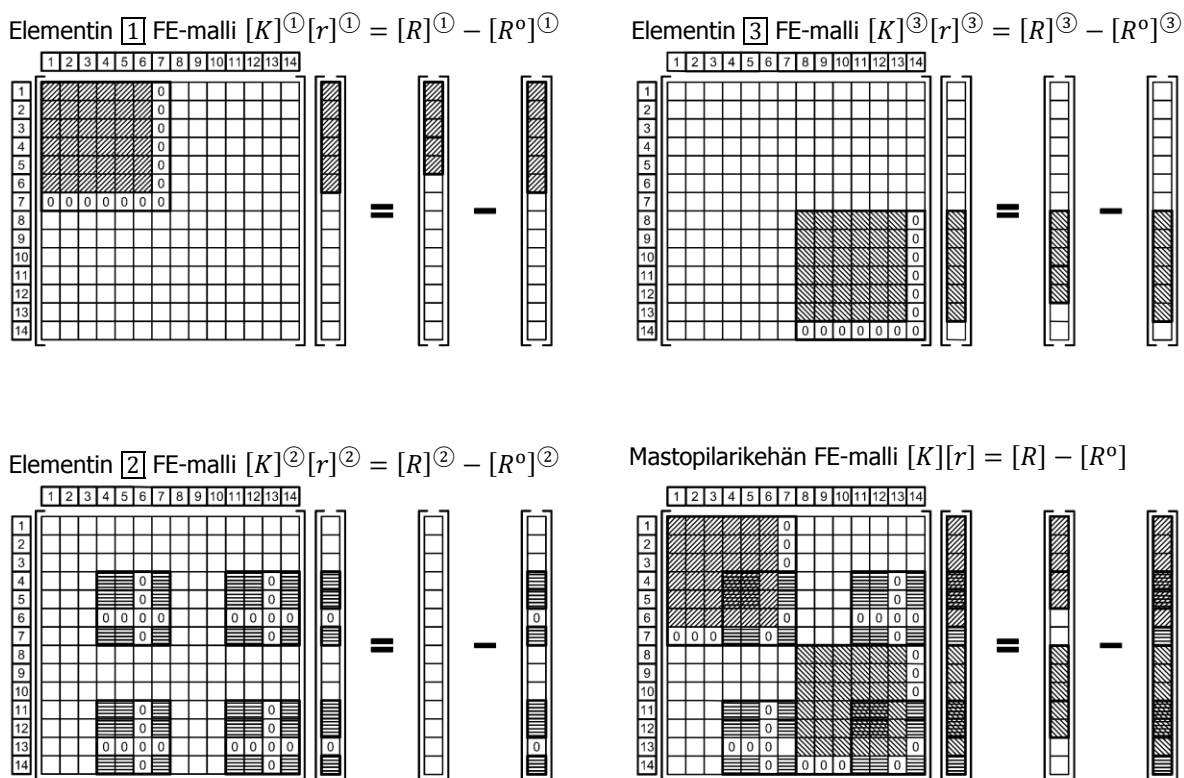
Laskentatulosten oikeellisuus arvioidaan tasapainoehtojen toteutumisen perusteella. Rakenteeseen kohdistuvien vaaka- ja pystyvoimien summan on oltava nolla, ja lisäksi momenttien summan minkä tahansa pisteen suhteen on oltava nolla (taulukko 4). Jos tasapainoehdot toteutuvat, siirtymät ja tukireaktiot on ratkaistu oikein, ja laskentaa voidaan jatkaa selvittämällä kunkin elementin paikallisen koordinaatiston mukaiset elementtivoimat kaavalla $[\bar{P}] = [\bar{K}^e][\bar{u}] + [\bar{P}^0]$. Solmupisteiden väliset rasitukset ratkaistaan statiikan periaatteiden mukaisesti.

TAULUKKO 4. Rakenteen tai sen osan tasapainoehdot

Vaakasuunnalle	Pystysuunnalle	Momenttien summalle
$\sum_{i=1}^n F_{x,i} = 0$	$\sum_{j=1}^n F_{y,j} = 0$	$\sum_{k=1}^n M_{o,k} = 0$

3 ESIMERKKI MASTOPILARIKEHÄN LINEAARISESTA FEM-LASKENNASTA

Tässä luvussa sovelletaan edellisessä luvussa esitettyä kehärakenteiden elementtimenetelmän teoriaa ja lasketaan mastopilarikehän siirtymät, tukireaktiot ja elementtivoimat pienten siirtymien teoriaan pohjautuvalla lineaarisella elementtimenetelmällä. Siinä laskentavaiheet etenevät systemaattisesti. Ensin lasketaan elementtien globaalit jäykkyyismatriisit. Ne laajennetaan vapausasteiden mukaisiksi, minkä jälkeen niiden summa voidaan laskea. Summan laskutapaa kutsutaan sijoittelusummaukseksi. Menetelmässä globaalisten vapausasteiden alaindeksien numerot ajatellaan koordinaateiksi, jotka määräävät matriisien alkioden sijainnin laajennetussa matriisissa.



KUVA 11. Lineaarisen FE-mallin $[K][r] = [R] - [R^0]$ muodostaminen (Lampimäki 2014-04-23)

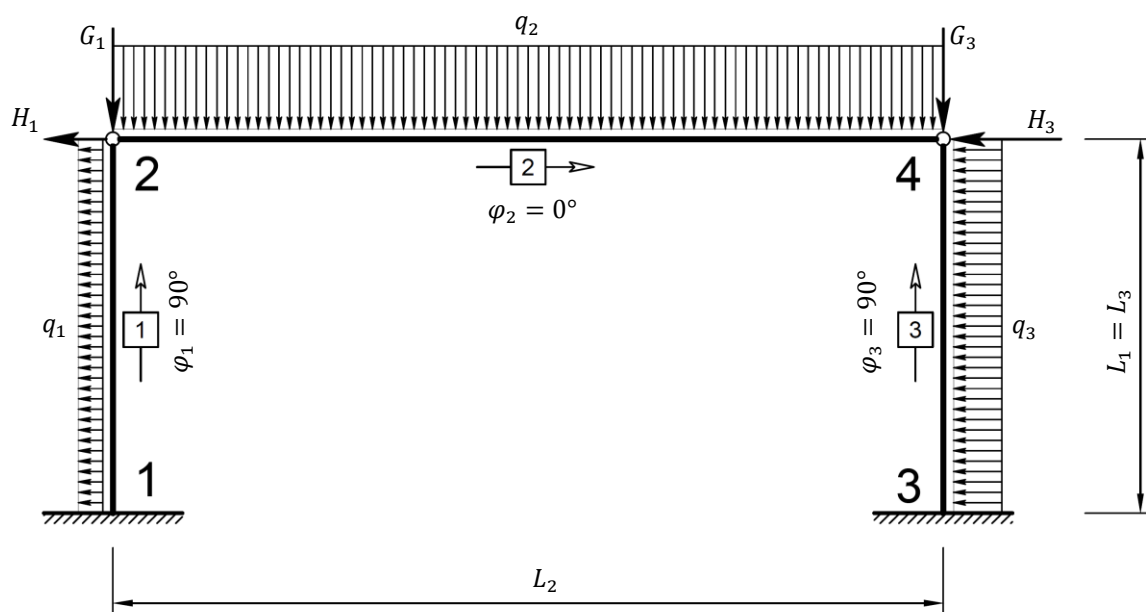
Kuva 11 havainnollistaa, kuinka yksittäisten elementtien FE-mallit yhdistetään koko kehärakenteen FE-malliksi. Ympyröidyt yläindeksit ilmaisevat elementin numeron lisäksi sen, että matriisi on jo laajennettu sijoittelusummausta varten. Kuvasta nähdään, että kehärakenteen FE-malli muodostetaan neljästä yhtälöstä, jotka saadaan sijoittelusummaamalla. Jäykkyyismatriisi saadaan summasta $[K]^{(1)} + [K]^{(2)} + [K]^{(3)} = [K]$. Vastaavasti siirtymiä ja kiertymiä kuvaava vektori saadaan sijoittelusummasta $[r]^{(1)} + [r]^{(2)} + [r]^{(3)} = [r]$. Samalla periaatteella voimavektorit esitetään sijoittelusummina $[R]^{(1)} + [R]^{(2)} + [R]^{(3)} = [R]$ ja $[R^0]^{(1)} + [R^0]^{(2)} + [R^0]^{(3)} = [R^0]$. Solmupistevoimavektori $[R]$ muodostuu osittain tuntemattomista muuttujista. Tunnetun kuormitustapauksen lisäksi se kuvaa toistaiseksi tuntemattomat tukireaktiokomponentit. Lukitusvoimavektoriin $[R^0]$ sijoitetaan elementtien alueelle, toisin sanoen solmupisteiden välille kohdistuvat kuormat, jotka muutetaan ekvivalenteiksi solmupistevoimiksi, koska laskennassa tarkastellaan ainoastaan solmupisteitä.

Rakenteen FE-mallista ratkaistaan ensin siirtymät, joiden perusteella tukireaktiot määräytyvät. Tukireaktioiden ratkaisemisen jälkeen tarkistetaan tasapainoehtojen toteutuminen aliluvun 2.8 mukaisesti. Vasta kun mastopilarikehän matemaattisen mallin 14 yhtälöä todetaan yhtäpitäviksi ja kun ulkoisten voimien summaksi lasketaan nolla, laskentaa jatketaan eteenpäin ratkaisemalla elementtivoimat kunkin elementin paikallisessa koordinaatistossa, jota kierretään kulman φ_1 verran vastapäivään globaalin koordinaatiston suhteen. Solmupistemuuttujat ilmaistaan globaalissa koordinaatistossa, kun rakennetta tarkastellaan kokonaisuutena. Ne muunnetaan paikalliseen koordinaatistoon, kun tutkitaan yksittäisen rakenneosan siirtymiä tai siihen vaikuttavia voimia.

Yksittäisen elementin rasituksia tarkastellaan ratkaisemalla siihen vaikuttavat elementtivoimakomponentit. Ne kuvaavat rakenneosaan kohdistuvan rasituksen ainoastaan elementin päätepisteissä. Mitoituksen kannalta määräävät rasitukset eivät suinkaan aina sijaitse solmupisteissä, minkä vuoksi niiden välisen alueen rasitukset lasketaan elementtivoimista statikan sääntöjen mukaisesti.

3.1 Laskentamallin esittely

Mastopilarikehän laskentamalli on kuvan 12 mukainen. Tarkasteltavan kuormitustapauksen lisäksi se havainnollistaa rakenneosien tuentatapaa. Pilarit kiinnitetään alustoihinsa jäykästi, eikä niiden siirtymät ja kiertymät globaalisolmuissa 1 ja 3 ole teoriassa mahdollisia. Kuvassa 13 käytettyjä merkintöjä käyttäen kehän reunaehdoksi kirjoitetaan $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ ja $r_8 = r_9 = r_{10} = 0$. Näin ollen laskennassa ratkaistavia siirtymäkomponentteja on globaalisolmuissa 2 ja 4. Elementtinumerot lävistävät suuntajanat ilmoittavat elementtien suunnan globaalissa koordinaatistossa.



KUVA 12. Mastopilarikehän laskentamalli (Lampimäki 2014-01-22)

Pilarien tasainen kuorma aiheutuu tuulenpaineesta ja -imusta. Niitä merkitään symboleilla q_3 ja q_1 . Pilarien pistemäiset vaakakuormat H_3 ja H_1 johtuvat oletetusta vinoudesta sekä pilareiden yläpään yläpuolelle, rakennuksen yläosaan kohdistuvasta tuulenpaineesta ja -imusta. Kun tuulikuormien re-

sultantti siirretään kehän nurkkaan, sen momenttivarsi lyhenee ja ulkoinen voimavaikutus muuttuu. Siirretyn resultantin arvoa kasvatetaan, jotta momenttivaikutus ei muutu.

Laskennassa käytettävät lukuarvot esitetään taulukossa 5. Selvyyden vuoksi mainitaan erikseen, että palkin omapaino on laskettu palkille tulevaan tasaiseen kuormaan. Ilmoitetut kuormien arvot ovat itseisarvoja; niiden suunta täytyy siis huomioida laskennassa. Koska rakenteen matemaattinen malli muodostetaan kaikille elementeille yhteiseen globaaliin koordinaatistoon, voimasuureiden etumerkit määräytyvät taulukon 2 perusteella. Tasaisen kuorman suunnan huomioon ottaminen palautuu pistemäisten voimakomponenttien etumerkkien määrittämiseen, mihin palataan aliluvussa 3.5.

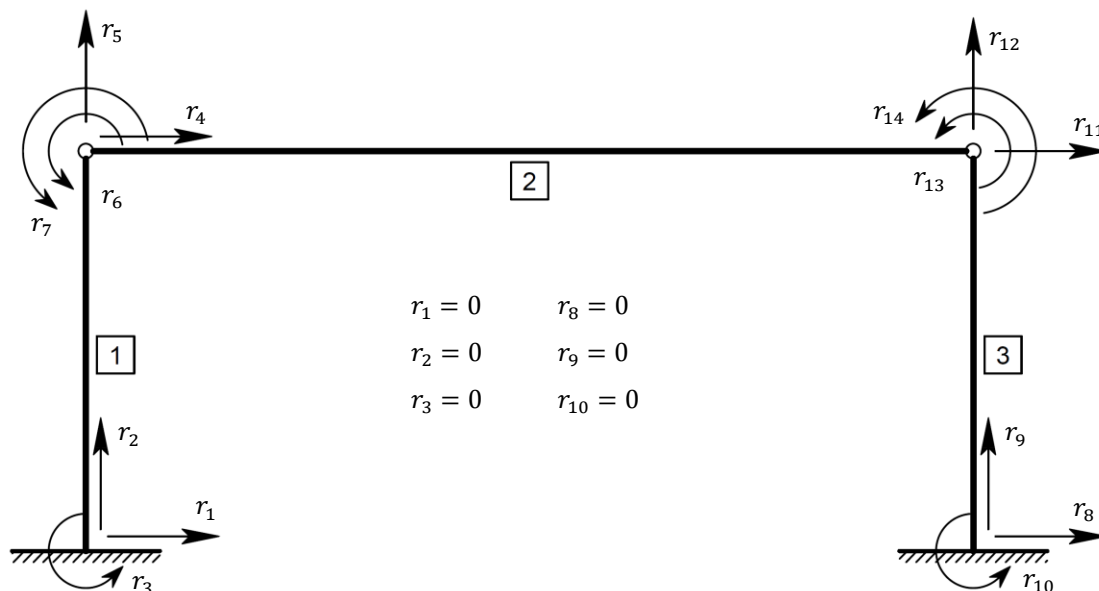
TAULUKKO 5. Laskentaan valitut lukuarvot

Selite	Symboli	Elementti 1	Elementti 2	Elementti 3	Yksikkö
Globaali kiertokulma	φ_i	90,000	0,000	90,000	°, aste
Kosinifunktio	$\cos \varphi_i$	0,000	1,000	0,000	-
Sinifunktio	$\sin \varphi_i$	1,000	0,000	1,000	-
Pituus	L_i	5,400	12,000	5,400	m
IPE-profiilin leveys	b_i	0,150	0,220	0,150	m
IPE-profiilin korkeus	h_i	0,300	0,600	0,300	m
Laipan paksuus	$t_{f,i}$	10,700	19,000	10,700	10^{-3} m
Uuman paksuus	$t_{w,i}$	7,100	12,000	7,100	10^{-3} m
Pyörityssäde	r_i	15,000	24,000	15,000	10^{-3} m
Poikkipinta-ala	A_i	5,381	15,600	5,381	10^{-3} m ²
Jäyhyysmomentti	$I_{y,i}$	0,836	9,208	0,836	10^{-4} m ⁴
Kimmokerroin	E_i	2,100	2,100	2,100	10^{11} N/m ²
Normaalijäykkyys	$E_i A_i$	1,130	3,276	1,130	10^9 N
Taivutusjäykkyys	$E_i I_i$	17,556	193,410	17,556	10^6 m ²
Omapaino	G_i	2,300	14,400	2,300	10^3 N
Tasainen kuorma	q_i	1,500	25,000	3,000	10^3 N/m
Lisävaakavoima	H_i	1,400	-	2,400	10^3 N

Kuvasta 13 nähdään, että mastopilarikehällä on 14 vapausastetta, joista kuusi tunnetaan reunaehtojen perusteella. Kuva havainnollistaa, kuinka nivelet vaikuttavat rakenteeseen. Nivelelliset liitokset sallivat pilarien ja palkin taipumisen toisistaan riippumatta. Nivelet mallinnetaan matemaattisesti siten, että pilarille ja palkille annetaan toisistaan riippumattomat kiertymävapausasteet globaalisolmuissa 2 ja 4, koska momentti ei siirry ylänurkassa nivelen yli elementistä toiseen. Elementtien liituskulma ei kuormituksen jälkeen säily 90°:n kulmassa. Jos liitos olisi jäykkä, muotoaan muuttaneen kehän nurkka muodostaisi edelleen suoran kulman. Tällöin momentti siirtyisi elementiltä toiselle, ja yksi kiertymävapausaste kuvaisi pilarin palkin liitospäiden kiertymän.

Nivel ei tarkoita sitä, että elementtejä ei ole kytketty toisiinsa. Vaikka kehän ylänurkissa pilarilla ja palkilla on eri kiertymävapausasteet, niiden vaaka- ja pystysuuntaiset siirtymävapausasteet kuitenkin

ovat yhteiset. Sanotaan, että pilarin ja palkin vaaka- ja pystysuuntaiset siirtymät eli translaatio- siirtymät ovat yhtä suuret samassa solmupisteessä. Kuvasta 13 nähdään, että elementtien translaatio- siirtymien kuvaamiseen tarvitaan siis kaksi siirtymäkomponenttia samassa solmupisteessä liitoksen laadusta riippumatta. Tasorakenteen symmetriatason normaalin suuntaisia liikemahdollisuuksia ei ole, kun pilarit ja palkit tuetaan heikommissa suunnassa riittävästi.



KUVA 13. Mastopilarikehän globaalit siirtymävapausasteet (Lampimäki 2014-01-23)

Yksiselitteisyyden vuoksi kuvan 13 tiedot siirretään taulukkoon 6. Sen avulla nähdään laskennan kannalta oleellinen. Siinä esitetään mastopilarikehän topologia eli perusrakenne. Vaakariveille kirjoitetaan yksittäisten elementtien alku- ja loppupisteiden solmupistemuuttujien alaindeksien numerot. Ne kuvaavat kehän perusrakenteen. Ne ilmaisevat, miten elementit kytketään toisiinsa. Esimerkiksi taulukon 6 perusteella tiedetään, että vapausaste r_6 on elementin **1** loppupisteen kiertymä kuvassa 13. Vastaavasti voidaan päätellä, että r_7 kuvaa ainoastaan elementin **2** alkupisteen kiertymää.

TAULUKKO 6. Rakenteen topologia

Elementin numero	Mastopilarikehän solmupistemuuttujien alaindeksien numerot elementin					
	alkupäässä			loppupäässä		
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	7	11	12	14
3	8	9	10	11	12	13

3.2 Jäykkyysmatriisit

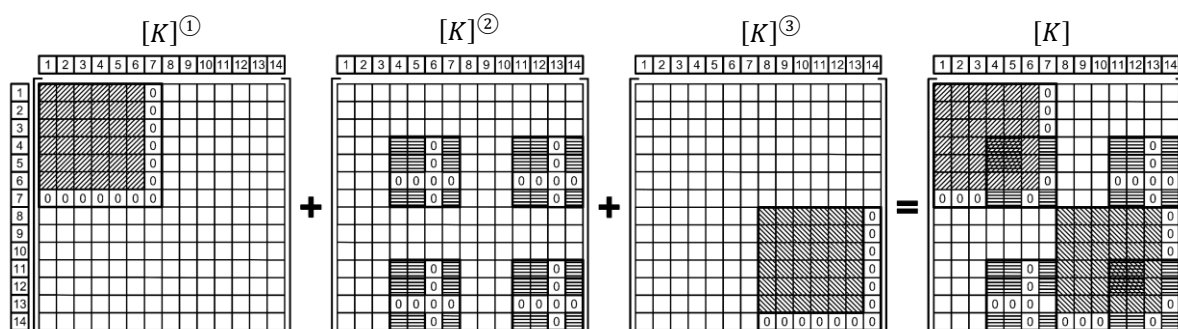
Lasketaan mastopilarikehän elementtien globaalien koordinaatiston mukaiset jäykkyysmatriisit, joiden rivien ja sarakkeiden lukumäärä on $n = m = 6$. Sijoittelusummausta varten ne laajennetaan koko rakenteen jäykkyysmatriisiin kokoa vastaaviksi. Kaavan (49) perusteella kehärakenteen jäykkyysmatriisissa on $14 \times 14 = 196$ alkioita. Elementtien matriisien alkioiden sijoittelussa voidaan käyttää apuna esimerkiksi taulukkoa 6. Tällöin solmupistemuuuttujen alaindeksien numerot ajatellaan koordinaateiksi, jotka määräävät jäykkyysmatriisien alkioiden paikat laajennetussa matriisissa (kuva 14). Globaalit jäykkyysmatriisit lasketaan kaavalla (48), jonka alkioiden muuttujiksi sijoitetaan taulukoissa 3 ja 4 annetut elementtikohtaiset luvut. Laskettaessa Excelillä luvut $-c^2$ ja $-s^2$ täytyy kirjoittaa muodoissa $-(c^2)$ ja $-(s^2)$, jotta laskettu tulos on tosi mielivaltaisella kiertokulman arvolla φ .

$$[K_i^e] = \begin{bmatrix} c^2 k_A + s^2 k_B & cs(k_A - k_B) & -sk_C & -c^2 k_A - s^2 k_B & cs(k_B - k_A) & -sk_C \\ cs(k_A - k_B) & s^2 k_A + c^2 k_B & ck_C & cs(k_B - k_A) & -s^2 k_A - c^2 k_B & ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_D & sk_C & -ck_C & k_E \\ -c^2 k_A - s^2 k_B & cs(k_B - k_A) & sk_C & c^2 k_A + s^2 k_B & cs(k_A - k_B) & sk_C \\ cs(k_B - k_A) & -s^2 k_A - c^2 k_B & -ck_C & cs(k_A - k_B) & s^2 k_A + c^2 k_B & -ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_E & sk_C & -ck_C & k_D \end{bmatrix}$$

$$[K_1^e] = \begin{bmatrix} 1,34E+06 & 0 & -3,61E+06 & -1,34E+06 & 0 & -3,61E+06 \\ 0 & 2,09E+08 & 0 & 0 & -2,09E+08 & 0 \\ -3,61E+06 & 0 & 1,30E+07 & 3,61E+06 & 0 & 6,50E+06 \\ -1,34E+06 & 0 & 3,61E+06 & 1,34E+06 & 0 & 3,61E+06 \\ 0 & -2,09E+08 & 0 & 0 & 2,09E+08 & 0 \\ -3,61E+06 & 0 & 6,50E+06 & 3,61E+06 & 0 & 1,30E+07 \end{bmatrix}$$

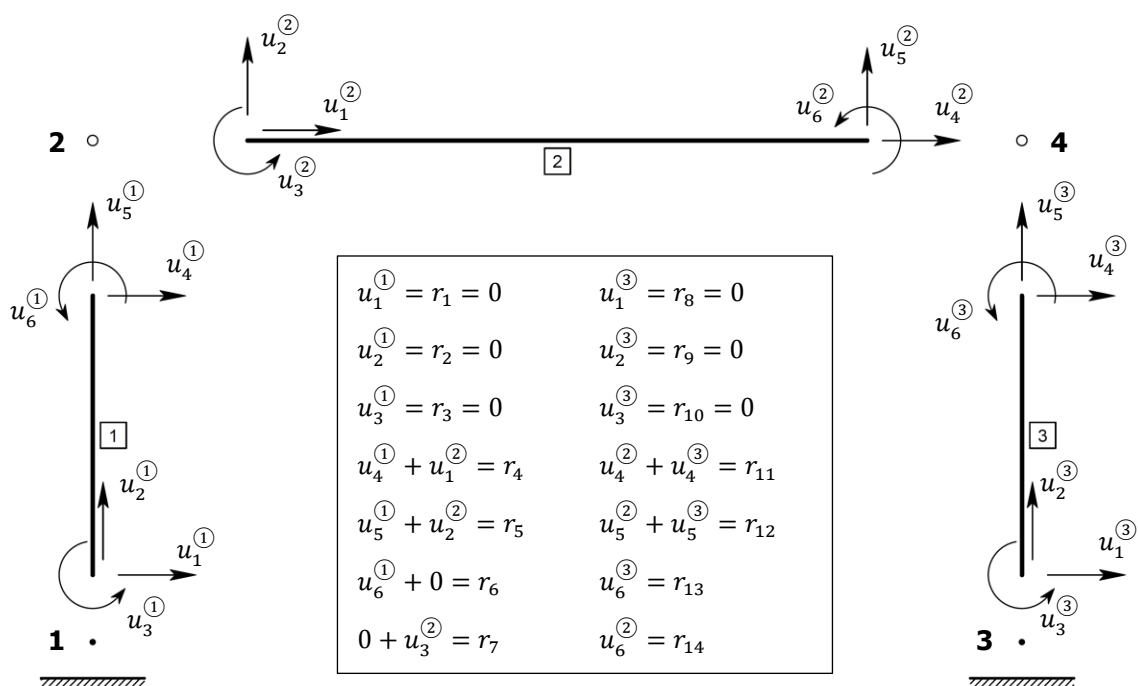
$$[K_2^e] = \begin{bmatrix} 2,73E+08 & 0 & 0 & -2,73E+08 & 0 & 0 \\ 0 & 1,34E+06 & 8,06E+06 & 0 & -1,34E+06 & 8,06E+06 \\ 0 & 8,06E+06 & 6,45E+07 & 0 & -8,06E+06 & 3,22E+07 \\ -2,73E+08 & 0 & 0 & 2,73E+08 & 0 & 0 \\ 0 & -1,34E+06 & -8,06E+06 & 0 & 1,34E+06 & -8,06E+06 \\ 0 & 8,06E+06 & 3,22E+07 & 0 & -8,06E+06 & 6,45E+07 \end{bmatrix}$$

$$[K_3^e] = \begin{bmatrix} 1,34E+06 & 0 & -3,61E+06 & -1,34E+06 & 0 & -3,61E+06 \\ 0 & 2,09E+08 & 0 & 0 & -2,09E+08 & 0 \\ -3,61E+06 & 0 & 1,30E+07 & 3,61E+06 & 0 & 6,50E+06 \\ -1,34E+06 & 0 & 3,61E+06 & 1,34E+06 & 0 & 3,61E+06 \\ 0 & -2,09E+08 & 0 & 0 & 2,09E+08 & 0 \\ -3,61E+06 & 0 & 6,50E+06 & 3,61E+06 & 0 & 1,30E+07 \end{bmatrix}$$



KUVA 14. Jäykkyysmatriisien sijoittelusumma $[K]^{(1)} + [K]^{(2)} + [K]^{(3)} = [K]$ (Lampimäki 2014-01-30)

3.3 Siirtymävektorit



KUVA 15. Mastopilarikehän räjäytyskuva globaalissa koordinaatistossa (Lampimäki 2014-01-24)

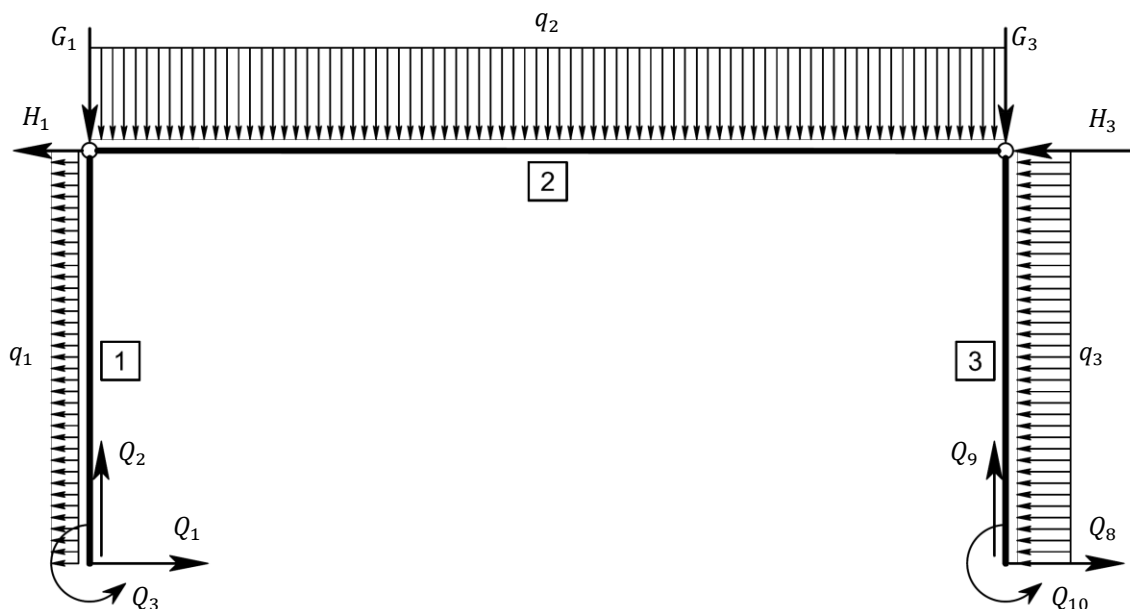
Kehärakenteen siirtymiä kuvaava vektori on toistaiseksi tuntematon, mutta se voidaan muodostaa symbolisesti. Kuva 15 esittää globaaliin koordinaatistoon muunnetut siirtymät, joiden perusteella muodostetaan yhteys koko rakenteen globaaliin siirtymiin superpositioperiaatteen perusteella. Mastopilarikehän siirtymävektoriksi saadaan siis $[r] = [u]^{(1)} + [u]^{(2)} + [u]^{(3)}$.

Sijoittelusummaus tehdään edellisessä aliluvussa esitetyn mukaisesti hyödyntäen taulukkoa 6 tai kuvaa 15. Koska pilarien tyvet kiinnitetään jäykästi alustaansa, minkäänlainen liike ei teoriassa ole mahdollinen globaaleissa solmupisteissä 1 ja 3, mistä saadaan aliluvussa 3.1 määritetyt reunaehdot ratkaistavalle tapaukselle.

$$[u]^{(1)} + [u]^{(2)} + [u]^{(3)} = [r]$$

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \textcircled{2} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ u_5 \\ 0 \\ u_6 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \textcircled{3} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 [r] \\
 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

3.4 Solmupistevoimavektorit



KUVA 16. Mastopilarikehän vapaakappalekuva (Lampimäki 2014-01-25)

Kuten kuvasta 16 käy ilmi, solmupistevoimat ovat vaaka- ja pystysuuntaisia. Koska ne ovat valmiiksi globaalissa koordinaatistossa, niitä ei tarvitse erikseen ratkaista kaavasta (45). Momentitkin ovat samassa koordinaatistossa kaavan (46) perusteella. Niiden arvot eivät muutu koordinaatiston kierrossa (aliluku 2.6).

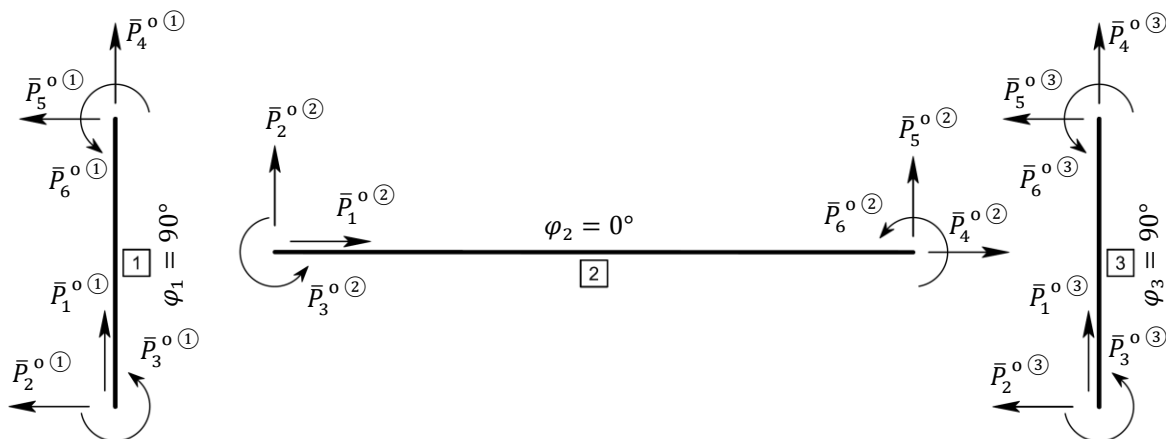
Yllä olevasta vapaakappalekuvasta nähdään, että solmuihin 1 ja 3 kohdistuvat tukireaktiot, kun taas solmuihin 2 ja 4 vaikuttavat resultantit pilarien omapainosta sekä lisävaakavoimat tuulesta ja oletetusta rakenteen vinoudesta. Staattisten voimien yhteenlaskuperiaate antaa mastopilarikehän solmupistevoimavektoriksi sijoittelusumman $[R]^{①} + [R]^{②} + [R]^{③} = [R]$. Siihen lasketaan ainoastaan voimat, joiden vaikutuspisteet sijaitsevat solmupisteissä.

$$[R]^{①} + [R]^{②} + [R]^{③} = [R]$$

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ -H_1 \\ -G_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \textcircled{2} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \textcircled{3} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ -H_3 \\ -G_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 [R] \\
 \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{14} \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ -H_1 \\ -G_1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ -H_3 \\ -G_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ -1,40E+03 \\ -2,30E+03 \\ 0 \\ 0 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ -2,40E+03 \\ -2,30E+03 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

3.5 Lukitusvoimavektorit

Elementtien paikallisten koordinaatistojen mukaiset positiiviset suunnat lukitusvoimille tai solmupisteuuttujille yleensä näkyvät kuvassa 17. Elementtien ja niihin kohdistuvien voimakomponenttien ajatellaan kiertyvän kulman $\varphi_i \geq 0^\circ$ verran vastapäivään. Siten päädytään kuvan 17 mukaiseen tilanteeseen.



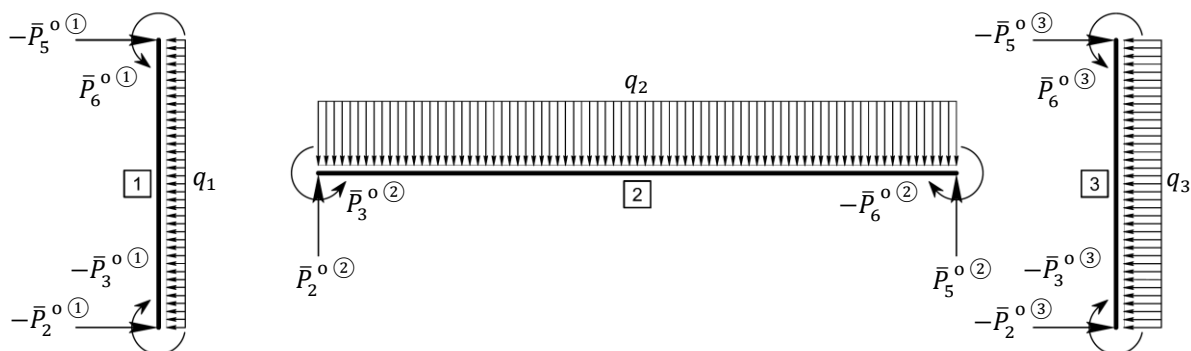
KUVA 17. Positiiviset lukitusvoimat paikallisissa koordinaatistoissa (Lampimäki 2014-01-29)

Tasaisesta kuormasta aiheutuvat tukireaktiot eli lukitusvoimat voitaisiin kirjoittaa suoraan globaalin koordinaatiston mukaisiksi. Esimerkin vuoksi ne kuitenkin kirjoitetaan ensin yksittäisen elementin paikalliseen koordinaatistoon (kuva 17). Tämän jälkeen ne muunnetaan globaaliin koordinaatistoon kaavan (45) avulla. Hyödynnetään muuntomatriisin ortogonaalisuutta (aliluku 2.6) ratkaisemalla yhtälöstä $[\bar{P}^o] = [A][P^o]$ globaalin koordinaatiston mukainen lukitusvoimavektori $[P^o]$. Sievennyksen jälkeen tulokseksi saadaan kaava (51), joka lasketaan kaavasta (52). On syytä huomata, että rakenteen matemaattisen mallin $[K][r] = [R] - [R^o]$ lukitusvoimavektori kuormittaa rakennetta samalla tavalla kuin solmupisteiden välissä vaikuttavat voimat vasta, kun se kerrotaan luvulla -1 .

$$[\bar{P}^o] = [A][P^o] \Leftrightarrow [A]^T[\bar{P}^o] = [A]^T[A][P^o] \Leftrightarrow [P^o] = [A]^T[\bar{P}^o] \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1^o \\ \bar{P}_2^o \\ \bar{P}_3^o \\ \bar{P}_4^o \\ \bar{P}_5^o \\ \bar{P}_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \bar{P}_1^o - \sin \varphi \bar{P}_2^o \\ \sin \varphi \bar{P}_1^o + \cos \varphi \bar{P}_2^o \\ \bar{P}_3^o \\ \cos \varphi \bar{P}_4^o - \sin \varphi \bar{P}_5^o \\ \sin \varphi \bar{P}_4^o + \cos \varphi \bar{P}_5^o \\ \bar{P}_6^o \end{bmatrix} \quad (52)$$

Lukitusvoimien todelliset suunnat kunkin elementin paikallisessa koordinaatistossa huomioidaan kuvan 18 avulla. Siitä näkyy tasaisen kuorman aiheuttamat tukireaktiot, joiden etumerkit ilmaisevat reaktiokomponenttien suunnan. Etumerkillä ilmoitetaan, vastaako voimakomponentin suunta paikallisen koordinaatiston positiivista suuntaa. Erisuuntainen voimakomponentti kerrotaan luvulla -1 . Seuraavalla sivulla näkyy, kuinka elementtien lukitusvoimavektorit laajennetaan ja kuinka summaksi saadaan koko rakenteen lukitusvoimat kuvaava vektori $[R^o] = [R^o]^{(1)} + [R^o]^{(2)} + [R^o]^{(3)}$.



KUVA 18. Elementtien lukitusvoimat paikallisissa koordinaatistoissa (Lampimäki 2014-01-29)

①

$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \bar{P}_1^o - \sin \varphi_1 (-\bar{P}_2^o) \\ \sin \varphi_1 \bar{P}_1^o + \cos \varphi_1 (-\bar{P}_2^o) \\ -\bar{P}_3^o \\ \cos \varphi_1 \bar{P}_4^o - \sin \varphi_1 (-\bar{P}_5^o) \\ \sin \varphi_1 \bar{P}_4^o + \cos \varphi_1 (-\bar{P}_5^o) \\ \bar{P}_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 L_1 / 2 \\ 0 \\ -q_1 L_1^2 / 12 \\ q_1 L_1 / 2 \\ 0 \\ q_1 L_1^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,05E+03 \\ 0 \\ -3,65E+03 \\ 4,05E+03 \\ 0 \\ 3,65E+03 \end{bmatrix} \quad \bar{P}_1^o = \bar{P}_4^o = 0$$

②

$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \bar{P}_1^o - \sin \varphi_2 \bar{P}_2^o \\ \sin \varphi_2 \bar{P}_1^o + \cos \varphi_2 \bar{P}_2^o \\ \bar{P}_3^o \\ \cos \varphi_2 \bar{P}_4^o - \sin \varphi_2 \bar{P}_5^o \\ \sin \varphi_2 \bar{P}_4^o + \cos \varphi_2 \bar{P}_5^o \\ -\bar{P}_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 L_2 / 2 \\ q_2 L_2^2 / 12 \\ 0 \\ q_2 L_2 / 2 \\ -q_2 L_2^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,50E+05 \\ 3,00E+05 \\ 0 \\ 1,50E+05 \\ -3,00E+05 \end{bmatrix} \quad \bar{P}_1^o = \bar{P}_4^o = 0$$

③

$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \bar{P}_1^o - \sin \varphi_3 (-\bar{P}_2^o) \\ \sin \varphi_3 \bar{P}_1^o + \cos \varphi_3 (-\bar{P}_2^o) \\ -\bar{P}_3^o \\ \cos \varphi_3 \bar{P}_4^o - \sin \varphi_3 (-\bar{P}_5^o) \\ \sin \varphi_3 \bar{P}_4^o + \cos \varphi_3 (-\bar{P}_5^o) \\ \bar{P}_6^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 L_3 / 2 \\ 0 \\ -q_3 L_3^2 / 12 \\ q_3 L_3 / 2 \\ 0 \\ q_3 L_3^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,10E+03 \\ 0 \\ -7,29E+03 \\ 8,10E+03 \\ 0 \\ 7,29E+03 \end{bmatrix} \quad \bar{P}_1^o = \bar{P}_4^o = 0$$

①

②

③

$[R^o]$

$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^o \\ P_2^o \\ 0 \\ P_3^o \\ 0 \\ 0 \\ P_4^o \\ P_5^o \\ 0 \\ P_6^o \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \\ P_5^o \\ P_6^o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^o \\ R_2^o \\ R_3^o \\ R_4^o \\ R_5^o \\ R_6^o \\ R_7^o \\ R_8^o \\ R_9^o \\ R_{10}^o \\ R_{11}^o \\ R_{12}^o \\ R_{13}^o \\ R_{14}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 L_1 / 2 \\ 0 \\ -q_1 L_1^2 / 12 \\ q_1 L_1 / 2 \\ q_2 L_2 / 2 \\ q_1 L_1^2 / 12 \\ q_2 L_2^2 / 12 \\ q_3 L_3 / 2 \\ 0 \\ -q_3 L_3^2 / 12 \\ q_3 L_3 / 2 \\ q_2 L_2 / 2 \\ q_3 L_3^2 / 12 \\ -q_2 L_2^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,05E+03 \\ 0 \\ -3,65E+03 \\ 4,05E+03 \\ 1,50E+05 \\ 3,65E+03 \\ 3,00E+05 \\ 8,10E+03 \\ 0 \\ -7,29E+03 \\ 8,10E+03 \\ 1,50E+05 \\ 7,29E+03 \\ -3,00E+05 \end{bmatrix}$$

3.6 Mastopilarikehän lineaarisen FE-mallin muodostaminen

ELEMENTIN 1 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(1)}[r]^{(1)} = [R]^{(1)} - [R^0]^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14				
1	1,34E+06	0	-3,61E+06	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,05E+03
2	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-3,61E+06	0	1,30E+07	3,61E+06	0	6,50E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
4	-1,34E+06	0	3,61E+06	1,34E+06	0	3,61E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_4^{(1)}$	-1,40E+03	4,05E+03
5	0	-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_5^{(1)}$	-2,30E+03	0
6	-3,61E+06	0	6,50E+06	3,61E+06	0	1,30E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_6^{(1)}$	0	3,65E+03
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ELEMENTIN 2 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(2)}[r]^{(2)} = [R]^{(2)} - [R^0]^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2,73E+08	0	0	0	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	$u_1^{(2)}$	0	0	
5	0	0	0	0	1,34E+06	0	8,06E+06	0	0	0	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	$u_2^{(2)}$	0	1,50E+05	
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	$u_3^{(2)}$	0	3,00E+05	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	0	0	0	2,73E+08	0	0	0	$u_4^{(2)}$	0	0	
12	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	0	0	0	1,34E+06	0	-8,06E+06	$u_5^{(2)}$	0	1,50E+05	
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	0	0	0	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	6,45E+07	$u_6^{(2)}$	0	-3,00E+05	

ELEMENTIN 3 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(3)}[r]^{(3)} = [R]^{(3)} - [R^0]^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1,34E+06	0	-3,61E+06	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	0	Q_8	8,10E+03
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	Q_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,61E+06	0	1,30E+07	3,61E+06	0	6,50E+06	0	0	0	Q_{10}	-7,29E+03
11	0	0	0	0	0	0	0	-1,34E+06	0	3,61E+06	1,34E+06	0	3,61E+06	0	$u_4^{(3)}$	-2,40E+03	8,10E+03	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	$u_5^{(3)}$	-2,30E+03	0	
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,61E+06	0	6,50E+06	3,61E+06	0	1,30E+07	0	$u_6^{(3)}$	0	7,29E+03	
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MASTOPILARIKEHÄN LINEAARINEN FE-MALLI $[K][r] = [R] - [R^0]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14				
1	1,34E+06	0	-3,61E+06	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,05E+03
2	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
3	-3,61E+06	0	1,30E+07	3,61E+06	-2,21E-10	6,50E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_3	-3,65E+03
4	-1,34E+06	0	3,61E+06	2,74E+08	0	3,61E+06	0	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	r_4	-1,40E+03	4,05E+03	
5	0	-2,09E+08	0	0	2,11E+08	0	8,06E+06	0	0	0	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	r_5	-2,30E+03	1,50E+05	
6	-3,61E+06	0	6,50E+06	3,61E+06	0	1,30E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	r_6	0	3,65E+03	
7	0	0	0	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	r_7	0	3,00E+05	
8	0	0	0	0	0	0	0	1,34E+06	0	-3,61E+06	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	Q_8	8,10E+03	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	Q_9	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,61E+06	0	1,30E+07	3,61E+06	0	6,50E+06	0	0	Q_{10}	-7,29E+03	
11	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	-1,34E+06	0	3,61E+06	2,74E+08	0	3,61E+06	0	r_{11}	-2,40E+03	8,10E+03	
12	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	-2,09E+08	0	0	2,11E+08	0	-8,06E+06	r_{12}	-2,30E+03	1,50E+05	
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,61E+06	0	6,50E+06	3,61E+06	0	1,30E+07	0	r_{13}	0	7,29E+03	
14	0	0	0	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	6,45E+07	r_{14}	0	-3,00E+05	

Kuva 19. Mastopilarikehän lineaarinen FE-malli $[K][r] = [R] - [R^0]$ (Lampimäki 2014-01-30)

Kuva 19 havainnollistaa, mitä aliluvuissa 3.2 - 3.5 on laskettu. Siitä näkyy, kuinka elementtien matemaattiset mallit yhdistetään koko rakenteen FE-malliksi soveltamalla sijoittelusummausta ja superpositioperiaatetta. Siirtymät ratkaistaan yhtälöistä 4 - 7 ja 11 - 14. Ratkaistujen siirtymien perusteella lasketaan tukireaktiokomponentit yhtälöistä 1 - 3 ja 8 - 10.

Palkin (elementin [2]) jäykkyyssmatriisia tutkimalla selviää nivelten vaikutus kehän toiminnan mallintamiseen. Sen alkioit hajaantuvat vapausasteiden mukaisille paikoille. Kuvasta 19 huomataan, että pilarien (elementtien [1] ja [3]) kiertymävapausasteita vastaavat rivit ja sarakkeet ikään kuin leikkaavat aliluvussa 3.2 lasketun palkin 6×6 -jäykkyyssmatriisin pienempiin osiin. Vapausasteiden numerointijärjestyksen vuoksi palkin kiertymävapausasteita vastaavat rivit eivät periaatteessa vaikuta mitenkään pilarien jäykkyyssmatriisien alkioiden sijoittamiseen. Aliluvussa 3.2 lasketut neliömatriisit vain sijoitetaan yhtenäisinä blokkeina paikoilleen.

Kuvasta 19 käy vielä ilmi, miksi mastopilarikehän jäykkyyssmatriisin sarakkeet 1 - 3 ja 8 - 10 sekä niitä vastaavat siirtymävektorin alkioit voidaan jättää huomioimatta. Reunaehtojen vuoksi ne eivät vaikuta tuntemattomien solmupistemuuuttujen ratkaisuun, ja rakenteen matemaattinen malli voidaan esittää tiiviimmin kuvassa 20 näytetyllä tavalla. Vihreälle kaistalle sijoitetut numerot vastaavat vapausasteiden mukaisia koordinaatteja, jotka viittaavat taulukossa 6 esitettyyn kehärakenteen topologiaan.

	4	5	6	7	11	12	13	14			
1	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	0	0	0		Q_1	4,05E+03
2	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0		Q_2	0
3	3,61E+06	-2,21E-10	6,50E+06	0	0	0	0	0		Q_3	-3,65E+03
4	2,74E+08	0	3,61E+06	0	-2,73E+08	0	0	0	r_4	-1,40E+03	4,05E+03
5	0	2,11E+08	0	8,06E+06	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	r_5	-2,30E+03	1,50E+05
6	3,61E+06	0	1,30E+07	0	0	0	0	0	r_6	0	3,65E+03
7	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	r_7	0	3,00E+05
8	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	r_{11}	Q_8	8,10E+03
9	0	0	0	0	0	-2,09E+08	0	0	r_{12}	Q_9	0
10	0	0	0	0	3,61E+06	0	6,50E+06	0	r_{13}	Q_{10}	-7,29E+03
11	-2,73E+08	0	0	0	2,74E+08	0	3,61E+06	0	r_{14}	-2,40E+03	8,10E+03
12	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	2,11E+08	0	-8,06E+06		-2,30E+03	1,50E+05
13	0	0	0	0	3,61E+06	0	1,30E+07	0		0	7,29E+03
14	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	-8,06E+06	0	6,45E+07		0	-3,00E+05

KUVA 20. Mastopilarikehän lineaarinen FE-malli ytimekkäästi (Lampimäki 2014-01-31)

Jännityksestä ja muodonmuutoksesta aiheutuvia ilmiöitä tarkasteltaessa voidaan usein olettaa, että rakenne toimii kuin ideaalinen jousisysteemi. Jousivoiman laki esitetään muodossa $F = -kx$. Toisinpäin kirjoitettuna se vastaa muodoltaan rakenteen matemaattista mallia $[K][r] = [R] - [R^0]$. Molemmat yhtälöt kuvaavat ulkoisen voimavaikutuksen, joka saadaan jäykkyyden ja muodonmuutoksen tulona.

3.7 Siirtymien ja tukireaktioiden ratkaiseminen

Tässä aliluvussa ratkaistaan tuntemattomat solmupistemuuttujat eli siirtymät ja tukireaktiot. Siirtymät lasketaan kaavalla (50) ja tukireaktiot ratkaistaan solmupistevoimavektorista $[R]$. Siirtymien ratkaisu edellyttää käänteismatriisin laskemista siirtymiin vaikuttaville jäykkyydematriisin alkiolle, jotka yhdistetään kuvan 21 mukaiseksi matriisiksi.

Kuvan 20 mukaisessa tapauksessa jäykkyydematriisi muodostetaan siirtymille ja tukireaktioille erikseen, kuten kuvista 21 ja 22 näkyy. Nyt siirtymät ja tukireaktiokomponentit voidaan laskea helposti taulukkolaskentaohjelman matriisifunktiolla. Excelin funktiot *MKERRO* ja *MKÄÄNTEINEN* ovat hyödyllisiä ja tarpeellisia laskentaprosessin tehostamiseksi.

Siirtymien ratkaisemiseen tarvittava osa rakenteen matemaattisesta mallista

	4	5	6	7	11	12	13	14			
4	2,74E+08	0	3,61E+06	0	-2,73E+08	0	0	0	r_4	-1,40E+03	4,05E+03
5	0	2,11E+08	0	8,06E+06	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	r_5	-2,30E+03	1,50E+05
6	3,61E+06	0	1,30E+07	0	0	0	0	0	r_6	0	3,65E+03
7	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	r_7	0	3,00E+05
11	-2,73E+08	0	0	0	2,74E+08	0	3,61E+06	0	r_{11}	-2,40E+03	8,10E+03
12	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	2,11E+08	0	-8,06E+06	r_{12}	-2,30E+03	1,50E+05
13	0	0	0	0	3,61E+06	0	1,30E+07	0	r_{13}	0	7,29E+03
14	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	-8,06E+06	0	6,45E+07	r_{14}	0	-3,00E+05

Siirtymät $[r] = [K]^{-1} [R] - [R^0]$

	4	5	6	7	11	12	13	14			
4	1,50E-06	0	-4,16E-07	0	1,49E-06	0	-4,15E-07	0	r_4	-5,45E+03	-1,93E-02
5	0	4,78E-09	0	-3,98E-10	0	-4,12E-27	0	-3,98E-10	r_5	-1,52E+05	-7,28E-04
6	-4,16E-07	0	1,92E-07	0	-4,15E-07	0	1,15E-07	0	r_6	-3,65E+03	5,08E-03
7	0	-3,98E-10	0	2,08E-08	0	3,98E-10	0	-1,03E-08	r_7	-3,00E+05	-9,31E-03
11	1,49E-06	0	-4,15E-07	0	1,50E-06	0	-4,16E-07	0	r_{11}	-1,05E+04	-1,93E-02
12	0	-5,17E-27	0	3,98E-10	0	4,78E-09	0	3,98E-10	r_{12}	-1,52E+05	-7,28E-04
13	-4,15E-07	0	1,15E-07	0	-4,16E-07	0	1,92E-07	0	r_{13}	-7,29E+03	4,80E-03
14	0	-3,98E-10	0	-1,03E-08	0	3,98E-10	0	2,08E-08	r_{14}	3,00E+05	9,31E-03

KUVA 21. Siirtymien ratkaiseminen yksikköjärjestelmässä $[N, m]$ (Lampimäki 2014-02-05)

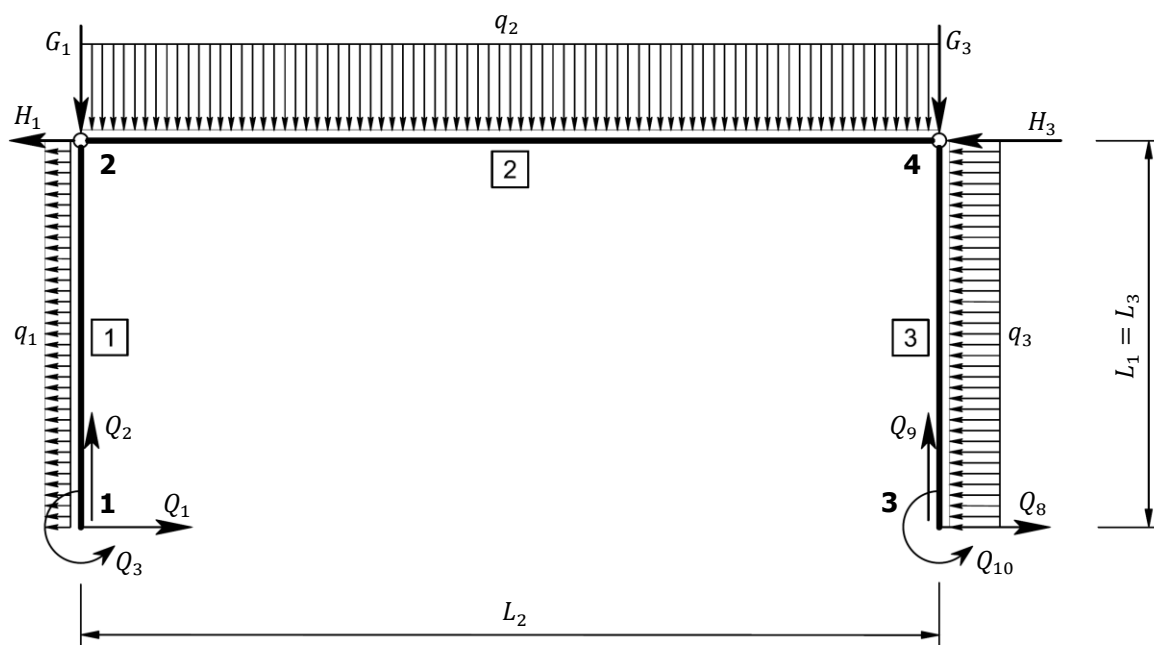
Tässä tapauksessa laskennan yksikköjärjestelmäksi valitaan $[N, m]$. Translaatio- ja kiertymis- siirtymien lukuarvot ovat laadultaan metrejä, kun taas kiertymävapausasteiden arvot saadaan radiaaneissa. Translaatio- siirtymiä vastaavien tukireaktiokomponenttien yksikkö on N, ja rotaatiota vastaavien momenttien laatu on Nm.

Tukireaktiot $[R] = [K][r] + [R^0]$

	4	5	6	7	11	12	13	14				
1	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	0	0	0	0	r_4	4,05E+03	Q_1	1,15E+04
2	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0	r_5	0	Q_2	1,52E+05
3	3,61E+06	0	6,50E+06	0	0	0	0	0	r_6	-3,65E+03	Q_3	-4,03E+04
8	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-3,61E+06	0	r_7	8,10E+03	Q_8	1,66E+04
9	0	0	0	0	0	-2,09E+08	0	0	r_{11}	0	Q_9	1,52E+05
10	0	0	0	0	3,61E+06	0	6,50E+06	0	r_{12}	-7,29E+03	Q_{10}	-4,58E+04

KUVA 22. Tukireaktioiden ratkaiseminen yksikköjärjestelmässä $[N, m]$ (Lampimäki 2014-02-05)

3.8 Tasapainotarkastelu



KUVA 23. Mastopilarikehään vaikuttavat ulkoiset voimat (Lampimäki 2014-02-06)

Tarkastellaan mastopilarikehän tasapainoehtojen toteutumista laskentatulosten oikeellisuuden arvioimiseksi kuvan 23 avulla. Kun rakenteeseen kohdistuvat ulkoiset voimat ovat tasapainossa, siirtymät ja tukireaktio on ratkaistu oikein. Tässä esimerkkitapauksessa kirjoitetaan tasapainoyhtälöt vaak- ja pystysuunnalle sekä globaalien solmupisteiden suhteen. Alle kirjoitetut yhtälöt havainnollistavat tasapainotarkastelua, eikä laskennassa ole tarkoituksena laskea kaikkien tasapainoehtojen summaa. Kolmen ensimmäisen tasapainoyhtälön tarkistaminen osoittaa, ovatko aiemmat laskentavaiheet onnistuneet. Lisätarkasteluna voitaisiin tutkia, ovatko rakenteen matemaattisen mallin 14 yhtälöä todet ratkaistujen solmupistemuuttujien arvoilla.

$$\rightarrow \sum F_x = -q_1 L_1 - q_3 L_3 - H_1 - H_3 + Q_1 + Q_8 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = -q_2 L_2 - G_1 - G_3 + Q_2 + Q_9 = 0$$

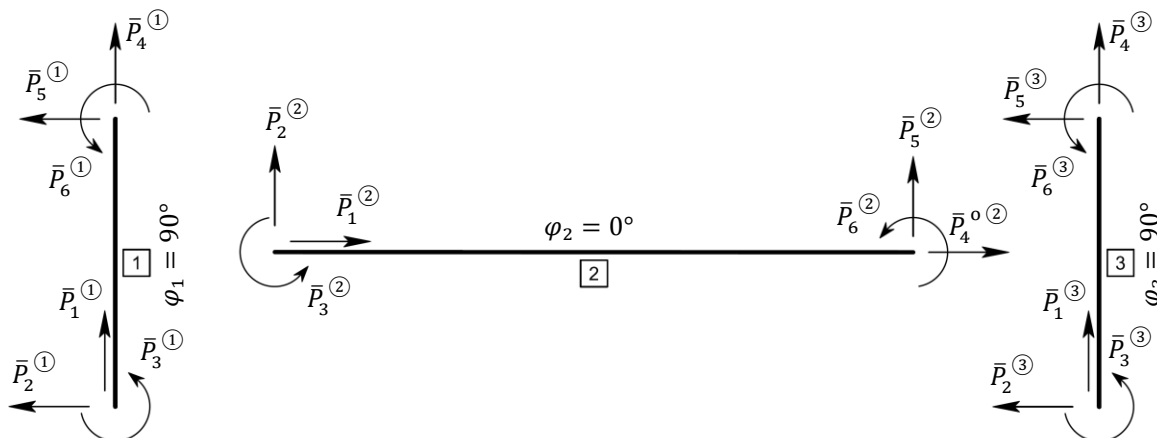
$$\curvearrow \sum M_{Gn1} = \frac{q_1 L_1^2}{2} - \frac{q_2 L_2^2}{2} + \frac{q_3 L_3^2}{2} + H_1 L_1 + H_3 L_3 - G_3 L_2 + Q_9 L_2 + Q_3 + Q_{10} = 0$$

$$\curvearrow \sum M_{Gn2} = -\frac{q_1 L_1^2}{2} - \frac{q_2 L_2^2}{2} - \frac{q_3 L_3^2}{2} - G_3 L_2 + Q_1 L_1 + Q_3 + Q_8 L_3 + Q_9 L_2 + Q_{10} = 0$$

$$\curvearrow \sum M_{Gn3} = -\frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} - \frac{q_3 L_3^2}{2} + G_1 L_2 + Q_1 L_1 - Q_2 L_2 + Q_3 + Q_8 L_3 + Q_{10} = 0$$

$$\curvearrow \sum M_{Gn4} = \frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + \frac{q_3 L_3^2}{2} + H_1 L_1 + H_3 L_3 + G_1 L_2 - Q_2 L_2 + Q_3 + Q_{10} = 0$$

3.9 Elementtivoimat



KUVA 24. Elementtivoimat paikallisissa koordinaatistoissa (Lampimäki 2014-02-06)

Kehärakenteen tasapainotarkastelun perusteella solmupistemuuttujat ratkaistiin oikein, ja laskenta-prosessia voidaan jatkaa viimeiseen vaiheeseen laskemalla kuvassa 24 näytetyt elementtivoimat. Ne lasketaan tarkasteltavan elementin paikallisessa koordinaatistossa kaavalla (40), jota muokataan yhteyksien (44) ja (46) perusteella muotoon $[\bar{P}] = [\bar{K}^e][\bar{u}] + [\bar{P}^o] = [\bar{K}^e][A][u] + [A][\bar{P}^o]$.

Kootaan elementtivoimien tarkat arvot taulukkoon 7. Tulokset saadaan huomioimalla tehtävänannon reunaehdot ja paikallisten ja globaalisten siirtymien väliset yhteydet. Lisäksi trigonometrisille funktioille annetaan kiertokulmasta riippuva arvo joko 0 tai 1. Taivutusmomenteja vastaavat elementtivoimat saavat arvon nolla nivelellisissä solmupisteissä niin kuin pitääkin.

Kuvasta 25 selviää, kuinka elementtivoimat lasketaan numeerisesti taulukossa 5 annetuilla lähtöarvoilla. Elementtivoimien laatu esitetään järjestelmässä $[N, m]$. Luvussa 7 tarkastellaan laskentatuloksia lähemmin ja näytetään, kuinka niiden perusteella selvitetään rakenteen deformatuminen eli kuormittamattoman muodon vääristyminen ja kuinka solmupisteiden väliset rasitukset lasketaan elementtivoimien perusteella.

TAULUKKO 7. Elementtivoimien tarkat arvot globaalisten siirtymien funktioina

\bar{P}_i	Elementille 1	Elementille 2	Elementille 3
\bar{P}_1	$-\frac{E_1 A_1}{L_1} r_5$	$\frac{E_2 A_2}{L_2} (r_4 - r_{11})$	$-\frac{E_3 A_3}{L_3} r_{12}$
\bar{P}_2	$\frac{6E_1 I_1}{L_1^3} (2r_4 + L_1 r_6) - \frac{q_1 L_1}{2}$	$\frac{6E_2 I_2}{L_2^3} (2 + L_2)(r_5 - r_{12}) + \frac{q_2 L_2}{2}$	$\frac{6E_3 I_3}{L_3^3} (2r_{11} + L_3 r_{13}) - \frac{q_3 L_3}{2}$
\bar{P}_3	$\frac{2E_1 I_1}{L_1^2} (3r_4 + L_1 r_6) - \frac{q_1 L_1^2}{12}$	$\frac{2E_2 I_2}{L_2^2} [3(r_5 - r_{12}) + L_2(2r_7 + r_{14})] + \frac{q_2 L_2^2}{12}$	$\frac{2E_3 I_3}{L_3^2} (3r_{11} + L_3 r_{13}) - \frac{q_3 L_3^2}{12}$
\bar{P}_4	$\frac{E_1 A_1}{L_1} r_5$	$-\frac{E_2 A_2}{L_2} (r_4 - r_{11})$	$\frac{E_3 A_3}{L_3} r_{12}$
\bar{P}_5	$-\frac{6E_1 I_1}{L_1^3} (2r_4 + L_1 r_6) + \frac{q_1 L_1}{2}$	$-\frac{6E_2 I_2}{L_2^3} (2 + L_2)(r_5 - r_{12}) + \frac{q_2 L_2}{2}$	$-\frac{6E_3 I_3}{L_3^3} (2r_{11} + L_3 r_{13}) + \frac{q_3 L_3}{2}$
\bar{P}_6	$\frac{2E_1 I_1}{L_1^2} (3r_4 + 2L_1 r_6) + \frac{q_1 L_1^2}{12}$	$\frac{2E_2 I_2}{L_2^2} [3(r_5 - r_{12}) + L_2(r_7 - 2r_{14})] - \frac{q_2 L_2^2}{12}$	$\frac{2E_3 I_3}{L_3^2} (3r_{11} + 2L_3 r_{13}) + \frac{q_3 L_3^2}{12}$

Elementin 1 elementtivoimat paikallisessa koordinaatistossa

2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	$P_{1,loc}^{(1)}$	1,52E+05
0	1,34E+06	3,61E+06	0	-1,34E+06	3,61E+06	0	-4,05E+03	$P_{2,loc}^{(1)}$	-1,15E+04
0	3,61E+06	1,30E+07	0	-3,61E+06	6,50E+06	0	-3,65E+03	$P_{3,loc}^{(1)}$	-4,03E+04
-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	-7,28E-04	0	$P_{4,loc}^{(1)}$	-1,52E+05
0	-1,34E+06	-3,61E+06	0	1,34E+06	-3,61E+06	1,93E-02	-4,05E+03	$P_{5,loc}^{(1)}$	3,42E+03
0	3,61E+06	6,50E+06	0	-3,61E+06	1,30E+07	5,08E-03	3,65E+03	$P_{6,loc}^{(1)}$	4,55E-13

Elementin 2 elementtivoimat paikallisessa koordinaatistossa

2,73E+08	0	0	-2,73E+08	0	0	-1,93E-02	0	$P_{1,loc}^{(2)}$	2,02E+03
0	1,34E+06	8,06E+06	0	-1,34E+06	8,06E+06	-7,28E-04	1,50E+05	$P_{2,loc}^{(2)}$	1,50E+05
0	8,06E+06	6,45E+07	0	-8,06E+06	3,22E+07	-9,31E-03	3,00E+05	$P_{3,loc}^{(2)}$	-5,82E-11
-2,73E+08	0	0	2,73E+08	0	0	-1,93E-02	0	$P_{4,loc}^{(2)}$	-2,02E+03
0	-1,34E+06	-8,06E+06	0	1,34E+06	-8,06E+06	-7,28E-04	1,50E+05	$P_{5,loc}^{(2)}$	1,50E+05
0	8,06E+06	3,22E+07	0	-8,06E+06	6,45E+07	9,31E-03	-3,00E+05	$P_{6,loc}^{(2)}$	-1,16E-10

Elementin 3 elementtivoimat paikallisessa koordinaatistossa

2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	$P_{1,loc}^{(3)}$	1,52E+05
0	1,34E+06	3,61E+06	0	-1,34E+06	3,61E+06	0	-8,10E+03	$P_{2,loc}^{(3)}$	-1,66E+04
0	3,61E+06	1,30E+07	0	-3,61E+06	6,50E+06	0	-7,29E+03	$P_{3,loc}^{(3)}$	-4,58E+04
-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	-7,28E-04	0	$P_{4,loc}^{(3)}$	-1,52E+05
0	-1,34E+06	-3,61E+06	0	1,34E+06	-3,61E+06	1,93E-02	-8,10E+03	$P_{5,loc}^{(3)}$	3,82E+02
0	3,61E+06	6,50E+06	0	-3,61E+06	1,30E+07	4,80E-03	7,29E+03	$P_{6,loc}^{(3)}$	-1,36E-11

KUVA 25. Elementtivoimat yksikköjärjestelmässä [N, m] (Lampimäki 2014-02-03)

Korvataan kuvan 24 elementtivoimien merkinnät normaali- ja leikkausvoimaa sekä taivutusmomenttia vastaavilla symboleilla, ja kootaan vielä lineaarisella elementtimenetelmällä lasketut tulokset taulukkoon 8. Lukuarvot näytetään kolmen desimaalin tarkkuudella, jotta niitä voi verrata Frame Analysis 6.3 -kehäohjelmalla laskettuihin vertailuarvoihin (liite 2). Tässä vaiheessa todetaan, että taulukkolaskenta- ja kehäohjelmalla saadut tulokset vastaavat toisiaan kolmen desimaalin tarkkuudella, mikä viittaa laskennan onnistumiseen. Luvussa 7 tarkastellaan lähemmin lineaarisia ja epälineaarisia laskentatuloksia ja niiden merkitystä.

TAULUKKO 8. Lineaarisen FEM-laskennan tulokset

Rakenteen tasapaino tarkastelu				Reunaehdot				Siirtymät			
Vaakasuurtaisten voimien summa				$\sum F_x$	0,000	r_1	0,000	mm	r_4	-19,308	mm
Pystysuurtaisten voimien summa				$\sum F_y$	0,000	r_2	0,000	mm	r_5	-0,728	mm
Momenttien summa globaalisolmun 1 suhteen				$\sum M_{Gn1}$	0,000	r_3	0,000	rad	r_6	0,005	rad
Momenttien summa globaalisolmun 2 suhteen				$\sum M_{Gn2}$	0,000	r_8	0,000	mm	r_7	-0,009	rad
Momenttien summa globaalisolmun 3 suhteen				$\sum M_{Gn3}$	0,000	r_9	0,000	mm	r_{11}	-19,315	mm
Momenttien summa globaalisolmun 4 suhteen				$\sum M_{Gn4}$	0,000	r_{10}	0,000	rad	r_{12}	-0,728	mm
									r_{13}	0,005	rad
									r_{14}	0,009	rad
Tukireaktiot			Elementin 1 elementtivoimat			Elementin 2 elementtivoimat			Elementin 3 elementtivoimat		
Q_1	11,518	kN	N_1	152,300	kN	N_1	2,018	kN	N_1	152,300	kN
Q_2	152,300	kN	V_1	-11,518	kN	V_1	150,000	kN	V_1	-16,582	kN
Q_3	-40,325	kNm	M_1	-40,325	kNm	M_1	0,000	kNm	M_1	-45,805	kNm
Q_8	16,582	kN	N_2	-152,300	kN	N_2	-2,018	kN	N_2	-152,300	kN
Q_9	152,300	kN	V_2	3,418	kN	V_2	150,000	kN	V_2	0,382	kN
Q_{10}	-45,805	kNm	M_2	0,000	kNm	M_2	0,000	kNm	M_2	0,000	kNm

4 TOISEN KERTALUVUN ELEMENTTIMENETELMÄN TEORIAA KEHÄRAKENTEILLE

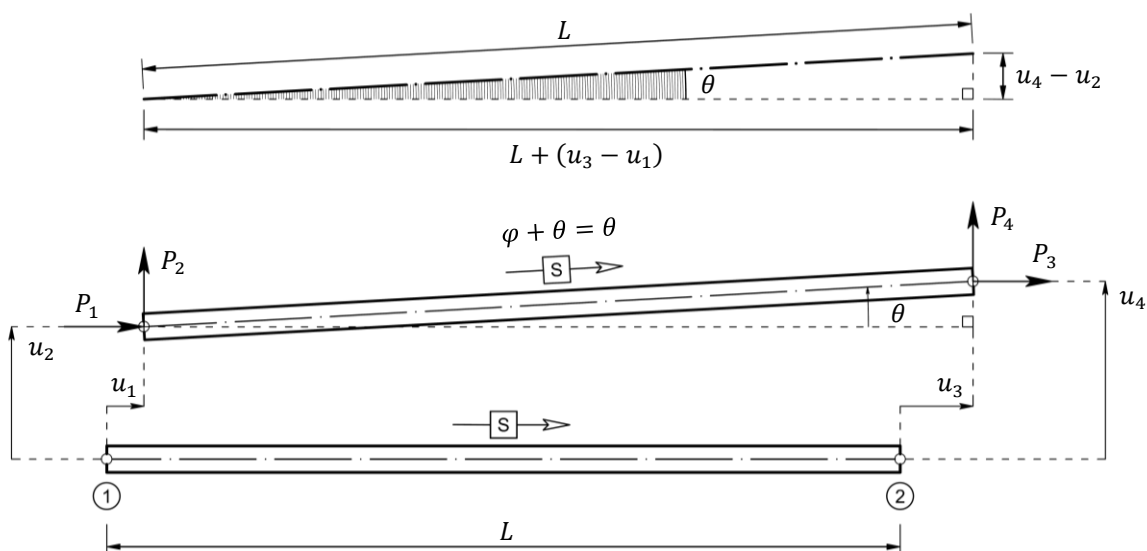
Aiemmin luvussa 2 esitetty lineaarisesti toimiva sauva- ja palkkielementti toimivat kuormitettuina Hooken lain mukaan. Siirtymien oletetaan olevan pieniä, minkä vuoksi voimasuureet voidaan ratkaista rakenteen alkuperäisen, kuormittamattoman tilan perusteella. Sen sijaan tässä luvussa esitetty perustuu Sven Thelanderssonin *Konstruktionsberäkningar med dator*-teoksen 6. lukuun, jossa tutkitaan kuormitetun rakenteen epälineaarista käyttäytymistä. Rakenne tai sen osa ei toimi enää ideaalisen jousisysteemin tavoin, sillä voimien ja siirtymien välinen yhteys on epälineaarinen.

Tässä luvussa tarkastellaan, kuinka aksiaaliset voimat ja siirtymät vaikuttavat rakenteiden analysointiin. Rakenteen stabiilius tutkitaan tapauksissa, joissa aksiaaliset voimat ovat määrääviä rakenteen vakauden kannalta. Elementin kulman muutoksen oletetaan olevan pieni, joten hyväksytään kuvan 26 perusteella johdetut approksimaatiot $\sin \theta \approx \theta$ ja $\cos \theta \approx 1$.

Toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässä normaalivoimaa pidetään ikään kuin ennalta määrättyinä parametrina, joka vaikuttaa elementtien jäykkyyteen. Tästä syystä voidaan käyttää rakenteen lineaariseen analyysiin perustuvia menetelmiä. Superpositioperiaatetta voidaan soveltaa, jos normaalivoima oletetaan vakioksi kaareutuneenkin elementin alueella.

Rakenteen aksiaalisten voimien suuruutta ei tunneta, miksi ongelman ratkaisu edellyttää iterointia. Esimerkiksi ensin suoritetaan laskenta lineaarisella menetelmällä. Saatuja voimasuureita voidaan sitten käyttää elementtijäykkyysohjelmien muodostamisessa. Analyysi toistetaan. Jos uudet aksiaaliset voimat eroavat merkittävästi ensin lasketuista arvoista, laskenta suoritetaan uudelleen. Joissakin tapauksissa normaalivoimien suuruusluokka voidaan arvioida oikein hyvällä tarkkuudella, mutta useimmiten iterointi kuitenkin joudutaan toistamaan muutaman kerran.

4.1 Toisen kertaluvun sauvaelementti



KUVA 26. Sauvaelementin kiertyminen tasossa (Lampimäki 2014-02-07)

Tutkitaan kuvassa 26 näkyvää sauvaelementtiä. Kuormittamattomana sen painopiste akseli vastaa globaalien koordinaatiston x -akselia. Aksiaalisen kuormituksen vaikutuksesta sen alkuperäinen pituus muuttuu, kun taas poikittaisen kuormituksen seurauksena sen kiertokulma φ muuttuu positiiviseen suuntaan absoluuttikulman θ verran. Oletetaan, että sauva säilyy suorana kiertymisestä huolimatta ja että kulman muutos on pieni. Näin ollen voidaan hyväksyä approksimaatiot (53) ja (54). Ne pätevät riittävällä tarkkuudella, kun siirtymien oletetaan olevan pieniä.

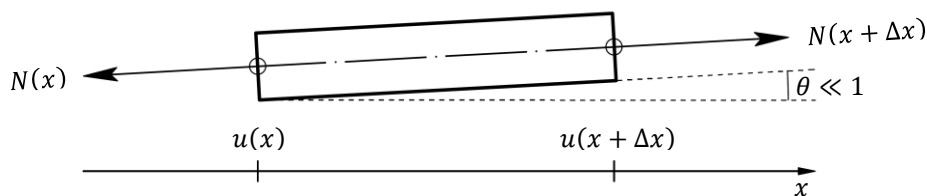
$$\cos \theta = \frac{L + (u_3 - u_1)}{L} \approx 1 \quad (53)$$

$$\sin \theta = \frac{u_4 - u_2}{L} \approx \theta \quad (54)$$

Tarkastellaan nyt kahta pistettä, jotka sijaitsevat kuormittamattoman sauvan kohdissa x ja $x + \Delta x$. Niiden kautta kulkevat y -akselin suuntaiset suorat leikkaavat sauvasta differentiaalisen elementin. Kuormitus aiheuttaa siihen joko positiivisen tai negatiivisen venymän, ja tarkasteltavien pisteiden siirtymiksi saadaan $u(x)$ ja $u(x + \Delta x)$ kuvan 27 mukaisesti. Koska absoluuttikulma $\theta \ll 1$ on pieni, approksimaation (53) perusteella differentiaalisen alkion pituuden muutos voidaan hyvällä tarkkuudella laskea kaavasta (55). Näin venymän lausekkeeksi saadaan tulos (56), joka vastaa lineaarisen teoriaosuuden tulosta (2).

$$\Delta u = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\cos \theta} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{1} = u(x + \Delta x) - u(x) \quad (55)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (56)$$



KUVA 27. Kiertyneen sauvaelementin differentiaalinen pala (Lampimäki 2014-02-08)

Tuloksen (56) vuoksi sauvaan kohdistuva normaalivoima lasketaan yhtälöstä (57), joka on ekvivalentti kaavan (6) kanssa. Elementtivoimia kuvaavaksi yhtälöksi saadaan tulos (58), joka vastaa muodoltaan kaavaa (11). Kun normaalivoiman suuruus on vakio solmupisteiden välillä, elementtivoimat voidaan edelleen pakata matriisiyhtälöön (59) tai lyhyemmin muotoon (60).

$$N(x) = A\sigma_x = EA\varepsilon_x = EA \frac{du}{dx} \quad (57)$$

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} = EA \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L} (u_3 - u_1) \quad (58)$$

$$-P_1 = P_3 \quad \wedge \quad -P_2 = P_4$$

$$N(x) = \frac{EA}{L}(u_3 - u_1)$$

$$P_1 = -N(0) \cos \theta \approx -N = -\frac{EA}{L}(u_3 - u_1) = \frac{EA}{L}(u_1 - u_3)$$

$$P_2 = -N(0) \sin \theta \approx -N\theta \approx -N \frac{u_4 - u_2}{L} = \frac{N}{L}(u_2 - u_4)$$

$$P_3 = N(L) \cos \theta \approx N = \frac{EA}{L}(u_3 - u_1)$$

$$P_4 = N(L) \sin \theta \approx N\theta \approx N \frac{u_4 - u_2}{L} = \frac{N}{L}(u_4 - u_2)$$

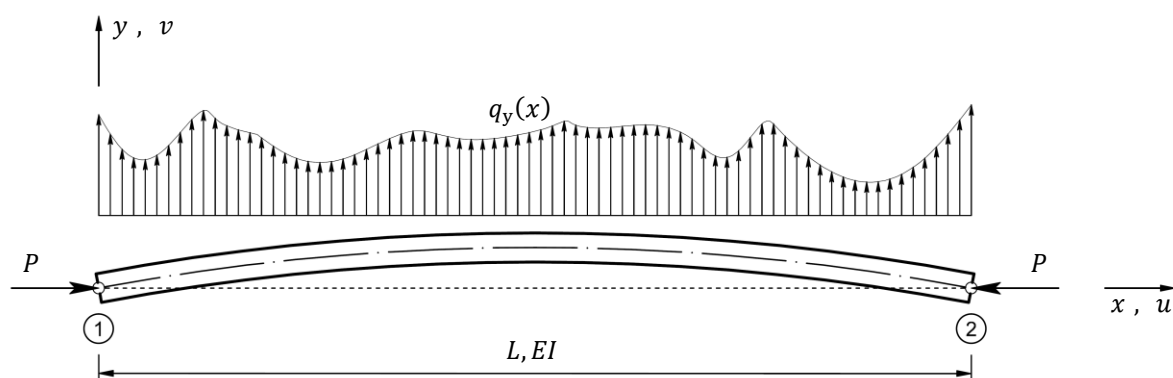
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & N/L & 0 & -N/L \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & -N/L & 0 & N/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$[P] = [K^e + K^\sigma][u] \quad (60)$$

Yhtälö (60) on hyvin samantapainen kuin yhtälö (14). Matriisi $[K^e]$ kuvaa lineaarisen elementtimenetelmän mukaisen sauvan jäykkyyden. Nyt se vain on laajennettu neljän vapausasteen mukaiseksi Matriisi $[K^\sigma]$ puolestaan kuvaa normaalivoiman vaikutuksen ja siitä aiheutuvan muodonmuutoksen. Toisin sanoen normaalivoimaa pidetään elementin jäykkyyteen vaikuttavana parametrina.

Jos yhtälöön (59) sijoitetaan normaalivoiman arvo (58), jäykkymatriisi muodostuu osittain tuntemattomista siirtymäsuureista. Yhtälöryhmästä tulee epälineaarinen, eikä sitä voi ratkaista perinteisillä menetelmillä. Sen sijaan kaavassa (59) voidaan käyttää keskimääräistä normaalivoiman arvoa, kun aksiaalisen jännityksen vaihtelu on vähäistä.

4.2 Palkkielementin puristustaivutus



KUVA 28. Puristustaivutettu palkkielementti (Lampimäki 2014-02-09)

Kuva 28 havainnollistaa, kuinka pystysuuntainen kuorma $q_y(x)$ jakaantuu mielivaltaisesti lokaalien solmupisteiden ① ja ② välille ja kuinka alun perin täysin suoraa palkkia puristetaan voimalla P . Ne yhdessä vääristävät palkin alkuperäistä muotoa, ja siksi palkkia sanotaan osuvasti puristustaivuteksi. Palkin kimmoviiva taipuu kuormitustasossaan käyräksi kuvan 28 osoittamalla tavalla.

Aliluvun 2.3 mukaiset teknisen palkkiteorian perusolettamukset pätevät toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässäkin. Ensinnäkin siirtymäkenttä on loiva ($\theta \approx dv/dx \ll 1$). Toiseksi materiaalin jännityksen ja venymän välinen yhteys on lineaarinen. Kolmanneksi leikkausvoiman aiheuttama palkin poikkileikkauksen kiertyminen on vähäistä. Toisin sanoen palkki toimii riittävällä tarkkuudella Bernoullin hypoteesin mukaisesti. Kuormituksen kasvaessa palkin poikkileikkaus säilyy palkin pituus-
säikeiden normaalin suuntaisena tasona.

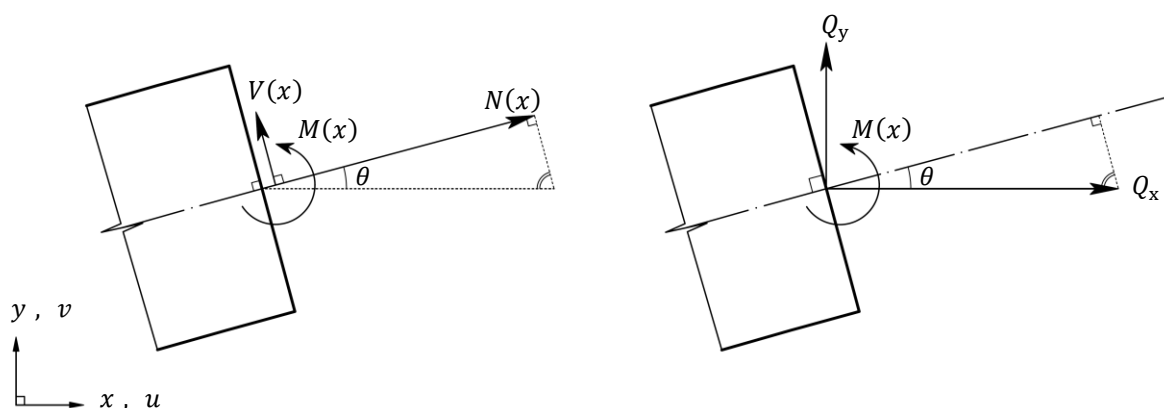
Teknisen palkkiteorian perusolettamusten voimassaolosta seuraa laskennan kannalta hyödylliset tulokset. Kaavat (19) ja (20) nimittäin pätevät sekä lineaarisessa että toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässä, eikä niille siis tarvitse johtaa korvaavia lausekkeita. On hyvä huomata, että taivutusjännitys σ_x kuvaa jännityksen palkin pituussuuntaisessa kuidussa, joka kuormittamattomana on yhdensuuntainen globaalin koordinaatiston x -akselin kanssa kuvan 28 mukaisessa tilanteessa. Näin ollen kaavat (24) ja (25) pätevät yhä riittävällä tarkkuudella. Kootaan aliluvussa 2.3 johdetut tulokset kaavoihin (61) - (64).

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (61)$$

$$\sigma_x = E \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \right) \quad (62)$$

$$N = N(x) = EA \frac{du_0}{dx} \quad (63)$$

$$M = M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (64)$$



KUVA 29. Deformoituneen palkin poikkileikkauksen voimakomponentit (Lampimäki 2014-02-13)

Tutkitaan deformatiiviseen palkin mielivaltaisen poikkileikkauksen voimasuureita kuvan 29 avulla. Kuvasta nähdään, että palkin poikkileikkaus kiertyy kulman θ verran positiiviseen suuntaan, ja siksi poikkileikkauksen voimakomponentit ilmaistaan globaalin koordinaatiston akselien suuntaisten komponenttien Q_x ja Q_y avulla. Suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusteella poikkileikkauksen rasiusten resultantit lasketaan kaavoista (65) - (67). Yhteys (67) pätee kaavan (46) perusteella. Kiertymä tai momentti ei siis muutu koordinaatistoa kierrettäessä.

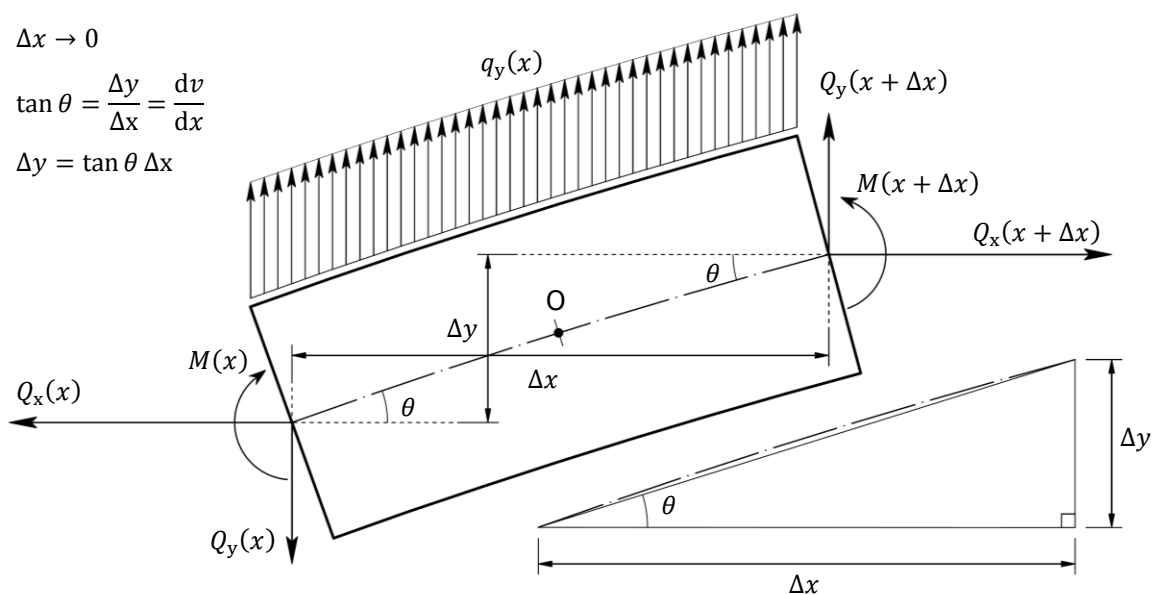
$$N(x) = Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta \quad (65)$$

$$V(x) = -Q_x \sin \theta + Q_y \cos \theta \quad (66)$$

$$M(x) = M(x) \quad (67)$$

Tutkitaan taipuneen palkin differentiaalipalaa alla olevan kuvan 30 mukaisessa tilanteessa. Tasossa sillä on kolme liikemahdollisuutta. Palkki taipuu positiiviseen suuntaan, ja sen poikkileikkaukset tarkasteltavissa pisteissä kiertyvät kulman $\theta \ll 1$ verran positiiviseen suuntaan.

Kuvan 30 tilanne muistuttaa kuvassa 6 näytettyä tilannetta. Erona nyt on se, että vaakasuuntaiset voimakomponentit $Q_x(x)$ ja $Q_x(x + \Delta x)$ aiheuttavat momenttia palkin differentiaalisen elementin keskipisteen O suhteen. Ne aiheuttavat lisätaipuman toisin kuin lineaarisen teorian mukaisessa vastaavassa tapauksessa. Niiden momenttivarren pituudeksi saadaan $\Delta y/2 = \tan \theta \Delta x/2$, kun $\Delta x \rightarrow 0$. Annettujen lähtötietojen perusteella muodostetaan tasapainoyhtälöt, joiden raja-arvotarkastelu antaa tulokset (68) - (70). Tulokseen (70) päädytään siten, että toiseen potenssiin korotetut termit jätetään merkityksettöminä huomioimatta.



KUVA 30. Puristustaivutetun palkin differentiaalipala (Lampimäki 2014-02-14)

$$\rightarrow -Q_x(x) + Q_x(x + \Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q_x(x + \Delta x) - Q_x(x)}{\Delta x} = \frac{dQ_x}{dx} = 0 \quad (68)$$

$$\uparrow -Q_y(x) + Q_y(x + \Delta x) + q_y(x) \cdot \Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q_y(x + \Delta x) - Q_y(x) + q_y(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q_y(x + \Delta x) - Q_y(x)}{\Delta x} + q_y(x) = \frac{dQ_y}{dx} + q_y(x) = 0 \quad (69)$$

$$\circlearrowleft -M(x) + M(x + \Delta x) + Q_y(x) \cdot \frac{\Delta x}{2} + Q_y(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{2} - Q_x(x) \cdot \frac{\tan \theta \Delta x}{2} - Q_x(x + \Delta x) \cdot \frac{\tan \theta \Delta x}{2} = 0$$

$$\circlearrowleft -M(x) + M(x + \Delta x) + [Q_y(x) + Q_y(x + \Delta x)] \frac{\Delta x}{2} - [Q_x(x) + Q_x(x + \Delta x)] \frac{\tan \theta \Delta x}{2} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} + \frac{Q_y(x)\Delta x}{\Delta x} - \frac{Q_x(x)\tan \theta \Delta x}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} + Q_y - Q_x \frac{dv}{dx} = 0 \quad (70)$$

Palkin differentiaalipalaa puristava voima Q_x ratkaistaan suoraan yhtälöstä (68). Sen normaalin suuntainen voimakomponentti Q_y saadaan laskettua kaavalla (72), kun huomioidaan yhteydet (64) ja (71). Yhtälöiden (69) ja (72) yhdistäminen antaa puristustaivutetun palkkielementin perusdifferentiaaliyhtälön (73). Vertaamalla sitä lineaarisen elementtimenetelmän kaavaan (30) havaitaan, että toisen kertaluvun teorian huomioivassa elementtimenetelmässä termi $Pd^2v/dx^2 = Pv''(x)$ kuvaa elementin puristuksesta aiheutuvan lisätaipuman. Mikäli elementin taivutusjäykkyys valitaan vakioksi, perusdifferentiaaliyhtälö sievenee muotoon (74).

$$Q_x = -P \quad (71)$$

$$\frac{dM}{dx} + Q_y - Q_x \frac{dv}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_y = -\frac{dM}{dx} + Q_x \frac{dv}{dx} = -\frac{dM}{dx} - P \frac{dv}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) - P \frac{dv}{dx} \quad (72)$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left[-\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) - P \frac{dv}{dx} \right] + q_y(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) + P \frac{d^2v}{dx^2} - q_y(x) = 0 \quad (73)$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + P \frac{d^2v}{dx^2} - q_y(x) = 0 \quad (74)$$

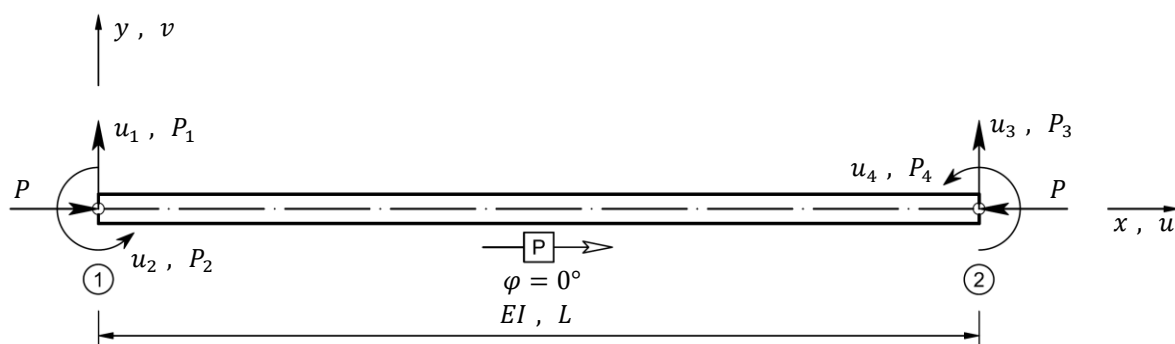
Puristustaivutetun palkkielementin aksiaalisen kuormituksen vaikutus kuvataan differentiaaliyhtälöllä (75), joka sievenee muotoon (76) sillä edellytyksellä, että normaalijäykkyys on vakio. Tulokseen (75) päädytään yhdistämällä yhteydet (53), (63) ja kuvan 29 perusteella johdettu yhteys (77).

$$\frac{dQ_x}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du_0}{dx} \right) = 0 \quad (75)$$

$$EA \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0 \quad (76)$$

$$Q_x = N \cos \theta + V \sin \theta \approx N \quad (77)$$

4.3 Neljän vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti



KUVA 31. Neljän vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti (Lampimäki 2014-02-18)

Tarkastellaan kuvan 31 palkkia, jonka taivutusjäykkyys valitaan vakioksi. Siksi sen taipuma ratkaistaan neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä (74). Käyttämällä merkintätapaa (78) saadaan taipumafunktion $v(x)$ yleinen muoto (79), jossa A, B, C ja D merkitsevät integraalivakioita. Koska nyt tarkastellaan palkin puristustaivutusta, aksiaalinen voima $P \geq 0$ vastaa puristusta.

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad , \quad P \geq 0 \quad (78)$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} - q_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v}{dx^2} - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$w = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

$$w = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$v(x) = -\frac{C_1 \cos(kx)}{k^2} - \frac{C_2 \sin(kx)}{k^2} + C_3 x + C_4$$

$$A = -\frac{C_1}{k^2}, \quad B = -\frac{C_2}{k^2}, \quad C = C_3, \quad D = C_4$$

$$v(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + Cx + D \quad (79)$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = -Ak \sin(kx) + Bk \cos(kx) + C \quad (80)$$

$$v''(x) = \frac{d^2v}{dx^2} = -Ak^2 \cos(kx) - Bk^2 \sin(kx) \quad (81)$$

$$v'''(x) = \frac{d^3v}{dx^3} = Ak^3 \sin(kx) - Bk^3 \cos(kx) \quad (82)$$

Kuvan 31 mukaisen puristustaivutetun elementin taivutusmomentti lasketaan sijoittamalla lausekkeeseen (64) taipumafunktion toisen derivaatan yleinen muoto (81). Poikkileikkauksen y -akselin suuntainen rasituskomponentti sen sijaan saadaan siten, että kaavaan (72) sijoitetaan taipumafunktion kolmannen derivaatan yleinen ratkaisu (82) sekä kertoimen k arvo kaavasta (78).

$$M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2} = EI[-Ak^2 \cos(kx) - Bk^2 \sin(kx)] \quad (83)$$

$$Q_y(x) = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) - P \frac{dv}{dx} = -EI \frac{d^3v}{dx^3} - EI \frac{P}{EI} \frac{dv}{dx} = EI \left(-\frac{d^3v}{dx^3} - k^2 \frac{dv}{dx} \right)$$

$$Q_y(x) = EI[-Ak^3 \sin(kx) + Bk^3 \cos(kx) + Ak^3 \sin(kx) - Bk^3 \cos(kx) - Ck^2] = -EICK^2 \quad (84)$$

Haetaan ratkaisua, jossa reunaehdot ovat $u_1 = v(0)$, $u_2 = v'(0)$, $u_3 = v(L)$ ja $u_4 = v'(L)$. Siirtymien yleiset ratkaisut saadaan siis yhtälöistä (79) ja (80), kun muuttujan x paikalle sijoitetaan elementin päätepisteitä vastaavien pituuskoordinaattien arvot. Merkitään trigonometrisia funktioita lyhyesti $c = \cos(kL)$ ja $s = \sin(kL)$, ja pakataan siirtymäfunctiot matriisimuotoon (85).

$$u_1 = A \cos(k \cdot 0) + B \sin(k \cdot 0) + C \cdot 0 + D = A + D$$

$$u_2 = -Ak \sin(k \cdot 0) + Bk \cos(k \cdot 0) + C = Bk + C$$

$$u_3 = A \cos(k \cdot L) + B \sin(k \cdot L) + C \cdot L + D = A \cos(kL) + B \sin(kL) + CL + D$$

$$u_4 = -Ak \sin(k \cdot L) + Bk \cos(k \cdot L) + C = -Ak \sin(kL) + Bk \cos(kL) + C$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(L) \\ v'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ \cos(kL) & \sin(kL) & L & 1 \\ -k \sin(kL) & k \cos(kL) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ c & s & L & 1 \\ -ks & kc & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (85)$$

Jotta siirtymäfunktioiden yksityisratkaisut saadaan selville, integraalivakiot täytyy ratkaista. Ratkaisussa voidaan hyödyntää Gaussin eliminointimenetelmää tai ongelman ratkaisuun soveltuvaa tietokoneohjelmistoa. Joka tapauksessa integraalivakioiden arvoiksi saadaan matriisiyhtälön (86) mukaiset tulokset.

$$A = -\frac{k(1-c)u_1 - (kLc-s)u_2 - k(1-c)u_3 - (s-kL)u_4}{k(2c+kLs-2)}$$

$$B = \frac{ksu_1 + (kLs+c-1)u_2 - ks u_3 + (1-c)u_4}{k(2c+kLs-2)}$$

$$C = -\frac{k^2su_1 + k(1-c)u_2 - k^2su_3 + k(1-c)u_4}{k(2c+kLs-2)}$$

$$D = \frac{k(kLs+c-1)u_1 + (s-kLc)u_2 - k(1-c)u_3 + (kL-s)u_4}{k(2c+kLs-2)}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{k(2c+kLs-2)} \begin{bmatrix} -k(1-c) & kLc-s & k(1-c) & s-kL \\ ks & kLs+c-1 & -ks & 1-c \\ -k^2s & -k(1-c) & k^2s & -k(1-c) \\ k(kLs+c-1) & s-kLc & -k(1-c) & kL-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Seuraavaksi ratkaistaan solmupistevoimat P_1 , P_2 , P_3 ja P_4 kuvan 31 mukaisessa tapauksessa. Voimat P_1 ja P_3 ratkaistaan yhtälöstä (84), kun taas P_2 ja P_4 saadaan yhtälöstä (83). Muuttujan x paikalle sijoitetaan elementin alkua- ja loppupistettä vastaavat pituuskoordinaatin arvot, ja integraalivakiot korvataan yhteyden (86) mukaisilla arvoilla. Tuloksena saadaan matriisiyhtälö (87), johon ratkaistujen voimakomponenttien arvot tiivistetään ja joka edelleen kirjoitetaan lyhyesti $[P] = [K^e][u]$.

$$P_1 = -Q_y(0) = -(-EICK^2) = EICK^2$$

$$= \frac{EI}{2(1-c) - kLs} [k^3su_1 + k^2(1-c)u_2 - k^3su_3 + k^2(1-c)u_4]$$

$$P_2 = -M(0) = -EI[-Ak^2 \cos(k \cdot 0) - Bk^2 \sin(k \cdot 0)] = EIAk^2$$

$$= \frac{EI}{2(1-c) - kLs} [k^2(1-c)u_1 + k(s-kLc)u_2 - k^2(1-c)u_3 + k(kL-s)u_4]$$

$$P_3 = Q_y(L) = -EICk^2$$

$$= \frac{EI}{2(1-c) - kLs} [-k^3su_1 - k^2(1-c)u_2 + k^3su_3 - k^2(1-c)u_4]$$

$$P_4 = M(L) = EI[-Ak^2 \cos(kL) - Bk^2 \sin(kL)]$$

$$= \frac{EI}{2(1-c) - kLs} [k^2(1-c)u_1 + k(kL-s)u_2 - k^2(1-c)u_3 + k(s-kLc)u_4]$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{2(1-c) - kLs} \begin{bmatrix} k^3s & k^2(1-c) & -k^3s & k^2(1-c) \\ k^2(1-c) & k(s-kLc) & -k^2(1-c) & k(kL-s) \\ -k^3s & -k^2(1-c) & k^3s & -k^2(1-c) \\ k^2(1-c) & k(kL-s) & -k^2(1-c) & k(s-kLc) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Otetaan käyttöön stabiilisuusfunktiot (88) - (92). Niiden avulla elementtivoimia kuvaava yhtälö (87) sievenee muotoon (93). Saatu tulos muistuttaa hyvin paljon lineaarisessa teoriaosuudessa saatua tulosta (38). Vertaamalla keskenään kaavoja (38) ja (93) havaitaan, että stabiilisuusfunktiot kuvaavat elementtiä puristavasta voimasta P aiheutuvaa lisätaipumaa kuvan 31 mukaisessa tilanteessa. Ne siis pätevät vain ja ainoastaan tilanteessa, jossa elementti on puristettu.

$$\phi_1 = \frac{kL}{2} \cot\left(\frac{kL}{2}\right), \quad \cot\left(\frac{kL}{2}\right) = \left[\tan\left(\frac{kL}{2}\right)\right]^{-1} \quad (88)$$

$$\phi_2 = \frac{(kL)^2}{12(1-\phi_1)} \quad (89)$$

$$\phi_3 = \frac{\phi_1}{4} + \frac{3\phi_2}{4} \quad (90)$$

$$\phi_4 = -\frac{\phi_1}{2} + \frac{3\phi_2}{2} \quad (91)$$

$$\phi_5 = \phi_1 \phi_2 \quad (92)$$

$$[P] = [K^e][u]$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12\phi_5 & 6L\phi_2 & -12\phi_5 & 6L\phi_2 \\ 6L\phi_2 & 4L^2\phi_3 & -6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 \\ -12\phi_5 & -6L\phi_2 & 12\phi_5 & -6L\phi_2 \\ 6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 & -6L\phi_2 & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Yhtälö (93) huomioi solmupistevoimat, minkä vuoksi elementin alueella vaikuttavat voimat täytyy vielä summata siihen. Kuva 32 havainnollistaa superpositioperiaatteen soveltamista tapauksessa, jossa elementtiä kuormitetaan mielivaltaisesti pystysuuntaisella jakautuneella kuormalla. Ongelma voidaan jakaa kahteen osatapaukseen samalla tavalla kuin aliluvussa 2.4. Ensimmäisessä osatapa-

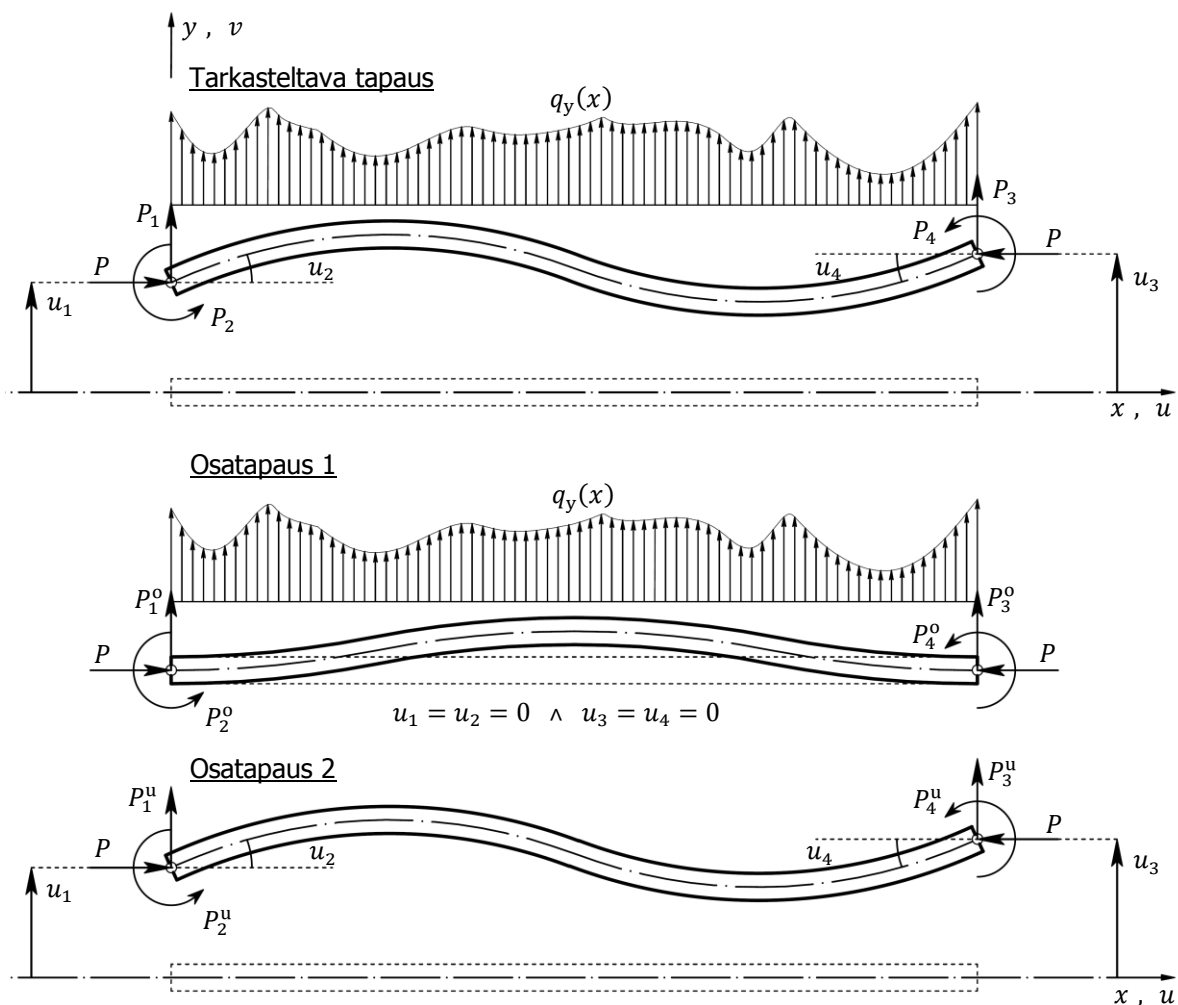
uksessa huomioidaan kuorman $q_y(x)$ vaikutus, kun vapausasteet lukitaan. Toisessa osatapauksessa huomioidaan vapausasteiden mukaiset siirtymät $u_1 \dots u_4$.

Mikäli kuvan 32 mukaisen kuormitustapauksen tasainen kuorma valitaan vakioksi ($q_y(x) = q$), elementin tukireaktioita vastaavat ekvivalentit solmuvoimat eli lukitusvoimat saadaan yhtälöstä (94). Tässä yhteydessä niiden johtaminen sivuutetaan. Lukija voi halutessaan tutustua niiden johtamiseen rakenteiden mekaniikan oppikirjojen avulla.

$$P_1^o = P_3^o = \frac{qL}{2}$$

$$P_2^o = -P_4^o = -\frac{qL^2}{2} \left[\frac{1 + \cos(kL)}{kL \sin(kL)} - \frac{2}{(kL)^2} \right]$$

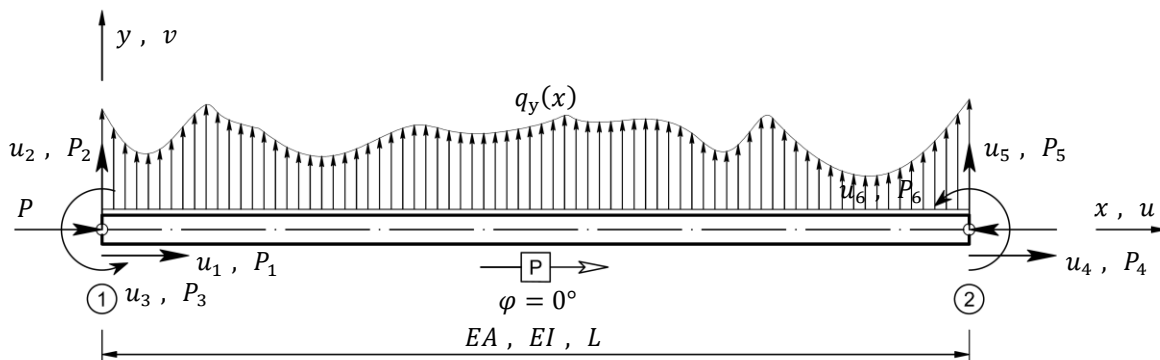
$$\begin{bmatrix} P_1^o \\ P_2^o \\ P_3^o \\ P_4^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_y(0) \\ -M(0) \\ Q_y(L) \\ M(L) \end{bmatrix} = \frac{qL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -L \left[\frac{1 + \cos(kL)}{kL \sin(kL)} - \frac{2}{(kL)^2} \right] \\ 1 \\ L \left[\frac{1 + \cos(kL)}{kL \sin(kL)} - \frac{2}{(kL)^2} \right] \end{bmatrix}. \quad (94)$$



KUVA 32. Puristustaivutetun palkkielementin osatapaukset (Lampimäki 2014-02-18)

4.4 Kuuden vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti

Kuvassa 33 näkyy puristustaivutettu palkkielementti, jolla on kuusi vapausastetta tasotapauksessa. Sen elementtivoimat lasketaan kaavalla (95), joka ottaa huomioon toisen kertaluvun teorian. Kaava muistuttaa lineaarisen elementtimenetelmän mukaista vastaavaa kaavaa (40), mutta nyt sauva- ja palkkivaikutus on kytketty toisiinsa. Toisin sanoen elementin puristus aiheuttaa taipumaa poikittaisen kuormien lisäksi. Kahdesta tai useammasta elementistä muodostuvan rakenteen matemaattinen malli muodostetaan sijoittelusummaamalla, kuten lineaarisessakin menetelmässä.



KUVA 33. Kuuden vapausasteen puristustaivutettu palkkielementti (Lampimäki 2014-02-18)

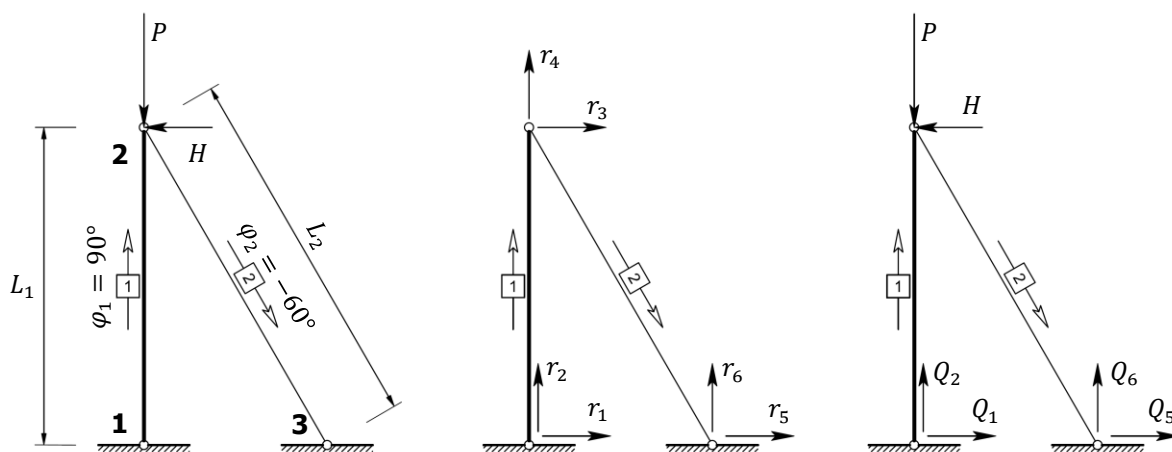
$$[P] = [K^e][u] + [P^0]$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\phi_5/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 & 0 & -12EI\phi_5/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & 6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L & 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 2EI\phi_4/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\phi_5/L^3 & -6EI\phi_2/L^2 & 0 & 12EI\phi_5/L^3 & -6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & 6EI\phi_2/L^2 & 2EI\phi_4/L & 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \\ P_5^0 \\ P_6^0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

5 ESIMERKKI SAUVARAKENTEEN TOISEN KERTALUVUN TEORIAN FEM-LASKENNASTA

Toisen kertaluvun teorian FEM-laskennassa elementtien aksiaalisten voimien suuruutta ei tunneta, joten ongelman ratkaisu edellyttää iterointia. Ensinnäkin suoritetaan laskenta lineaarisella menetelmällä. Saatuja voimasuureita käytetään epälineaaristen elementtijäykkyyssmatriisien muodostamisessa. Mikäli uudet aksiaaliset voimat eroavat merkittävästi ensin lasketuista arvoista, laskenta suoritetaan uudelleen.

5.1 Sauvarakenteen laskentamalli



KUVA 34. Sauvarakenteen laskentamalli, siirtymät ja tukireaktiot (Lampimäki 2014-03-05)

Havainnollistetaan epälineaarista FEM-laskentaa kuvan 34 mukaisella sauvarakenteella, jonka molemmat elementit käsitellään epälineaarina. Valitaan puristetun elementin profiiliksi IPE 200 ja vedetyn elementin profiiliksi 16 mm:n terästanko. Nivelellinen tuenta antaa laskennan reunaehdoiksi $r_1 = r_2 = 0$ ja $r_5 = r_6 = 0$. Globaalisolmun 2 siirtymäkomponentit ja globaalisolmujen 1 ja 3 tukireaktiokomponentit täytyy siis ratkaista iteroimalla. Erityisesti kannattaa huomata, että elementin 2 kiertokulma on negatiivinen. Jos välttämättä haluttaisiin käyttää positiivista kulman arvoa, voitaisiin merkitä kiertokulmaksi $\varphi_2 = 300^\circ$. Käytetään kuitenkin kuvan 34 mukaisia lähtötietoja, ja kootaan laskennassa käytettävät lukuarvot taulukkoon 9.

TAULUKKO 9. Laskennassa käytettävät lukuarvot

Selite	Symboli	Elementti 1	Elementti 2	Yksikkö
Globaali kiertokulma	φ_i	90,000	-60,000	°, aste
Kosinifunktio	$\cos \varphi_i$	0,000	0,500	-
Sinifunktio	$\sin \varphi_i$	1,000	-0,866	-
Elementin pituus	L_i	3,000	3,464	m
Kimmokerroin	E_i	2,000	2,000	10^{11} N/m ²
Poikkipinta-ala	A_i	2,848	0,201	10^{-3} m ²
Vaakakuorma	H	50,000	-	10^3 N
Pystykuorma	P	1200,000	-	10^3 N

5.2 Sauvarakenteen lineaarinen ratkaisu

Lineaarinen FEM-laskenta suoritetaan luvussa 2 esitettyjen periaatteiden mukaisesti. Erona nyt on vain se, että elementit ovat aksiaalisesti kuormitettuja sauvoja. Niiden globaalit jäykkyyismatriisit lasketaan kaavasta (96). Tulokseen päädytään kaavan (47) nojalla, kun muuntomatriisi $[A]$ yhdistetään kaavoista (41) ja (42) neljää vapausastetta vastaavaksi 4×4 -matriisiksi.

$$[K^e] = [A]^T [\bar{K}^e] [A]$$

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$[K]^{①} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{②} = \frac{E_2 A_2}{4L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 A_1 / L_1 & 0 & -E_1 A_1 / L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 A_2 / (4L_2) & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & -E_2 A_2 / (4L_2) & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1 / L_1 & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & E_1 A_1 / L_1 + 3E_2 A_2 / (4L_2) & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & -3E_2 A_2 / (4L_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_2 A_2 / (4L_2) & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & E_2 A_2 / (4L_2) & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & -3E_2 A_2 / (4L_2) & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & 3E_2 A_2 / (4L_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineaarinen FE-malli muodostetaan suoraan siten, että globaalista jäykkyyismatriisista ja siirtymävektorista poistetaan laskennan kannalta tarpeettomat alkioit. Sama toimenpide tehtiin myös aliluvussa 3.7, minkä vuoksi mastopilarikehän matemaattinen malli voitiin tiivistää kuvassa 20 esitetyllä tavalla. Rakenteen jäykkyyismatriisin $[K]$ sarakkeet 1 - 2 ja 5 - 6 sekä niitä vastaavat siirtymävektorin alkioit voidaan poistaa, koska reunaehtojen vuoksi ne eivät vaikuta tuntemattomien solmupistemuuuttujien ratkaisuun. Lisäksi todetaan, että elementtien alueella ei ole kuormia, joten lineaarinen FE-malli supistuu muotoon $[K][r] = [R]$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1 / L_1 \\ E_2 A_2 / (4L_2) & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) \\ -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & E_1 A_1 / L_1 + 3E_2 A_2 / (4L_2) \\ -E_2 A_2 / (4L_2) & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) \\ \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & -3E_2 A_2 / (4L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ -H \\ -P \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

$$[r] = [K]^{-1}[R]$$

$$\begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 A_2 / (4L_2) & -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) \\ -\sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & E_1 A_1 / L_1 + 3E_2 A_2 / (4L_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -H \\ -P \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -28,966 \\ -6,776 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$r_3 = -\left(\frac{3L_1}{E_1 A_1} + \frac{4L_2}{E_2 A_2}\right)H - \frac{\sqrt{3}L_1}{E_1 A_1}P = -\frac{1}{k_1 k_2}[(4k_1 + 3k_2)H + \sqrt{3}k_2 P]$$

$$r_4 = -\frac{L_1}{E_1 A_1}(\sqrt{3}H + P) = -\frac{1}{k_1}(\sqrt{3}H + P)$$

$$[R] = [K][r]$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1 / L_1 \\ -E_2 A_2 / (4L_2) & \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) \\ \sqrt{3} E_2 A_2 / (4L_2) & -3E_2 A_2 / (4L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_1 r_4 \\ -k_2(r_3 - \sqrt{3}r_4)/4 \\ k_2(\sqrt{3}r_3 - 3r_4)/4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1286,603 \\ 50,000 \\ -86,603 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Solmupistemuuuttujat on ratkaistu oikein, koska tasapainoyhtälöiden summaksi saadaan nolla, ja laskenta voidaan viedä loppuun. Ratkaistaan lopuksi elementtien aksiaaliset rasitukset N_1 ja N_2 . Tiedetään, että tässä yhteydessä ei ole tarpeen ratkaista elementtivoimia. Sauvojen rasitukset voidaan nimittäin ratkaista suoraan Pythagoraan lauseella, kun tukireaktiot tunnetaan.

$$\rightarrow \sum F_x = -H + Q_1 + Q_5 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = -P + Q_2 + Q_6 = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_{Gn1} = HL_1 + Q_6 \frac{L_1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \\ \sqrt{Q_5^2 + Q_6^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|k_1 r_4| \\ |k_2(r_3 - \sqrt{3}r_4)/2| \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1286,603 \\ 100,000 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

5.3 Sauvarakenteen epälineaarinen ratkaisu

Lineaarisen menetelmän mukaisia arvoja N_1 ja N_2 tarvitaan epälinearisessa elementtilaskennassa. Niille lasketut arvot sijoitetaan elementtien jäykkyyso-matriiseihin ensimmäisellä iterointikerralla. Laskentaprosessin tuloksena normaalivoimille saadaan uudet arvot, jotka sijoitetaan uudelleen toisen kertaluvun teorian huomioiviin jäykkyyso-matriiseihin. Iterointia jatketaan, kunnes eri iterointikerroilla laskettujen normaalivoimien muutos lähestyy nollaa. Ratkaisu on löytynyt, kun $\Delta N_i \approx 0$.

Lasketaan sauvojen geometrisen epälineaarisuuden huomioivat globaalit jäykkymatriisit kaavalla (97), jossa käytetään merkintöjä $c = \cos \varphi$ ja $s = \sin \varphi$. Tulokseen päädytään soveltamalla kaavaa (47). Nyt jäykkymatriisiin paikalle sijoitetaan kaavan (59) mukainen jäykkymatriisi, ja lasketaan tulo $[K^e + K^\sigma] = [A]^T[\bar{K}^e + \bar{K}^\sigma][A]$.

$$[K^e + K^\sigma] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} c^2 EA + s^2 N & cs(EA - N) & -(c^2 EA + s^2 N) & -cs(EA - N) \\ cs(EA - N) & s^2 EA + c^2 N & -cs(EA - N) & -(s^2 EA + c^2 N) \\ -(c^2 EA + s^2 N) & -cs(EA - N) & c^2 EA + s^2 N & cs(EA - N) \\ -cs(EA - N) & -(s^2 EA + c^2 N) & cs(EA - N) & s^2 EA + c^2 N \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$[K_1^e + K_1^\sigma] = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_1 & 0 \\ 0 & E_1 A_1 & 0 & -E_1 A_1 \\ -N_1 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1 & 0 & E_1 A_1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2^e + K_2^\sigma] = \frac{1}{4L_2} \begin{bmatrix} E_2 A_2 + 3N_2 & -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & -(E_2 A_2 + 3N_2) & \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) \\ -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & 3E_2 A_2 + N_2 & \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & -(3E_2 A_2 + N_2) \\ -(E_2 A_2 + 3N_2) & \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & E_2 A_2 + 3N_2 & -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) \\ \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & -(3E_2 A_2 + N_2) & -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2) & 3E_2 A_2 + N_2 \end{bmatrix}$$

Epälineaarinen FE-malli muodostetaan samaan tapaan kuin edellisessä aliluvussa lineaarinen FE-malli. Nyt rakenteen jäykkymatriisi on hieman muuttunut. Kirjoitetaan rakenteen matemaattiseksi malliksi toisen kertaluvun teorian tarkkuudella $[K + K^\sigma][r] = [R]$. Siitä ratkaistaan siirtymä- ja tukireaktiokomponentit samaan tapaan kuin lineaarisella menetelmällä lukuun ottamatta sitä, että saatuja tuloksia tarkennetaan iteroimalla riittävän monta kertaa.

$$\begin{bmatrix} -N_1/L_1 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1/L_1 \\ N_1/L_1 + (E_2 A_2 + 3N_2)/(4L_2) & -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) \\ -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) & E_1 A_1/L_1 + (3E_2 A_2 + N_2)/(4L_2) \\ -(E_2 A_2 + 3N_2)/(4L_2) & \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) \\ \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) & -(3E_2 A_2 + N_2)/(4L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ -H \\ -P \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

$$[r] = [K + K^\sigma]^{-1}[R]$$

$$\begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1/L_1 + (E_2 A_2 + 3N_2)/(4L_2) & -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) \\ -\sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) & (E_1 A_1)/L_1 + (3E_2 A_2 + N_2)/(4L_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -H \\ -P \end{bmatrix}$$

$$[R] = [K + K^\sigma][r]$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1/L_1 & 0 \\ 0 & -E_1 A_1/L_1 \\ -(E_2 A_2 + 3N_2)/(4L_2) & \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) \\ \sqrt{3}(E_2 A_2 - N_2)/(4L_2) & -(3E_2 A_2 + N_2)/(4L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \\ \sqrt{Q_5^2 + Q_6^2} \end{bmatrix}$$

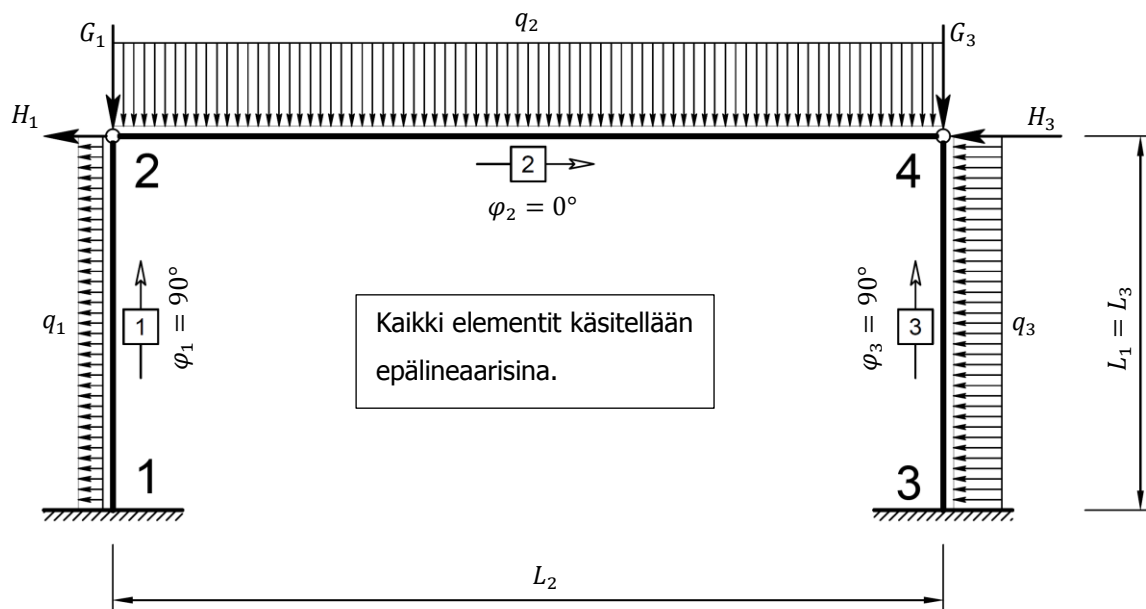
Taulukossa 10 esitetään lineaarisella ja toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmällä lasketut tulokset. Toisen kertaluvun solmupistesuureet lähestyvät rajatta lopullisia arvojaan, mutta jo 4. iteroitakerroksella päästään kolmen desimaalin tarkkuuteen. Rakenne saavuttaa tasapainotilan, eikä iterointia ole tarpeen jatkaa pidemmälle. Lisäksi laskentatuloksista käy ilmi, että toisen kertaluvun voimasuureet voivat olla merkittävästi suuremmat kuin vastaavat lineaariset. Esimerkiksi tässä tapauksessa 16 mm:n terästangon vetorasitus N_2 kasvaa 27,53 % lineaarisella menetelmällä lasketusta arvosta, kun huomioidaan elementtien geometrinen epälineaarisuus.

TAULUKKO 10. Sauvarakenteen lineaariset ja epälineaariset laskentatulokset

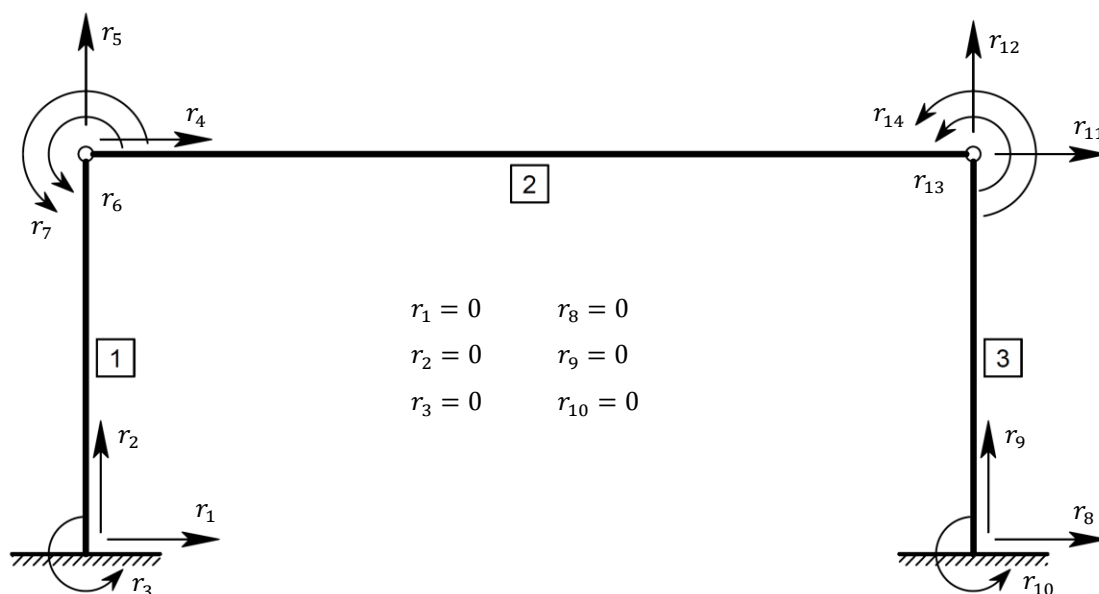
Iteraatioiden lukumäärä n	Gloobalisolmun 2 siirtymät		Elementtien aksiaaliset rasitukset	
	r_3 [mm]	r_4 [mm]	N_1 [kN]	N_2 [kN]
0 (lin)	-28,966	-6,776	-1286,603	100,000
1	-31,616	-6,841	-1298,915	114,731
2	-33,913	-6,899	-1309,861	127,484
3	-33,921	-6,899	-1309,839	127,529
4	-33,921	-6,899	-1309,838	127,527
Δ	-4,955	-0,122	-23,235	27,527
Δ [%]	-17,105	-1,806	-1,806	27,527

6 ESIMERKKI MASTOPILARIKEHÄN TOISEN KERTALUVUN TEORIAN FEM-LASKENNASTA

Luvussa 3 esitettiin mastopilarikehän lineaarinen FEM-laskenta. Tässä luvussa tutkitaan saman rakenteen (kuvat 35 ja 36) siirtymät ja voimasuuret epälineaarilla menetelmällä soveltamalla luvussa 4 esitettyjä periaatteita toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmästä. Esimerkin vuoksi kaikki elementit käsitellään epälineaarisisina, vaikka palkkiin kohdistuva puristusvoima on hyvin pieni valitun profiilin normaalijäykkyyteen nähden. Tässä tapauksessa laskentatulokset eivät oleellisesti muutu, vaikka palkki käsiteltäisiin lineaarisena.



KUVA 35. Mastopilarikehän laskentamalli (Lampimäki 2014-03-22)



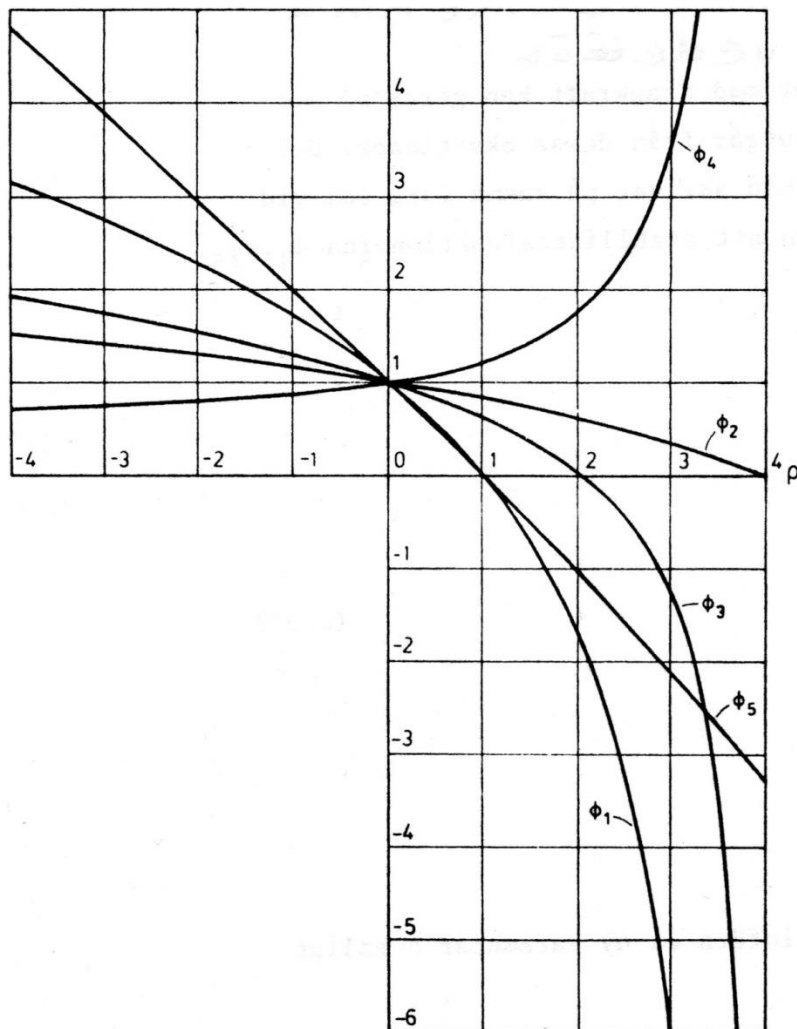
KUVA 36. Mastopilarikehän globaalit siirtymävapausasteet (Lampimäki 2014-03-19)

Taulukossa 11 esitetään epälineaariseen laskentaan valitut lukuarvot elementtikohtaisesti. Taulukossa 5 esitettyjen lähtötietojen lisäksi siihen on koottu lineaarisella menetelmällä laskettujen normaali-voimien sekä kaavojen (78) ja (88) - (92) perusteella laskettujen stabiilisuusfunktioiden arvot.

TAULUKKO 11. Epälineaariseen laskentaan valitut lukuarvot

Selite	Symboli	Elementti 1	Elementti 2	Elementti 3	Yksikkö
Reunaehdot kuvan 36 perusteella	r_1	0	-	-	m
	r_2	0	-	-	m
	r_3	0	-	-	rad
	r_8	-	-	0	m
	r_9	-	-	0	m
	r_{10}	-	-	0	rad
Globaali kiertokulma	φ_i	90,000	0,000	90,000	°, aste
Kosinifunktio	$\cos \varphi_i$	0,000	1,000	0,000	-
Sinifunktio	$\sin \varphi_i$	1,000	0,000	1,000	-
Pituus	L_i	5,400	12,000	5,400	m
IPE-profiilin leveys	b_i	0,150	0,220	0,150	m
IPE-profiilin korkeus	h_i	0,300	0,600	0,300	m
Laipan paksuus	$t_{f,i}$	10,700	19,000	10,700	10^{-3} m
Uuman paksuus	$t_{w,i}$	7,100	12,000	7,100	10^{-3} m
Pyörityssäde	r_i	15,000	24,000	15,000	10^{-3} m
Poikkipinta-ala	A_i	5,381	15,600	5,381	10^{-3} m ²
Jäyhyysmomentti	$I_{y,i}$	0,836	9,208	0,836	10^{-4} m ⁴
Kimmokerroin	E_i	2,100	2,100	2,100	10^{11} N/m ²
Normaalijäykkyys	$E_i A_i$	1,130	3,276	1,130	10^9 N
Taivutusjäykkyys	$E_i I_i$	17,556	193,410	17,556	10^6 m ²
Omapaino	G_i	2,300	14,400	2,300	10^3 N
Tasainen kuorma	q_i	1,500	25,000	3,000	10^3 N/m
Lisävaakavoima	H_i	1,400	-	2,400	10^3 N
Puristusvoima	$N_{i,LIN}$	152,300	2,018	152,300	10^3 N
$k_i = \sqrt{N_{i,LIN}/(E_i I_i)}$	k_i	0,093162	0,003230	0,093162	1/m
Stabiilisuusfunktioit, lineaarisen jäykkyys- matriisin kertoimet	ϕ_1	0,978820	0,999875	0,978820	-
	ϕ_2	0,995774	0,999975	0,995774	-
	ϕ_3	0,991536	0,999950	0,991536	-
	ϕ_4	1,004251	1,000025	1,004251	-
	ϕ_5	0,974684	0,999850	0,974684	-

Kuviossa 1 stabiilisuuskäyrien $\phi_1 \dots \phi_5$ kuvaajat esitetään parametrin $\rho = PL^2/(\pi^2 EI)$ funktiona. Elementin puristusta vastaa tilanne, jossa $\rho > 0$. Kuvioista nähdään, että stabiilisuuskäyriä saavat arvon 1, kun $\rho = 0$. Tässä tapauksessa mastopilarikehän pilareille saadaan $\rho \approx 2,56 \cdot 10^{-2}$ ja vastavasti palkille $\rho \approx 1,52 \cdot 10^{-4}$, joten stabiilisuuskäyriä saavat pääsääntöisesti lukua 1 pienemmän arvon. Ne alentavat elementin jäykkyyttä ja lisäävät muodonmuutoksen suuruutta puristuskuormituksen kasvaessa. Stabiilisuuskäyriä voidaan siis ajatella lineaarisen menetelmän jäykkymatriisiin taipumiin vaikuttavien alkioiden kertoimiksi, joilla huomioidaan rakenteen geometrinen epälineaarisuus alentamalla puristetun elementin jäykkyyttä.



KUVIO 1. Stabiilisuuskäyriä kuvaajat (Thelandersson 1984, 218)

6.1 Epälineaariset jäykkymatriisit

Lasketaan epälineaariset jäykkymatriisit kaavan (48) nojalla. Käytetään samoja merkintöjä, mutta lisätään siihen epälineaarisuuden huomioivat tekijät eli stabiilisuuskäyriä. Näin päädytään tulokseen (98), joka on epälineaarisen kuuden vapausasteen palkkielementin globaali jäykkymatriisi tasotapauksessa. Sen alkioiden merkinnät selitetään taulukossa 12. Epälineaarinen globaali jäykkymatriisi voidaan laskea vaiheittain myös kaavalla $[K^e] = [A]^T[\bar{K}^e][A]$, kun matriisiin $[\bar{K}^e]$ paikalle sijoitetaan kaavan (95) mukainen jäykkymatriisi.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\phi_5/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 & 0 & -12EI\phi_5/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & 6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L & 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 2EI\phi_4/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\phi_5/L^3 & -6EI\phi_2/L^2 & 0 & 12EI\phi_5/L^3 & -6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & 6EI\phi_2/L^2 & 2EI\phi_4/L & 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = [A]^T [\bar{K}^e] [A]$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} c^2k_A + s^2k_B & cs(k_A - k_B) & -sk_C & -c^2k_A - s^2k_B & cs(k_B - k_A) & -sk_C \\ cs(k_A - k_B) & s^2k_A + c^2k_B & ck_C & cs(k_B - k_A) & -s^2k_A - c^2k_B & ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_D & sk_C & -ck_C & k_E \\ -c^2k_A - s^2k_B & cs(k_B - k_A) & sk_C & c^2k_A + s^2k_B & cs(k_A - k_B) & sk_C \\ cs(k_B - k_A) & -s^2k_A - c^2k_B & -ck_C & cs(k_A - k_B) & s^2k_A + c^2k_B & -ck_C \\ -sk_C & ck_C & k_E & sk_C & -ck_C & k_D \end{bmatrix} \quad (98)$$

TAULUKKO 12. Epälineaarisen globaalin jäykkyyssmatriisin merkinnät

Trigonometriset funktiot		Epälineaarisen jäykkyyssmatriisin alkio				
$c = \cos \varphi$	$s = \sin \varphi$	$k_A = \frac{EA}{L}$	$k_B = \frac{12EI}{L^3} \phi_5$	$k_C = \frac{6EI}{L^2} \phi_2$	$k_D = \frac{4EI}{L} \phi_3$	$k_E = \frac{2EI}{L} \phi_4$

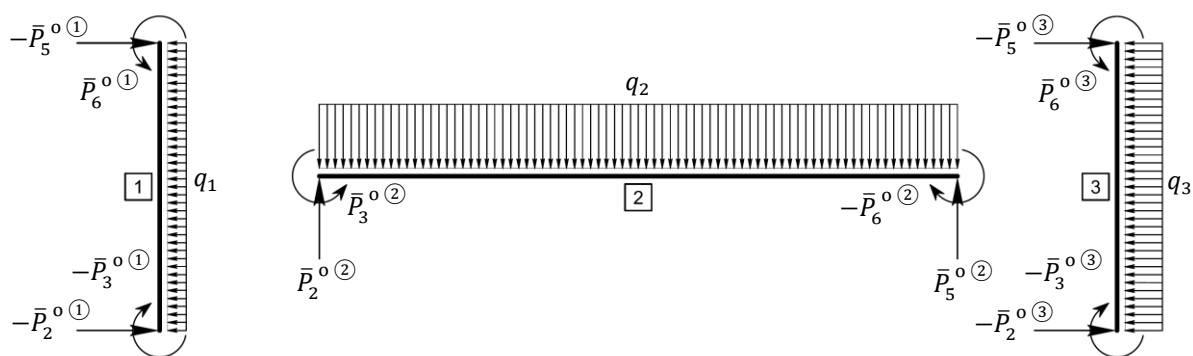
$$[K_1^e] = \begin{bmatrix} 1,30E+06 & 0 & -3,60E+06 & -1,30E+06 & 0 & -3,60E+06 \\ 0 & 2,09E+08 & 0 & 0 & -2,09E+08 & 0 \\ -3,60E+06 & 0 & 1,29E+07 & 3,60E+06 & 0 & 6,53E+06 \\ -1,30E+06 & 0 & 3,60E+06 & 1,30E+06 & 0 & 3,60E+06 \\ 0 & -2,09E+08 & 0 & 0 & 2,09E+08 & 0 \\ -3,60E+06 & 0 & 6,53E+06 & 3,60E+06 & 0 & 1,29E+07 \end{bmatrix}$$

$$[K_2^e] = \begin{bmatrix} 2,73E+08 & 0 & 0 & -2,73E+08 & 0 & 0 \\ 0 & 1,34E+06 & 8,06E+06 & 0 & -1,34E+06 & 8,06E+06 \\ 0 & 8,06E+06 & 6,45E+07 & 0 & -8,06E+06 & 3,22E+07 \\ -2,73E+08 & 0 & 0 & 2,73E+08 & 0 & 0 \\ 0 & -1,34E+06 & -8,06E+06 & 0 & 1,34E+06 & -8,06E+06 \\ 0 & 8,06E+06 & 3,22E+07 & 0 & -8,06E+06 & 6,45E+07 \end{bmatrix}$$

$$[K_3^e] = \begin{bmatrix} 1,30E+06 & 0 & -3,60E+06 & -1,30E+06 & 0 & -3,60E+06 \\ 0 & 2,09E+08 & 0 & 0 & -2,09E+08 & 0 \\ -3,60E+06 & 0 & 1,29E+07 & 3,60E+06 & 0 & 6,53E+06 \\ -1,30E+06 & 0 & 3,60E+06 & 1,30E+06 & 0 & 3,60E+06 \\ 0 & -2,09E+08 & 0 & 0 & 2,09E+08 & 0 \\ -3,60E+06 & 0 & 6,53E+06 & 3,60E+06 & 0 & 1,29E+07 \end{bmatrix}$$

Toisen kertaluvun teorian huomioivat jäykkyyssmatriisit laajennetaan koko rakenteen vapausasteita vastaaviksi 14×14 -matriiseiksi. Mastopilarikehän jäykkyyssmatriisi muodostetaan samalla tavalla kuin aliluvussa 3.6. Sijoittelusummaus antaa tulokseksi kehärakenteen jäykkyyssmatriisin. Sijoittelusumman $[K_2]^{(1)} + [K_2]^{(2)} + [K_2]^{(3)} = [K_2]$ ympäröidyt yläindeksit viitataan elementin numeroon. Lisäksi alaindeksillä tehdään ero lineaariseen elementtimenetelmään.

6.2 Epälineaariset lukitusvoimavektorit



KUVA 37. Elementtien lukitusvoimat paikallisissa koordinaatistoissa (Lampimäki 2014-01-29)

Kuvassa 37 esitetään elementtien lukitusvoimien todelliset suunnat. Etumerkillä ilmaistaan, vastaako voimakomponenttien suunta paikallisten koordinaatistojen positiivisia suuntia. Voimien suunnat määritetään samoin kuin aliluvussa 3.5. Tukimomentit lasketaan kunkin elementin paikalliseen koordinaatistoon, minkä jälkeen ne muunnetaan globaaliin koordinaatistoon kaavalla (51).

Kaavan (94) perusteella lineaarisen menetelmän lukitusvoimat säilyvät lähes ennallaan. Vain tukimomenttien arvot muuttuvat hieman lineaariseen menetelmään nähden. Laskentatulokset eivät siis merkittävästi vääristy, vaikka tukimomentit laskettaisiin suoraan lineaarisen elementtimenetelmän kaavalla $M = \pm qL^2/12$.

Alla olevista laskentatuloksista nähdään, miksi joissakin tapauksissa epälineaarisen elementin tukimomentti voidaan riittävällä tarkkuudella laskea suoraan lineaarisen menetelmän kaavalla. Pilarin tukimomentti kasvaa 0,42 %:ia, ja vastaavasti palkin tukimomentti kasvaa 0,0025 %:ia lineaarisella menetelmällä laskettuun tulokseen nähden.

$$P_3^o(1) = -P_6^o(1) = \frac{qL^2}{2} \left[\frac{1 + \cos(k_1 L_1)}{k_1 L_1 \sin(k_1 L_1)} - \frac{2}{(k_1 L_1)^2} \right] \approx -\frac{q_1 L_1^2}{11,949292} \approx -3,66E+03$$

$$P_3^o(2) = -P_6^o(2) = -\frac{qL^2}{2} \left[\frac{1 + \cos(k_2 L_2)}{k_2 L_2 \sin(k_2 L_2)} - \frac{2}{(k_2 L_2)^2} \right] \approx \frac{q_2 L_2^2}{11,999700} \approx 3,00E+05$$

$$P_3^o(3) = -P_6^o(3) = \frac{qL^2}{2} \left[\frac{1 + \cos(k_3 L_3)}{k_3 L_3 \sin(k_3 L_3)} - \frac{2}{(k_3 L_3)^2} \right] \approx -\frac{q_3 L_3^2}{11,949292} \approx -8,10E+03$$

6.3 Mastopilarikehän epälineaarisen FE-mallin muodostaminen ja ratkaiseminen

ELEMENTIN 1 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(1)}[r_2]^{(1)} = [R_2]^{(1)} - [R^0]^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,30E+06	0	-3,60E+06	-1,30E+06	0	-3,60E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,05E+03
2	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
3	-3,60E+06	0	1,29E+07	3,60E+06	0	6,53E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_3	-3,66E+03
4	-1,30E+06	0	3,60E+06	1,30E+06	0	3,60E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_4^{(1)}$	-1,40E+03	4,05E+03
5	0	-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_5^{(1)}$	-2,30E+03	0
6	-3,60E+06	0	6,53E+06	3,60E+06	0	1,29E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_6^{(1)}$	0	3,66E+03
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ELEMENTIN 2 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(2)}[r_2]^{(2)} = [R_2]^{(2)} - [R^0]^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2,73E+08	0	0	0	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	$u_1^{(2)}$	0	0
5	0	0	0	0	1,34E+06	0	8,06E+06	0	0	0	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	$u_2^{(2)}$	0	1,50E+05
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	$u_3^{(2)}$	0	3,00E+05
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	0	0	0	2,73E+08	0	0	0	$u_4^{(2)}$	0	0
12	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	0	0	0	1,34E+06	0	-8,06E+06	$u_5^{(2)}$	0	1,50E+05
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	6,45E+07	$u_6^{(2)}$	0	-3,00E+05

ELEMENTIN 3 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(3)}[r_2]^{(3)} = [R_2]^{(3)} - [R^0]^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1,30E+06	0	-3,60E+06	-1,30E+06	0	-3,60E+06	0	0	Q_8	8,10E+03
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	Q_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,60E+06	0	1,29E+07	3,60E+06	0	6,53E+06	0	0	Q_{10}	-7,32E+03
11	0	0	0	0	0	0	0	-1,30E+06	0	3,60E+06	1,30E+06	0	3,60E+06	0	$u_4^{(3)}$	-2,40E+03	8,10E+03
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-2,09E+08	0	0	2,09E+08	0	0	$u_5^{(3)}$	-2,30E+03	0
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,60E+06	0	6,53E+06	3,60E+06	0	1,29E+07	0	$u_6^{(3)}$	0	7,32E+03
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MASTOPILARIKEHÄN EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2][r_2] = [R_2] - [R^0]$ TOISEN KERTALUVUN TEORIAN TARKKUUDELLA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,30E+06	0	-3,60E+06	-1,30E+06	0	-3,60E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,05E+03
2	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
3	-3,60E+06	0	1,29E+07	3,60E+06	-2,20E+10	6,53E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_3	-3,66E+03
4	-1,30E+06	0	3,60E+06	2,74E+08	0	3,60E+06	0	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	r_4	-1,40E+03	4,05E+03
5	0	-2,09E+08	0	0	2,11E+08	0	8,06E+06	0	0	0	0	-1,34E+06	0	8,06E+06	r_5	-2,30E+03	1,50E+05
6	-3,60E+06	0	6,53E+06	3,60E+06	0	1,29E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	r_6	0	3,66E+03
7	0	0	0	0	8,06E+06	0	6,45E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	3,22E+07	r_7	0	3,00E+05
8	0	0	0	0	0	0	0	1,30E+06	0	-3,60E+06	-1,30E+06	0	-3,60E+06	0	0	Q_8	8,10E+03
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09E+08	0	0	-2,09E+08	0	0	0	Q_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,60E+06	0	1,29E+07	3,60E+06	0	6,53E+06	0	0	Q_{10}	-7,32E+03
11	0	0	0	-2,73E+08	0	0	0	-1,30E+06	0	3,60E+06	2,74E+08	0	3,60E+06	0	r_{11}	-2,40E+03	8,10E+03
12	0	0	0	0	-1,34E+06	0	-8,06E+06	0	-2,09E+08	0	0	2,11E+08	0	-8,06E+06	r_{12}	-2,30E+03	1,50E+05
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,60E+06	0	6,53E+06	3,60E+06	0	1,29E+07	0	r_{13}	0	7,32E+03
14	0	0	0	0	8,06E+06	0	3,22E+07	0	0	0	0	-8,06E+06	0	6,45E+07	r_{14}	0	-3,00E+05

KUVA 38. Mastopilarikehän toisen kertaluvun teorian FE-malli (Lampimäki 2014-03-20)

Kuvassa 38 esitetty epälineaarisen FE-mallin tuntemattomat ratkaistaan samalla tavalla kuin lineaarisen mallin tuntemattomat iterointia lukuun ottamatta. Tässä tapauksessa laskentasuureiden ratkaistut saadaan aliluvuissa 3.7 ja 3.8 esitettyjen periaatteiden mukaisesti heti ensimmäisellä iterointikierröksellä. Tulokset näkyvät taulukosta 13, jossa vihreällä värillä korostetut voimasuureet vastaavat Frame Analysis -kehäohjelmalla laskettuja arvoja kolmen desimaalin tarkkuudella.

TAULUKKO 13. Epälineaarisen laskennan tulokset

Reunaehdot			Siirtymät			Tukireaktiot		
r_1	0,000	mm	r_4	-21,443	mm	Q_1	11,513	kN
r_2	0,000	mm	r_5	-0,728	mm	Q_2	152,300	kN
r_3	0,000	rad	r_6	0,006	rad	Q_3	-43,568	kNm
r_8	0,000	mm	r_7	-0,009	rad	Q_8	16,587	kN
r_9	0,000	mm	r_{11}	-21,450	mm	Q_9	152,300	kN
r_{10}	0,000	rad	r_{12}	-0,728	mm	Q_{10}	-49,095	kNm
			r_{13}	0,005	rad			
			r_{14}	0,009	rad			
Elementin 1 rasitukset			Elementin 2 rasitukset			Elementin 3 rasitukset		
N_1	152,300	kN	N_1	2,013	kN	N_1	152,300	kN
V_1	-11,513	kN	V_1	150,000	kN	V_1	-16,587	kN
M_1	-43,568	kNm	M_1	0,000	kNm	M_1	-49,095	kNm
N_2	-152,300	kN	N_2	-2,013	kN	N_2	-152,300	kN
V_2	3,413	kN	V_2	150,000	kN	V_2	0,387	kN
M_2	0,000	kNm	M_2	0,000	kNm	M_2	0,000	kNm

Excel-laskelmassa palkin momenttien arvo säilyy nollana, mutta Frame Analysis ilmoittaa palkin päiden momenttien arvoksi 0,038 kNm. Samoin pilareiden yläpäiden leikkausvoiman suuruus eroaa hieman kehäohjelmalla lasketusta. Excelillä laskettuja tuloksia voi verrata kehäohjelman tuloksiin taulukon 14 tai liitteen 2 avulla.

7 MASTOPILARIKEHÄN LASKENTATULOSTEN TARKASTELU

Tässä luvussa tarkastellaan mastopilarikehän lineaarisia ja epälineaarisia laskentatuloksia Excel-pohjalla ja Frame Analysis -kehäohjelmalla laskettuna. Lisäksi verrataan niitä toisiinsa, ja tutkitaan geometrisen epälineaarisuuden vaikutusta laskentasuureisiin. Tulokset kootaan taulukkoon 14.

TAULUKKO 14. Mastopilarikehän lineaariset ja epälineaariset laskentatulokset

Solmun numero	Solmu-piste-suure	Lineaarinen elementtimenetelmä (1. kertaluku)		Epälineaarinen elementtimenetelmä (2. kertaluku)		Yksikkö
		Excel	Frame Analysis	Excel	Frame Analysis	
2	r_4	-19,3078	-19,308	-21,4428	-21,443	mm
	r_5	-0,7278	-0,728	-0,7278	-0,728	mm
	r_6	0,0051	0,005	0,0057	0,006	rad
	r_7	-0,0093	-0,009	-0,0093	-0,009	rad
4	r_{11}	-19,3152	-19,315	-21,4502	-21,451	mm
	r_{12}	-0,7278	-0,728	-0,7278	-0,728	mm
	r_{13}	0,0048	0,005	0,0054	0,005	rad
	r_{14}	0,0093	0,009	0,0093	0,009	rad
1	$N_1^{①}$	152,3000	152,300	152,3000	152,300	kN
	$V_1^{①}$	-11,5175	-11,518	-11,5133	-11,513	kN
	$M_1^{①}$	-40,3246	-40,325	-43,5677	-43,568	kNm
2	$N_2^{①}$	-152,3000	-152,300	-152,3000	-152,300	kN
	$V_2^{①}$	3,4175	3,418	3,4133	4,281	kN
	$M_2^{①}$	0,0000	0,000	0,0000	0,000	kNm
2	$N_1^{②}$	2,0175	2,018	2,0133	2,013	kN
	$V_1^{②}$	150,0000	150,000	150,0000	150,000	kN
	$M_1^{②}$	0,0000	0,000	0,0000	-0,038	kNm
4	$N_2^{②}$	-2,0175	-2,018	-2,0133	-2,013	kN
	$V_2^{②}$	150,0000	150,000	150,0000	150,000	kN
	$M_2^{②}$	0,0000	0,000	0,0000	0,038	kNm
3	$N_1^{③}$	152,3000	152,300	152,3000	152,300	kN
	$V_1^{③}$	-16,5825	-16,582	-16,5867	-16,587	kN
	$M_1^{③}$	-45,8054	-45,805	-49,0949	-49,095	kNm
4	$N_2^{③}$	-152,3000	-152,300	-152,3000	-152,300	kN
	$V_2^{③}$	0,3825	0,382	0,3867	1,212	kN
	$M_2^{③}$	0,0000	0,000	0,0000	0,000	kNm

Taulukko 14 osoittaa, että Excel-taulukkolaskentapohjalla ja kehäohjelmalla lasketut tulokset vastaavat pääosin toisiaan kolmen desimaalin tarkkuudella. Vain epälineaarissa laskentatuloksissa on pieniä eroja. Esimerkiksi Excel-laskussa palkin päiden momentti säilyy nollana sekä lineaarisessa että epälineaarissa laskennassa, kun taas kehäohjelmalla palkin momentiksi saadaan epälineaarissa analyysissä hieman nolasta eroava tulos eli $-M_1^{(2)} = M_2^{(2)} = 0,038 \text{ kNm}$. Joka tapauksessa rakenteen mitoituksen kannalta merkittävät tulokset vastaavat toisiaan.

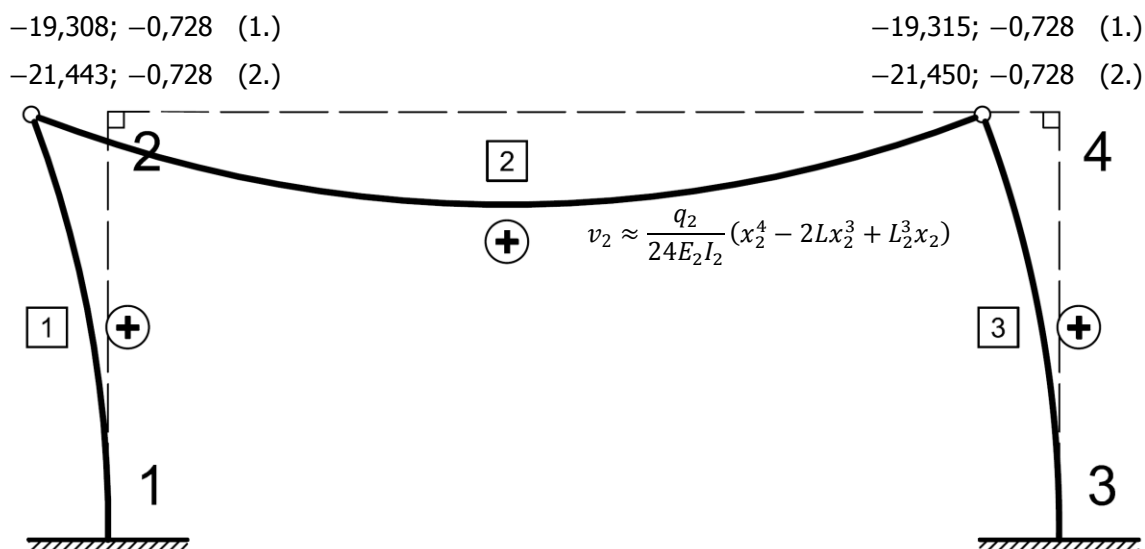
Solmupisteissä 2 ja 4 pilareiden yläpäihin kohdistuvien leikkausvoimien arvot eri menetelmillä laskettuina poikkeavat toisistaan. Toisen kertaluvun leikkausvoimat pilareiden yläpäissä ovat alle 0,9 kN pienemmät taulukkolaskentapohjalla kuin kehäohjelmalla laskettuna. Excel-laskun tuloksia leikkausvoimille ei kuitenkaan voi pitää virheellisinä. Kun pilareiden rasitukset lasketaan pituuskoordinaattien x_1 ja x_3 funktioina, päädytään Excel-pohjan tuloksia tukeviin leikkausvoiman arvoihin solmuissa 2 ja 4. Muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta näyttää siltä, että Frame Analysis on ohjelmoitu laskemaan sauva- ja kehärakenteiden solmupistemuuttujat tarkasti toisen kertaluvun teorian puitteissa.

Liitteessä 2 esitetään Frame Analysis -kehäohjelmalla suoritettuja vertailulaskelmia, joissa mastopilari-kehä analysoidaan kehäohjelmalla kahteen kertaan kaikkien rotaatioiden selvittämiseksi globaalisolmuissa 2 ja 4. Palkin ja pilarien kiertymät edellä mainituissa solmupisteissä saadaan laskettua ikään kuin kahdesta eri osatapauksesta. Ensimmäisessä tapauksessa nivelet sijoitetaan palkin päihin, jolloin tulokseksi saadaan pilarien päiden kiertymät. Kun nivelet siirretään toisessa laskelmassa pilareiden yläpäihin, kehäohjelma ilmoittaa palkin päiden kiertymät. Jos nivelet sijoitettaisiin sekä palkin päihin että pilareiden yläpäihin, Frame Analysis ilmoittaa virheellisesti elementtien kiertymiksi nollan solmuissa 2 ja 4. Näin ollen kaikkien solmupistemuuttujien selvittäminen edellyttää laskennan suorittamista kahteen kertaan.

7.1 Rasitukset

Luvuissa 3 ja 6 esitetyissä esimerkkilaskelmissa selvitettiin solmupisteiden siirtymät ja niihin kohdistuvat voimakomponentit. Tutkitaan nyt, millaisia siirtymiä ja rasituksia solmupisteiden välillä esiintyy, ja piirretään tuloksia havainnollistavat kuvat 39 - 42. Niissä näytetään paikallisten maksimiarvojen lisäksi lineaarisen elementtimenetelmän mukaiset funktiot elementtien rasituksille pituuskoordinaattien $x_1 \dots x_3$ funktioina. Rasituskuviot ovat periaatteellisia; niitä ei tässä tilanteessa piirretä oikeaan mittakaavaan voimasuureiden laajan vaihtelualueen vuoksi.

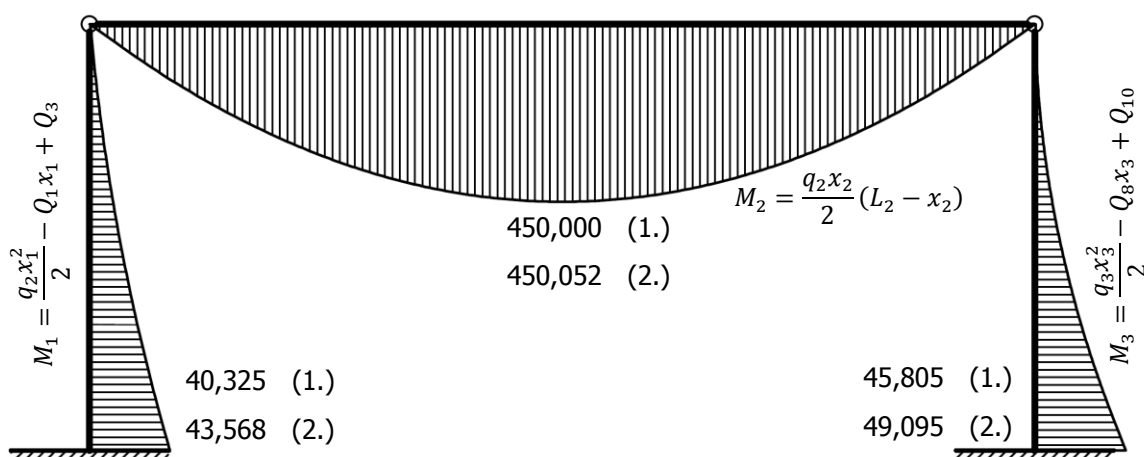
Kuvasta 39 näkyy, kuinka kehän alkuperäinen muoto vääristyy kuormituksen seurauksena. Pilarit taipuvat vasemmalle ja palkki alas. Lisäksi palkin ja pilarin välinen liitoskulma muuttuu alkuperäisestä suorakulmasta. Plusmerkillä ilmaistaan taipuneiden elementtien vedetyt puolet statiikan merkisopimuksen mukaisesti. Kuvan perusteella todetaan, että kaarevuuden suunta ei vaihdu elementtien alueella, eikä taivutusmomentilla voi olla nollakohtaa solmupisteiden välillä. Nivelten vuoksi taivutusmomentti ei siirry elementiltä toiselle solmuissa 2 ja 4.



KUVA 39. Periaatteellinen taipumakuvio (Lampimäki 2014-04-02)

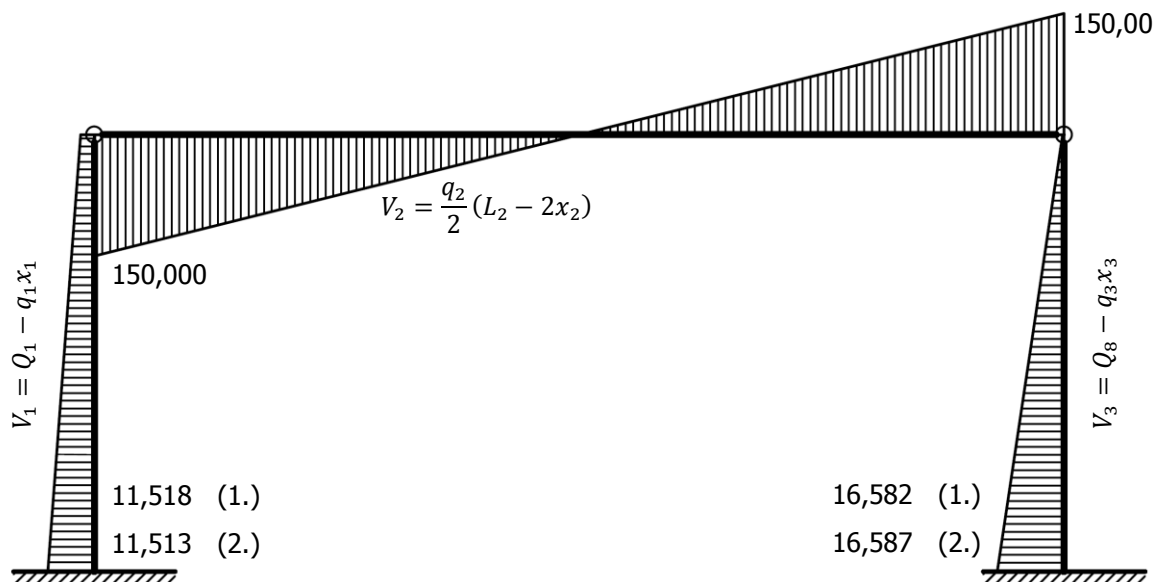
Kuvassa 40 esitetään lineaarisen ja epälineaarisen elementtilaskennan mukaiset paikalliset maksimitaivutusmomentit. Tasaisten kuormien vuoksi niiden funktioksi saadaan toisen asteen yhtälöt, minkä vuoksi momenttipinta muuttuu parabolisesti. Pilarien tyvissä taivutusmomentit saavat suurimman arvonsa, jotka ovat ekvivalentit tukimomenttien Q_3 ja Q_{10} kanssa. Sen sijaan palkin taivutusmomentin funktio saavuttaa huippunsa palkin puolivälissä. Sen maksimi saadaan suoraan lujuusopista tutusta kaavasta $M_{2,max} = q_2 L_2^2 / 8$.

Tässä tapauksessa geometrisen epälinearisuuden huomioiminen vaikuttaa palkin momentin maksimiarvoon vain 0,12 ‰:ia, joten palkin puristus on merkityksetön. On syytä huomata, että pilareihin kohdistuvat momentit kasvavat alle 10 ‰:ia epälinearisessa laskennassa. Pilareiden voimasuureet ja taipumat eivät kasva hallitsemattomasti, joten ne voidaan mitoittaa toisen kertaluvun suureiden avulla.



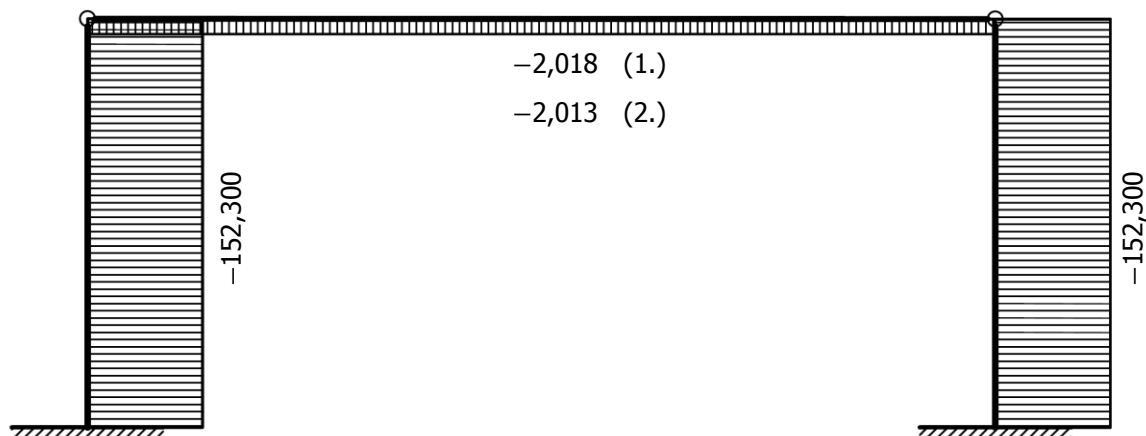
KUVA 40. Periaatteellinen taivutusmomenttikuvio (Lampimäki 2014-04-02)

Mastopilarikehän periaatteellinen leikkausvoimakuvio piirretään kuvaan 41. Elementtien leikkaus muuttuu lineaarisesti pituuskoordinaattien funktioina. Kuvasta nähdään, että palkin päiden leikkausvoimat ovat itseisarvoiltaan yhtä suuret, kuten symmetrian perusteella pitääkin olla. Palkin leikkaus V_2 vähenee suoraviivaisesti koordinaatin x_2 funktiona saavuttaen nollakohdan palkin keskellä. Koska leikkausvoima on taivutusmomentin derivaatta, palkin momenttikuvaajan muutosnopeus saa arvon nolla eli $M'_2(x_2) = 0$, kun $x_2 = L_2/2$. Näin ollen palkin maksimimomentti sijaitsee juuri leikkausvoiman nollakohdassa, kuten statiikan perusteella tiedetään.



KUVA 41. Periaatteellinen leikkausvoimakuvio (Lampimäki 2014-04-02)

Kuvassa 42 esitetään kehärakenteen normaalivoimakuvio. Kaikki elementit ovat puristettuja, mutta palkin puristus on merkityksetön sen profiilin jäykkyyteen nähden. Palkki voitaisiin mitoittaa puristusta huomioimatta, eikä niin menetelmällä tehtäisi virhettä. Kuvasta 42 nähdään, että pilareiden puristusvoimat vastaavat itseisarvoiltaan tukireaktiokomponentteja Q_2 ja Q_9 . Symmetrian vuoksi on voimassa $Q_2 = Q_9$.

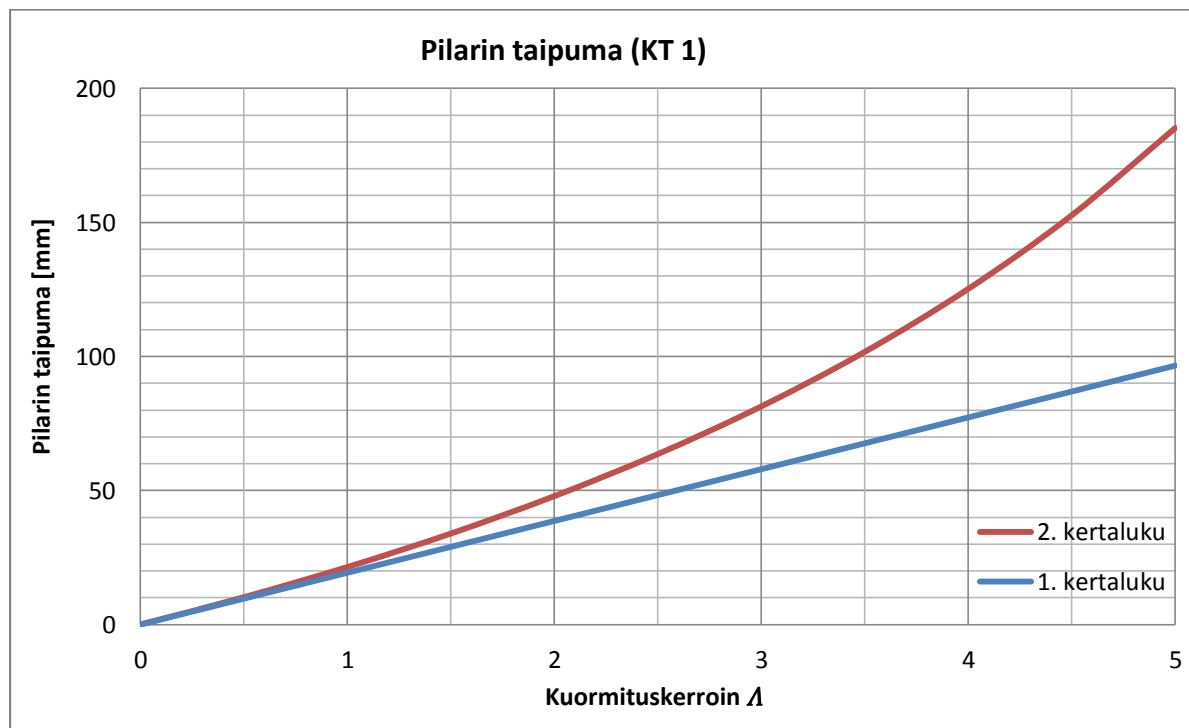


KUVA 42. Periaatteellinen normaalivoimakuvio (Lampimäki 2014-04-02)

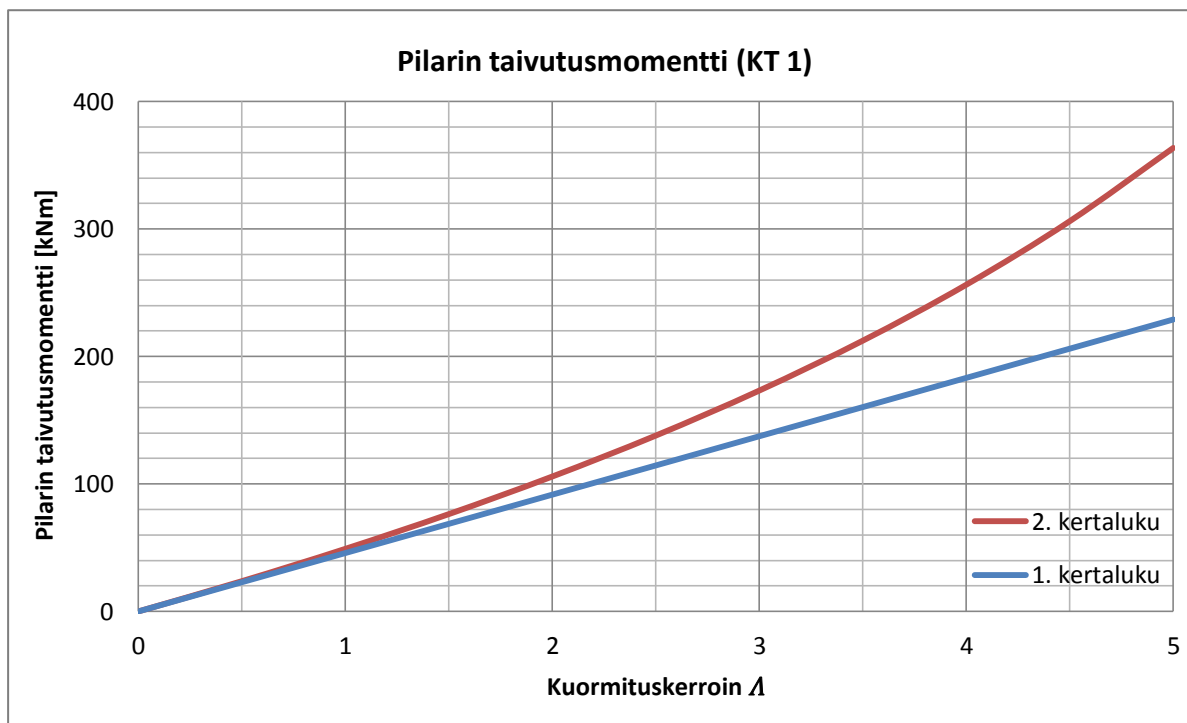
7.2 Geometrisen epälineaarisuuden vaikutus laskentatuloksiin

Seuraavaksi tutkitaan geometrisen epälineaarisuuden vaikutusta kehärakenteen pilarin taipumaan ja taivutusmomenttiin, ja otetaan käyttöön kuormituskerroin λ , jonka funktiona muuttuvien kuormien arvot kasvavat kolmessa eri tapauksessa. Taulukoissa 5 ja 11 annetut elementtien omapainot säilyvät siis vakioina. Ensin tarkastellaan tapausta, jossa λ vaikuttaa kaikkiin muuttuviin kuormiin. Toiseksi kiinnitetään huomiota tilanteeseen, jossa kuormituskerroin lisää ainoastaan palkin muuttuvaa, tasaista kuormaa. Kolmanneksi havainnoidaan kehärakenteen kuormituskäyttäytymistä, kun kaikki vaakasuuntaiset kuormat muuttuvat λ :n funktiona.

Kuvioit 2 ja 3 havainnollistavat kehärakenteen kuormituskäyttäytymistä ensimmäisessä kuormitustilanteessa, jossa kuormituskerroin λ vaikuttaa sekä pysty- että vaakasuuntaisiin kuormiin. Lineaarisen ja epälineaarisen elementtimenetelmän erot käyvät selvästi ilmi. Lineaarilla menetelmällä laskettujen tulosten kuvaajaksi saadaan nouseva suora, kun taas epälineaarilla menetelmällä laskettujen tulosten käyrä erkanee lineaarisella menetelmällä lasketusta suorasta yhä jyrkemmin, mitä suuremmaksi kehärakenteen kuormat kasvavat. Tosin pilarin teräslaadun myötörajan tulisi olla korkeampi kuin 355 N/mm^2 , mikäli halutaan päästä kuormituskertoimen arvoon $\lambda = 5$ teräksen myötöjännitystä ylittämättä.

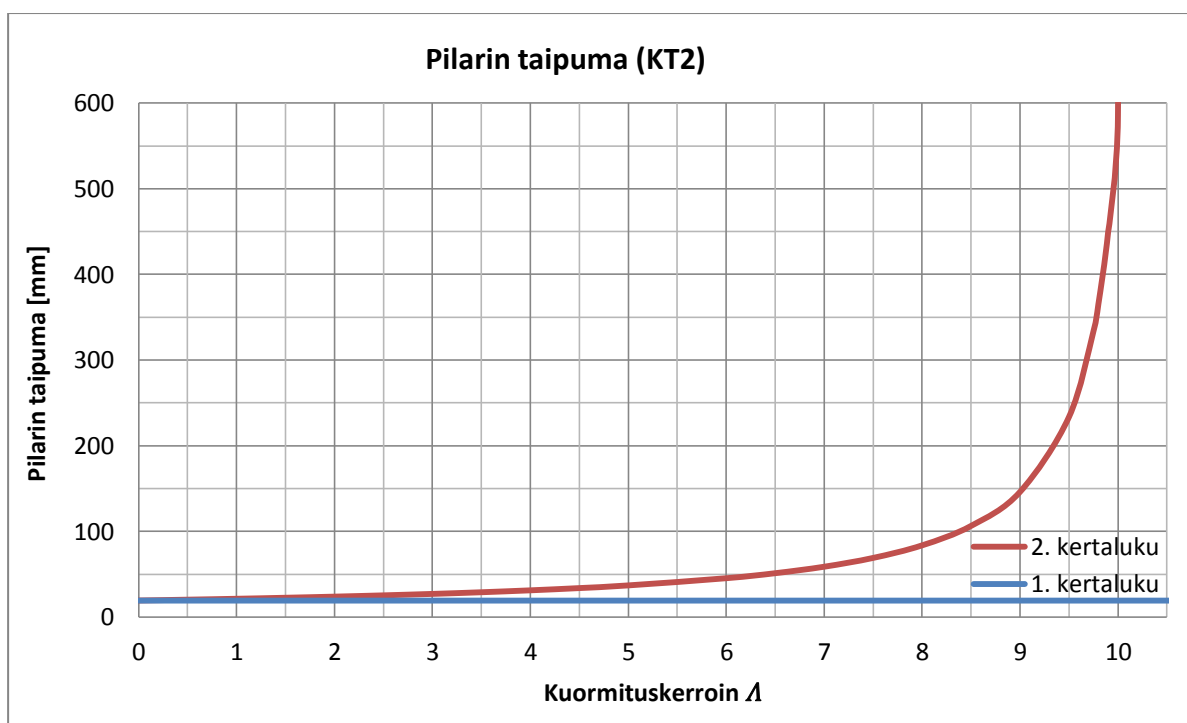


KUVIO 2. Muuttuvien kuormien vaikutus pilarin taipumaan (Lampimäki 2014)

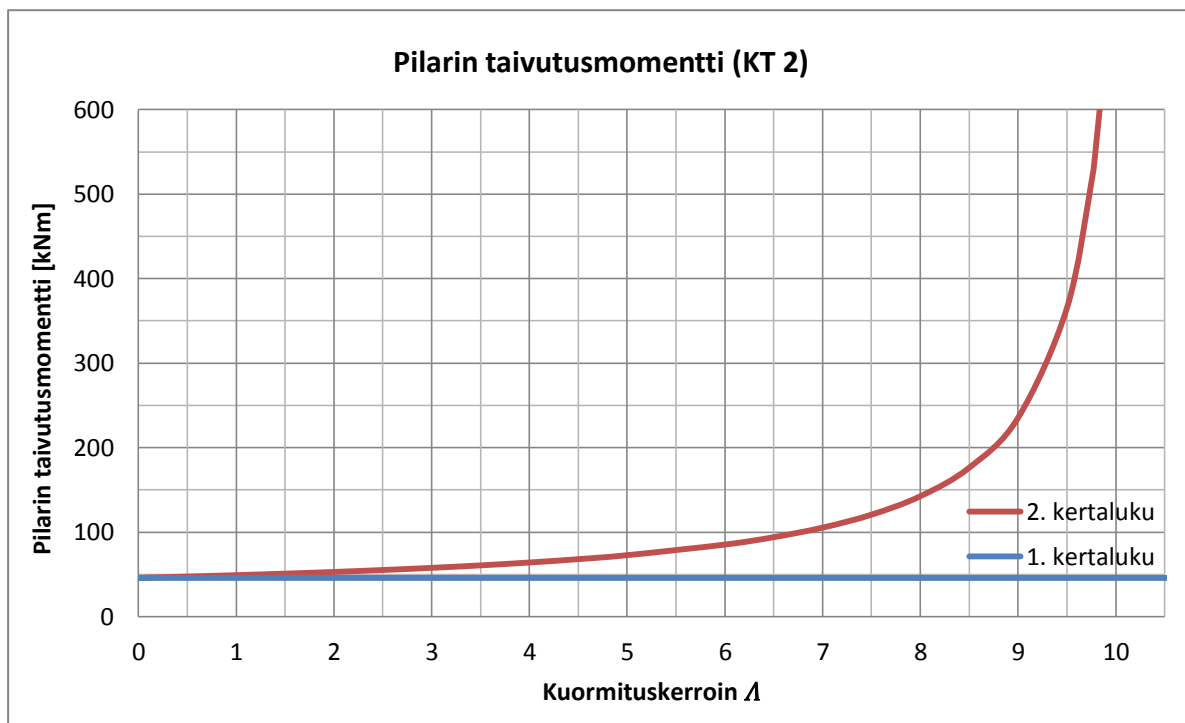


KUVIO 3. Muuttuvien kuormien vaikutus pilarin taivutusmomenttiin (Lampimäki 2014)

Kuviot 4 ja 5 liittyvät toiseen kuormitustilanteeseen. Niistä nähdään, että pilarin 1. kertaluvun taipuma ja sitä vastaava taivutusmomentti ovat vakioita lineaarisella elementtimenettelmällä laskettuna, kun palkin kuormitus kasvaa Δ -kertaiseksi. Kuvioista päätellään, että pystysuuntaisen kuorman vaikutus pilarin 2. kertaluvun taipumaan tai taivutusmomenttiin on vähäinen tiettyyn rajaan saakka. Kun palkin kuormitusta yhä lisätään, rakenne lopulta menettää stabiiliutensa. Kuvioiden 2. kertaluvun eksponentiaalisesti kasvava käyrä poikkeaa jyrkästi lineaarisesta suorasta, kun kuormituskerroin on $\Delta \geq 9$. Rakenne menettää stabiiliutensa ja muuttuu mekanismiksi.

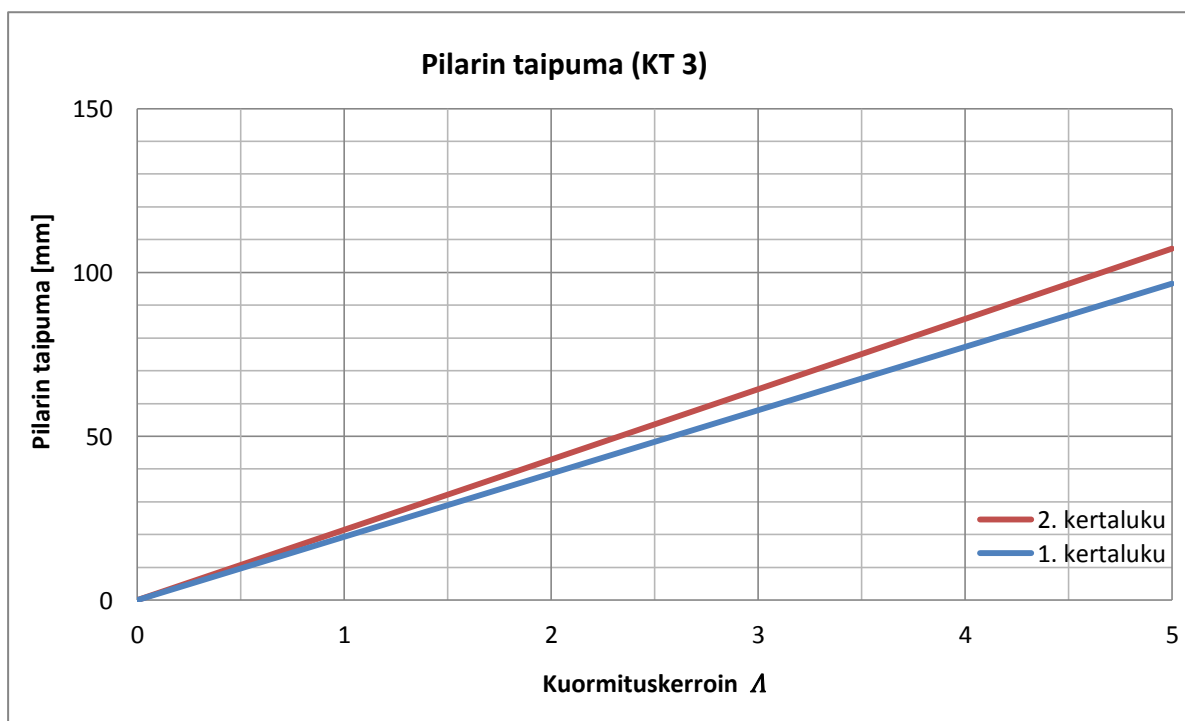


KUVIO 4. Palkin muuttuvan kuorman vaikutus pilarin taipumaan (Lampimäki 2014)

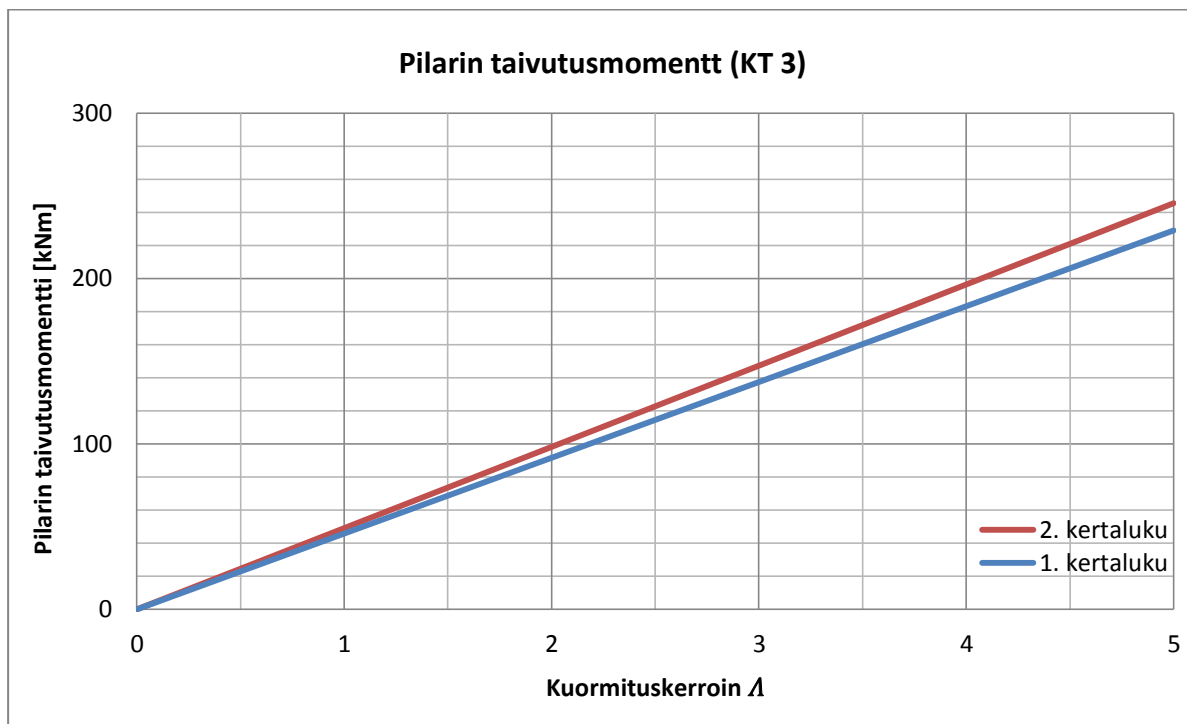


KUVIO 5. Palkin muuttuvan kuorman vaikutus pilarin taivutusmomenttiin (Lampimäki 2014)

Kuvioit 6 ja 7 havainnollistavat kehärakenteen kuormituskäyttäytymistä tilanteessa, jossa vaakasuuntaisten kuormien annetaan kasvaa yhä suuremmiksi ja jossa pystysuuntaiset kuormat ovat vakioita. Niistä nähdään, että joissakin tilanteissa lineaariset ja epälineaariset laskentatulokset eivät poikkea toisistaan merkittävästi. Lisäksi kuvioista käy ilmi, että 2. kertaluvun tulokset eivät välttämättä aina muutu epälineaarisesti. Tässä tilanteessa sekä lineaarisille että epälineaarisille laskentatuloksille saadaan nousevat suorat, mutta edelleen 2. kertaluvun tulokset ovat suurempia kuin lineaarisella menetelmällä lasketut.



KUVIO 6. Vaakasuuntaisen muuttuvan kuorman vaikutus pilarin taipumaan (Lampimäki 2014)



KUVIO 7. Vaakasuuntaisten kuormien vaikutus pilarin taivutusmomenttiin (Lampimäki 2014)

8 YHTEENVETO

Tässä insinööriyössä tarkasteltiin lineaarista ja toisen kertaluvun teorian FEM-laskentaa, kun siirtymien oletetaan olevan pieniä. Esitettyä teoriaa havainnollistettiin luvuissa 3 ja 6. Ensin mainitussa laskettiin mastopilarikehän solmupistesuureet lineaarisella elementtimenetelmällä ja jälkimmäisessä laskentaprosessi käytiin läpi epälineaarilla elementtimenetelmällä toisen kertaluvun teorian tarkkuudella. Laskuesimerkeistä havaitaan, että nämä laskentaprosessit ovat hyvin samankaltaisia.

Linearisessa laskennassa kuormien ja siirtymien välinen yhteys noudattaa Hooken lakia ideaalisen jousisysteemin tavoin. Toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässä kuormien ja siirtymien välinen yhteys muuttuu epälineaariseksi rakenteen geometrian vuoksi. Rakenne voi olla hoikka kuormitukseen nähden, eikä sitä voida mitoitaa pelkästään lineaarisella menetelmällä laskettujen tulosten perusteella. Toisen kertaluvun analyysin merkitys korostuu erityisesti, kun lujuuslaskennassa tasapainoillaan rakenteen kestävyuden ja taloudellisuuden välillä.

Toisen kertaluvun teorian elementtimenetelmässä stabiilisuuskriteerit voidaan ajatella lineaarisen menetelmän jäykkymatriisin taipumiin vaikuttavien alkioiden kertoimiksi. Kun elementti on puristettu, stabiilisuuskriteerit saavat pääsääntöisesti lukua 1 pienemmän arvon, kuten taulukon 11 lukuarvoista nähdään. Ne alentavat elementin jäykkyyttä ja aiheuttavat suuremman muodonmuutoksen, vaikka kuormitus säilyy samana sekä lineaarisessa että epälinearisessa laskennassa.

Lineaariseen laskentaan verrattuna toisen kertaluvun siirtymä- tai voimasuureiden selvittäminen vaatii enemmän työtä. Epälineaarisen kuormituskäyttäytymisen vuoksi rakenteen tasapainotila on etsittävä iteroimalla. Tämän insinööriyön tutkimuskohteena olleen mastopilarikehän solmupistesuureet saatiin kuitenkin ensimmäisen iterointikierroksen jälkeen, mutta näin ei suinkaan aina ole.

Tämä insinööriyö on kannanotto laskemisen puolesta. Tietokoneilla lasketaan, mutta ne eivät kanna vastuuta suunnittelun onnistumisesta tai turvallisuudesta. Siksi tulevaisuudessakin tarvitaan insinöörejä, jotka ymmärtävät rakenteiden mekaniikkaa. Tarvitaan osajia, jotka ymmärtävät käyttämiensä FEM-ohjelmistojen rajoitteet. Tarvitaan ammattilaisia, jotka ymmärtävät fyysiset ilmiöt, joihin ohjelmistot perustuvat.

Elementtimenetelmään perustuvat ohjelmistot ovat hyödyllisiä ja tehokkaita apuvälineitä rakenteiden analysoimisessa, mutta ne eivät korvaa omakohtaista pohdintaa ja ymmärtämistä. Rakenteiden mekaniikan osaaminen tulee olemaan merkittävä osa rakennesuunnitteluinsinöörin ammattitaitoa nyt ja tulevaisuudessa.

LÄHTEET

HIETIKKO, Esa 2004. Palkki - Lujuuslaskennan perusteet. Keuruu: Otavan kirjapaino Oy.

SALMI, Tapio ja KUULA, Kai 2012. Rakenteiden mekaniikka. Tampere: Klingendahl Paino Oy.

THELANDERSSON, Sven 1984. Konstruktionsberäkningar med dator. 2. painos. Lund: Studentlitteratur.

LIITE 1: MASTOPILARIKEHÄN LINEAARISEN JA EPÄLINEAARISEN FE-MALLIN MUODOSTAMINEN

MASTOPILARIKEHÄN LINEAARISEN FE-MALLIN MUODOSTAMINEN

ELEMENTIN 1 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(1)}[u]^{(1)} = [R]^{(1)} - [R^0]^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,337E+06	0	-3,611E+06	-1,337E+06	0	-3,611E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,050E+03
2	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
3	-3,611E+06	0	1,300E+07	3,611E+06	0	6,499E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_3	-3,645E+03
4	-1,337E+06	0	3,611E+06	1,337E+06	0	3,611E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_4^{(1)}$	-1,400E+03	4,050E+03
5	0	-2,093E+08	0	0	2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_5^{(1)}$	-2,300E+03	0
6	-3,611E+06	0	6,499E+06	3,611E+06	0	1,300E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_6^{(1)}$	0	3,645E+03
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ELEMENTIN 2 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(2)}[u]^{(2)} = [R]^{(2)} - [R^0]^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2,730E+08	0	0	0	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	$u_1^{(2)}$	0	0
5	0	0	0	0	1,343E+06	0	8,057E+06	0	0	0	0	-1,343E+06	0	8,057E+06	$u_2^{(2)}$	0	1,500E+05
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	8,057E+06	0	6,446E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	3,223E+07	$u_3^{(2)}$	0	3,000E+05
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	0	0	0	2,730E+08	0	0	0	$u_4^{(2)}$	0	0
12	0	0	0	0	-1,343E+06	0	-8,057E+06	0	0	0	0	1,343E+06	0	-8,057E+06	$u_5^{(2)}$	0	1,500E+05
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	8,057E+06	0	3,223E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	6,446E+07	$u_6^{(2)}$	0	-3,000E+05

ELEMENTIN 3 LINEAARINEN FE-MALLI $[K]^{(3)}[u]^{(3)} = [R]^{(3)} - [R^0]^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1,337E+06	0	-3,611E+06	-1,337E+06	0	-3,611E+06	0	0	Q_8	8,100E+03
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	Q_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,611E+06	0	1,300E+07	3,611E+06	0	6,499E+06	0	0	Q_{10}	-7,290E+03
11	0	0	0	0	0	0	0	-1,337E+06	0	3,611E+06	1,337E+06	0	3,611E+06	0	$u_4^{(3)}$	-2,400E+03	8,100E+03
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-2,093E+08	0	0	2,093E+08	0	0	$u_5^{(3)}$	-2,300E+03	0
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,611E+06	0	6,499E+06	3,611E+06	0	1,300E+07	0	$u_6^{(3)}$	0	7,290E+03
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MASTOPILARIKEHÄN LINEAARINEN FE-MALLI $[K][r] = [R] - [R^0]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,337E+06	0	-3,611E+06	-1,337E+06	0	-3,611E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_1	4,050E+03
2	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_2	0
3	-3,611E+06	0	1,300E+07	3,611E+06	-2,212E-10	6,499E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_3	-3,645E+03
4	-1,337E+06	0	3,611E+06	2,743E+08	0	3,611E+06	0	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	r_4	-1,400E+03	4,050E+03
5	0	-2,093E+08	0	0	2,106E+08	0	8,057E+06	0	0	0	0	-1,343E+06	0	8,057E+06	r_5	-2,300E+03	1,500E+05
6	-3,611E+06	0	6,499E+06	3,611E+06	0	1,300E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	r_6	0	3,645E+03
7	0	0	0	0	8,057E+06	0	6,446E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	3,223E+07	r_7	0	3,000E+05
8	0	0	0	0	0	0	0	1,337E+06	0	-3,611E+06	-1,337E+06	0	-3,611E+06	0	0	Q_8	8,100E+03
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	Q_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-3,611E+06	0	1,300E+07	3,611E+06	0	6,499E+06	0	0	Q_{10}	-7,290E+03
11	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	-1,337E+06	0	3,611E+06	2,743E+08	0	3,611E+06	0	r_{11}	-2,400E+03	8,100E+03
12	0	0	0	0	-1,343E+06	0	-8,057E+06	0	-2,093E+08	0	0	2,106E+08	0	-8,057E+06	r_{12}	-2,300E+03	1,500E+05
13	0	0	0	0	0	0	0	-3,611E+06	0	6,499E+06	3,611E+06	0	1,300E+07	0	r_{13}	0	7,290E+03
14	0	0	0	0	8,057E+06	0	3,223E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	6,446E+07	r_{14}	0	-3,000E+05

MASTOPILARIKEHÄN EPÄLINEAARISEN FE-MALLIN MUODOSTAMINEN TOISEN KERTALUVUN TEORIAN TARKKUUDELLA

ELEMENTIN 1 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(1)}[u_2]^{(1)} = [R_2]^{(1)} - [R_2^0]^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,303E+06	0	-3,595E+06	-1,303E+06	0	-3,595E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,050E+03
2	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-3,595E+06	0	1,289E+07	3,595E+06	0	6,527E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3,660E+03
4	-1,303E+06	0	3,595E+06	1,303E+06	0	3,595E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_4^{(1)}$	4,050E+03
5	0	-2,093E+08	0	0	2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_5^{(1)}$	0
6	-3,595E+06	0	6,527E+06	3,595E+06	0	1,289E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u_6^{(1)}$	3,660E+03
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ELEMENTIN 2 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(2)}[u_2]^{(2)} = [R_2]^{(2)} - [R_2^0]^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2,730E+08	0	0	0	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	$u_1^{(2)}$	0	0
5	0	0	0	0	1,343E+06	0	8,057E+06	0	0	0	0	-1,343E+06	0	8,057E+06	$u_2^{(2)}$	1,500E+05	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	8,057E+06	0	6,446E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	3,223E+07	$u_3^{(2)}$	3,000E+05	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	0	0	0	2,730E+08	0	0	0	$u_4^{(2)}$	0	0
12	0	0	0	0	-1,343E+06	0	-8,057E+06	0	0	0	0	1,343E+06	0	-8,057E+06	$u_5^{(2)}$	1,500E+05	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	8,057E+06	0	3,223E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	6,446E+07	$u_6^{(2)}$	-3,000E+05	0

ELEMENTIN 3 EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2]^{(3)}[u_2]^{(3)} = [R_2]^{(3)} - [R_2^0]^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MASTOPILARIKEHÄN EPÄLINEAARINEN FE-MALLI $[K_2][r_2] = [R_2] - [R_2^0]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1,303E+06	0	-3,595E+06	-1,303E+06	0	-3,595E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,050E+03
2	0	2,093E+08	0	0	-2,093E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-3,595E+06	0	1,289E+07	3,595E+06	-2,202E+10	6,527E+06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3,660E+03
4	-1,303E+06	0	3,595E+06	2,743E+08	0	3,595E+06	0	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	r_4	-1,400E+03	4,050E+03
5	0	-2,093E+08	0	0	2,106E+08	0	8,057E+06	0	0	0	0	-1,343E+06	0	8,057E+06	r_5	-2,300E+03	1,500E+05
6	-3,595E+06	0	6,527E+06	3,595E+06	0	1,289E+07	0	0	0	0	0	0	0	0	r_6	0	3,660E+03
7	0	0	0	0	8,057E+06	0	6,446E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	3,223E+07	r_7	0	3,000E+05
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	-2,730E+08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_{11}	-2,400E+03	8,100E+03
12	0	0	0	0	-1,343E+06	0	-8,057E+06	0	0	0	0	0	0	0	r_{12}	-2,300E+03	1,500E+05
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_{13}	0	7,321E+03
14	0	0	0	0	8,057E+06	0	3,223E+07	0	0	0	0	-8,057E+06	0	6,446E+07	r_{14}	0	-3,000E+05

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskemat.fra

SUMMARY

4 joints
2 supports
0 springs
2 hinges
3 members
2 sections
7 loads
1 basic loadcase
1 loadcases

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän vertailulaskemat.fra

CONVENTIONS

LOCAL MEMBER DIRECTION

The direction of a member is determined by the members orientation, in such a way that the start joint is the joint where the slope of the member (w) with the global X-direction is larger than $-\pi/4$ (-45°) and less than or equal to $+\pi/4$ ($+135^\circ$).

GLOBAL DIRECTIONS

As global coordinate system is an ordinary cartesian right oriented coordinate system used, with positive X-direction pointing to the right, positive Y-direction pointing upwards and positive Z-direction (rotation) directed counter clockwise.

LOAD DIRECTIONS

When defining loads the following load directions are used:

X, H coincides with the global X-direction.

A coincides with the members local direction.

M, R coincides with the global Z-direction.

Y, V opposite directed to the global Y-direction.

L directed perpendicular to the member, rotated 90° clockwise with respect to the local member direction.

Prescribed joint displacements are positive when defined in the global directions.

SIGN CONVENTIONS

Displacements and reactions are positive in the global directions (to the right, upwards and counter clockwise). Axial forces producing tension in the member is positive, shear forces is positive when directed downwards at the right of a point, moment is positive when producing tension at the bottom of a member.

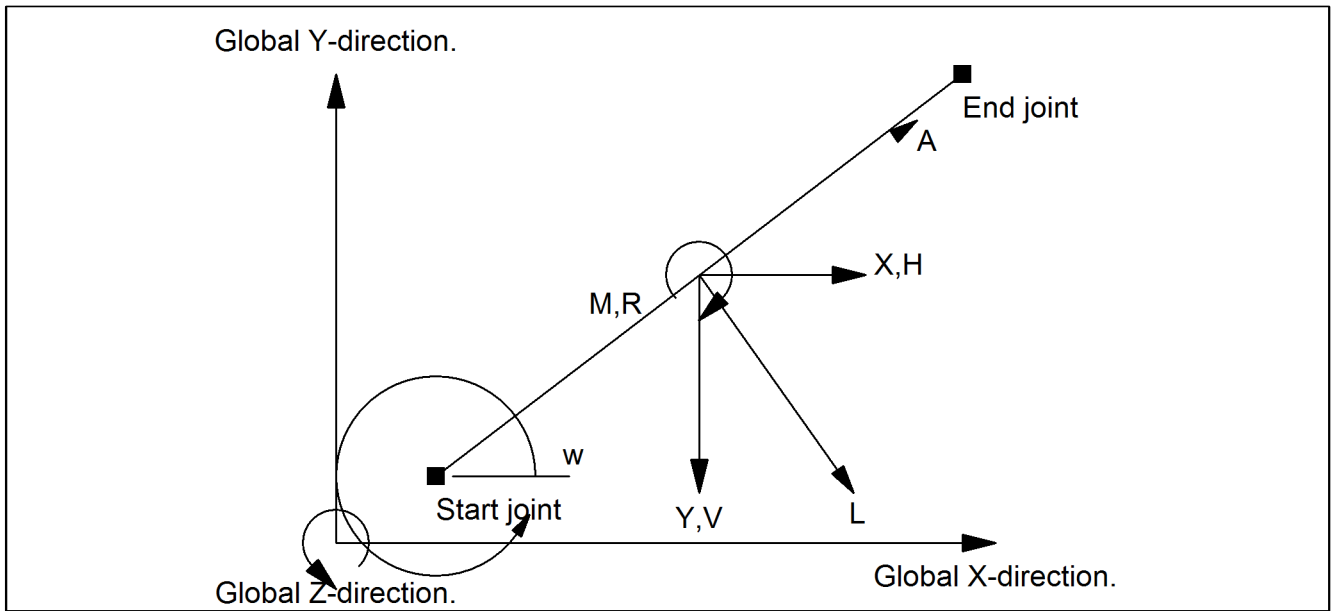
REACTIONS

Reactions are to be understood as external forces acting on the structure to produce equilibrium.

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

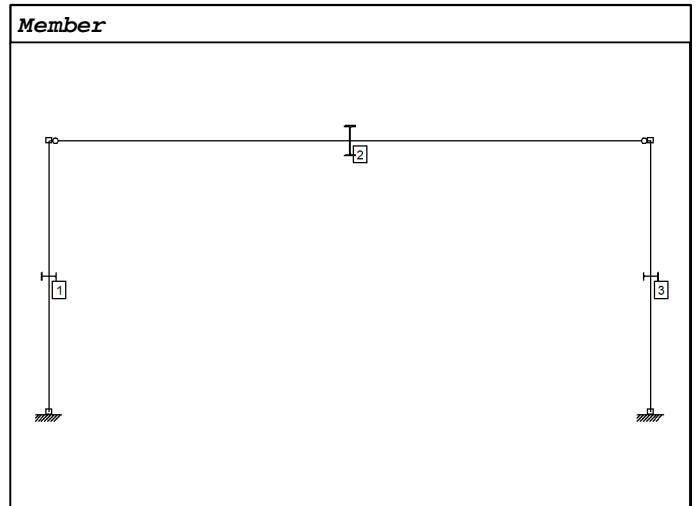


Joints

X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	
1	0	0	R	R	R	2	0	5.400		3	12.000	0	R	R	R	4	12.000	5.400		

Member

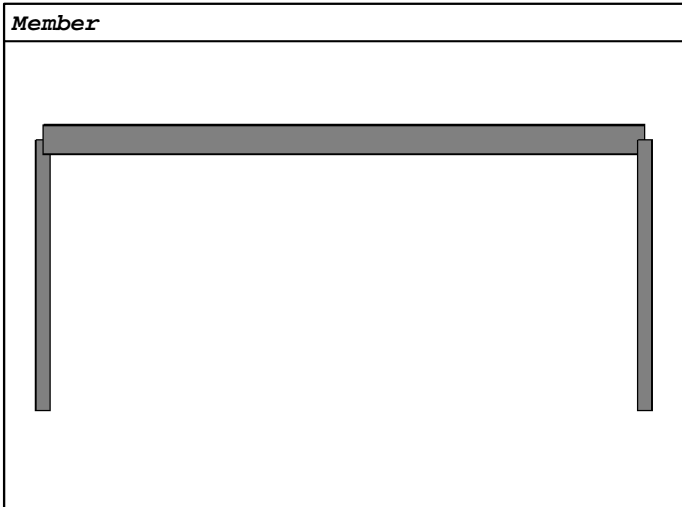
Name	Joint 1	Joint 2	Initial- (H=Hinge) (H=Hinge) bow imperfection.	Name	Joint 1	Joint 2	Initial- (H=Hinge) (H=Hinge) bow imperfection.
1	1	2	No	3	3	4	No
2	2H	4H	No				



Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra



Section data

Name	Dir.	Area (m ²)	I (m ⁴)	h (m)	z (m)	E-modulus (kN/m ²)	Cost (kr)
IPE 300 / S355	y-y	5.381e-3	8.36e-5	0.300	0.150	2.10e8	
IPE 600 / S355	y-y	1.560e-2	9.21e-4	0.600	0.300	2.10e8	

Section/Member

Member	Section	Dir.	Length (m)	Weight (kg)	Cost (kr)
1	IPE 300 / S355	y-y	5.400	227.880	
2	IPE 600 / S355	y-y	12.000	1464.000	
3	IPE 300 / S355	y-y	5.400	227.880	
Sum			22.800	1919.760	

Section specification

Section	Length (m)	Number	Weight (kg)	Cost (kr)
IPE 300 / S355	5.400	2	455.760	
IPE 600 / S355	12.000	1	1464.000	
Sum	22.800	3	1919.760	

Mould costs

	hour/m ²	kr/m ²		hour/m ²	kr/m ²
Beam mould	0.80	50.00	Column mould	0.90	50.00

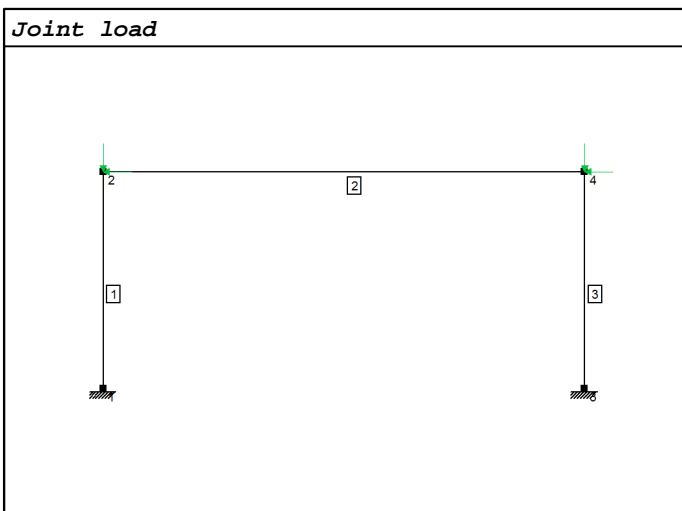
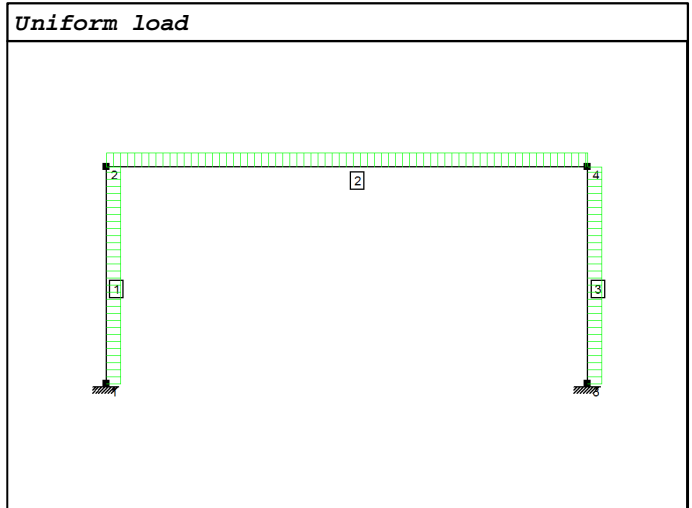
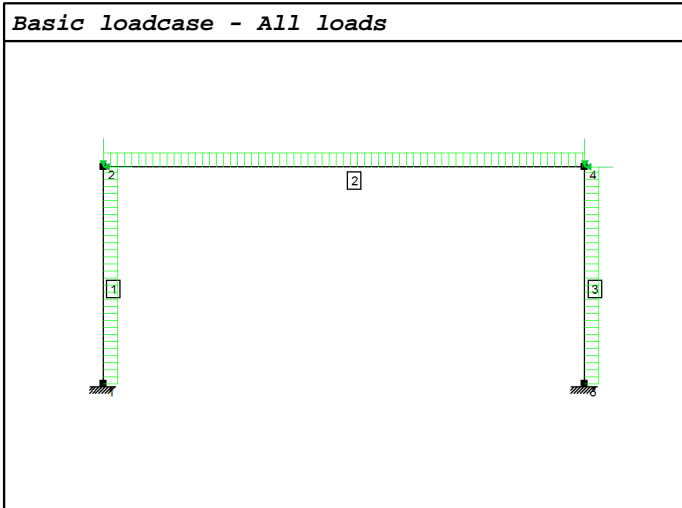
Work salary: 220kr/hour

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Basic loadcase: All loads



Uniform load

Member	Dir.	Load intensity	L1(m)	L2(m)
3	L / q(kN/m)	-3.0	0	0
1	L / q(kN/m)	-1.5	0	0

Member	Dir.	Load intensity	L1(m)	L2(m)
2	Y / q(kN/m)	25.0	0	0

Joint load

Joint	Dir.	Load intensity	Joint	Dir.	Load intensity
2	Y / P(kN)	2.3	4	X / P(kN)	-2.4
4	Y / P(kN)	2.3	2	X / P(kN)	-1.4

Basic loadcase

Name	Des.
All loads	B1

Loadcase

Name	Combination	Limit	Type	Dependency
1 Loadcase 1: All loads	B1		ULS	

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Results

Max pos. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max neg. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max neg. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	44.1	Loadcase 1: All loads	3	53.9	Loadcase 1: All loads
2	146.5	Loadcase 1: All loads			

Max stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	49.9	Loadcase 1: All loads	3	59.8	Loadcase 1: All loads
2	146.5	Loadcase 1: All loads			

Equilibrium check - 1. order

Loadcase	X-dir. kN	Y-dir. kN	X-dir. kN	Y-dir. kN
Loadcase 1: All loads	-28.100	-304.600	28.100	304.600

Equilibrium check - 2. order

Loadcase	X-dir. kN	Y-dir. kN	X-dir. kN	Y-dir. kN
Loadcase 1: All loads	-28.100	-304.600	28.100	304.600

Max pos. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖLIIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Max pos. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	-150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	-150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. axial force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. axial force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	-100.7	Loadcase 1: All loads	3	-110.5	Loadcase 1: All loads
2	-146.7	Loadcase 1: All loads			

Min neg. stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	-106.5	Loadcase 1: All loads	3	-116.4	Loadcase 1: All loads
2	-146.8	Loadcase 1: All loads			

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Max abs. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	100.7	Loadcase 1: All loads	3	110.5	Loadcase 1: All loads
2	146.7	Loadcase 1: All loads			

Max abs. stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	106.5	Loadcase 1: All loads	3	116.4	Loadcase 1: All loads
2	146.8	Loadcase 1: All loads			

Max abs. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. axial force - 2. order

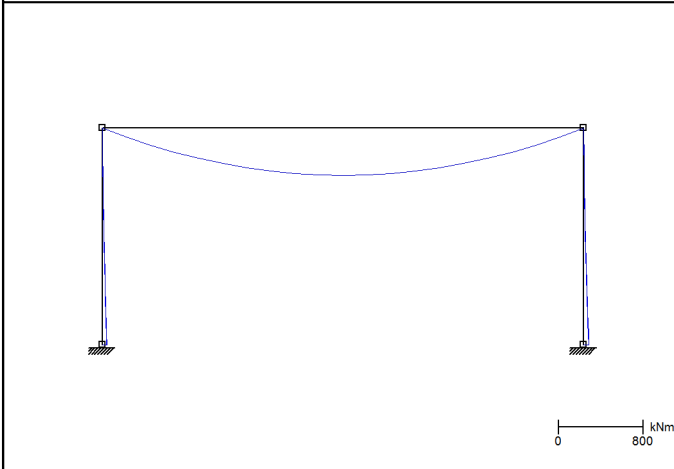
Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Frame1

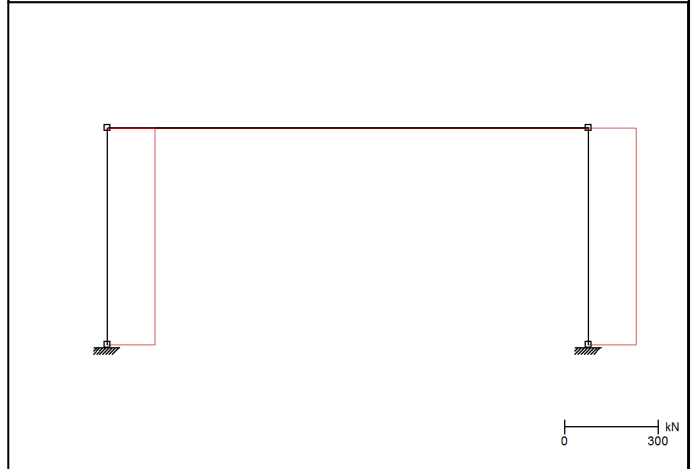
2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

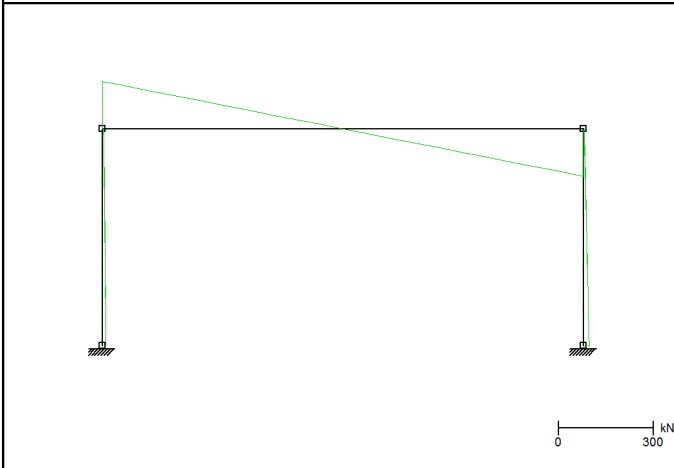
Loadcase - Loadcase 1: All loads Moment - 1., 2. order



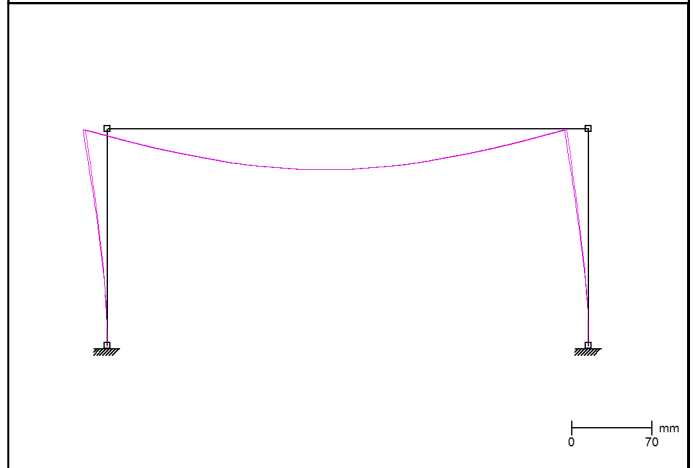
Loadcase - Loadcase 1: All loads Axial force - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Shear force - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Deflection - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 1. order

Member	Joint	M kNm	V kN	N kN	Member	Joint	M kNm	V kN	N kN
1	1	40.325	-11.518	-152.300	4	4	0	-150.000	-2.018
	2	0	-3.418	-152.300	3	3	45.805	-16.582	-152.300
2	2	0	150.000	-2.018	4	4	0	-0.382	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 2. order

Member	Joint	M kNm	V kN	N kN	Member	Joint	M kNm	V kN	N kN
1	1	43.568	-11.513	-152.300	4	4	0.038	-150.000	-2.013
	2	0	-4.281	-152.300	3	3	49.095	-16.587	-152.300
2	2	0.038	150.000	-2.013	4	4	0	-1.212	-152.300

Joint deflections - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad
1	0	0	0	3	0	0	0				
2	-19.308	-0.728	0.005	4	-19.315	-0.728	0.005				

Joint deflections - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad
1	0	0	0	3	0	0	0				
2	-21.443	-0.728	0.006	4	-21.451	-0.728	0.005				

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Support reactions - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm	Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm
1	11.518	152.300	-40.325	3	16.582	152.300	-45.805

Support reactions - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm	Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm
1	11.513	152.300	-43.568	3	16.587	152.300	-49.095

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	40.325	-11.518	-152.300	5.400	0	-3.418	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	43.568	-11.513	-152.300	5.400	0	-4.281	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-100.691	-28.303	44.084	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-106.512	-28.303	49.906	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-19.308	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-21.443	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	0	150.000	-2.018	12.000	0	-150.000	-2.018
6.000	450.000	0	-2.018				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	0.038	150.000	-2.013	12.000	0.038	-150.000	-2.013
6.000	450.052	0	-2.013				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-0.129	-0.129	-0.129	12.000	-0.129	-0.129	-0.129
6.000	-146.741	-0.129	146.482				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-0.141	-0.129	-0.117	12.000	-0.141	-0.129	-0.117
6.000	-146.758	-0.129	146.499				

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	-19.308	-0.728	6.000	-19.312	-35.635	12.000	-19.315	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	-21.443	-0.728	6.000	-21.447	-35.640	12.000	-21.451	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	45.805	-16.582	-152.300	5.400	0	-0.382	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	49.095	-16.587	-152.300	5.400	0	-1.212	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-110.529	-28.303	53.923	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-116.435	-28.303	59.828	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-19.315	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-21.451	-0.728

As the analysis is made according to 2:nd order theory the flexural buckling check in the plane of the frame for members in compression will be made with regard to these 2:nd order moments.

Member: 1 IPE 300 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Left	Not defined at Right
Load level	Top	

Member: 2 IPE 600 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Bottom level	Not defined at Top level

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Details ()

Load level	Top	
------------	-----	--

Member: 3 IPE 300 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Left	Not defined at Right
Load level	Top	

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖLIIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Index

SUMMARY	1
CONVENTIONS	1
Picture:	2
Joints	2
Member	2
Picture:Joints	2
Picture:Member	2
Picture:Member	3
Section data	3
Section/Member	3
Section specification	3
Mould costs	3
Work salary: 220kr/hour	3
Basic loadcase: All loads	4
Picture:Basic loadcase - All loads	4
Picture:Uniform load	4
Picture:Joint load	4
Uniform load	4
Joint load	4
Basic loadcase	4
Loadcase	4
Results	5
Max pos. moment - 1. order	5
Max pos. moment - 2. order	5
Max neg. moment - 1. order	5
Max neg. moment - 2. order	5
Max stresses - 1. order	5
Max stresses - 2. order	5
Equilibrium check - 1. order	5
Equilibrium check - 2. order	5
Max pos. shear force - 1. order	5
Max pos. shear force - 2. order	6
Min neg. shear force - 1. order	6
Min neg. shear force - 2. order	6
Max pos. axial force - 1. order	6
Max pos. axial force - 2. order	6
Min neg. axial force - 1. order	6
Min neg. axial force - 2. order	6
Min neg. stresses - 1. order	6
Min neg. stresses - 2. order	6
Max abs. moment - 1. order	7
Max abs. moment - 2. order	7
Max abs. shear force - 1. order	7
Max abs. shear force - 2. order	7
Max abs. stresses - 1. order	7
Max abs. stresses - 2. order	7
Max abs. axial force - 1. order	7
Max abs. axial force - 2. order	7
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Moment - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Axial force - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Shear force - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Deflection - 1., 2. order	8

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖLIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat.fra

Index

Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 1. order	8
Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 2. order	8
Joint deflections - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	8
Joint deflections - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	8
Support reactions - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	9
Support reactions - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 2. order	10
As the analysis is made according to 2:nd order theory the flexural buckling check in the plane of the frame for members in compression will be made with regard to these 2:nd order moments.	10
Member: 1 IPE 300 / S355	10
Details ()	10
Member: 2 IPE 600 / S355	10
Details ()	10
Details ()	11
Member: 3 IPE 300 / S355	11
Details ()	11

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

SUMMARY

4 joints
2 supports
0 springs
2 hinges
3 members
2 sections
7 loads
1 basic loadcase
1 loadcases

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän vertailulaskelmat 2.fra

CONVENTIONS

LOCAL MEMBER DIRECTION

The direction of a member is determined by the members orientation, in such a way that the start joint is the joint where the slope of the member (w) with the global X-direction is larger than $-\pi/4$ (-45°) and less than or equal to $+\pi/4$ ($+135^\circ$).

GLOBAL DIRECTIONS

As global coordinate system is an ordinary cartesian right oriented coordinate system used, with positive X-direction pointing to the right, positive Y-direction pointing upwards and positive Z-direction (rotation) directed counter clockwise.

LOAD DIRECTIONS

When defining loads the following load directions are used:

X, H coincides with the global X-direction.

A coincides with the members local direction.

M, R coincides with the global Z-direction.

Y, V opposite directed to the global Y-direction.

L directed perpendicular to the member, rotated 90° clockwise with respect to the local member direction.

Prescribed joint displacements are positive when defined in the global directions.

SIGN CONVENTIONS

Displacements and reactions are positive in the global directions (to the right, upwards and counter clockwise). Axial forces producing tension in the member is positive, shear forces is positive when directed downwards at the right of a point, moment is positive when producing tension at the bottom of a member.

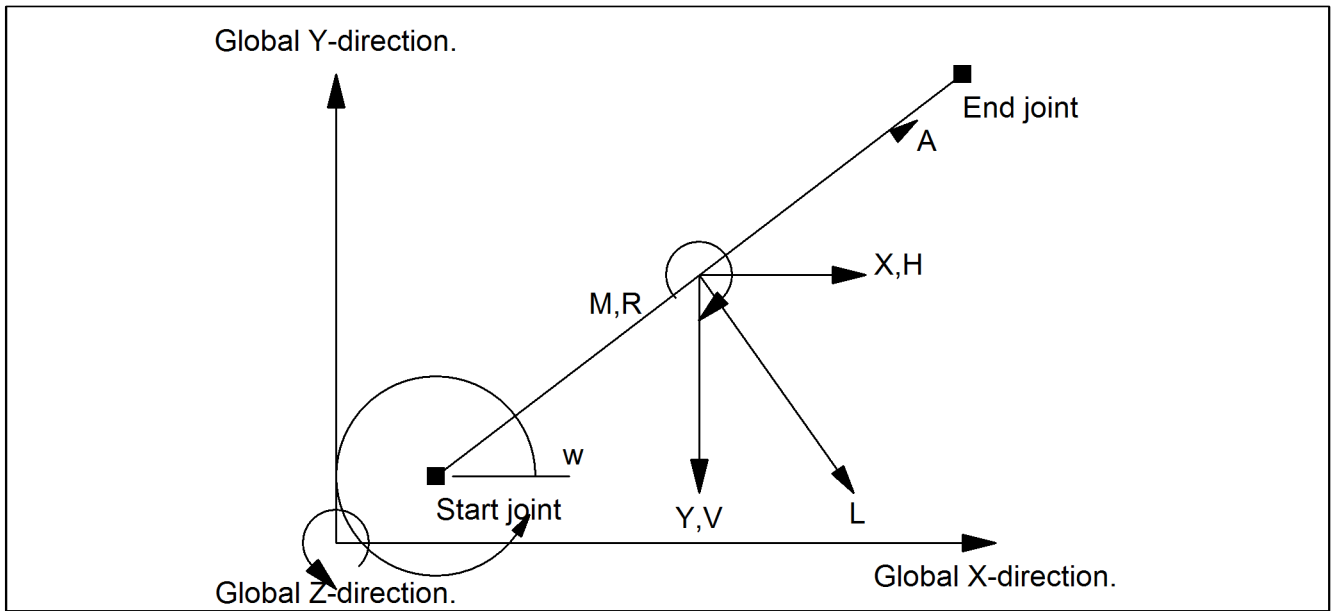
REACTIONS

Reactions are to be understood as external forces acting on the structure to produce equilibrium.

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

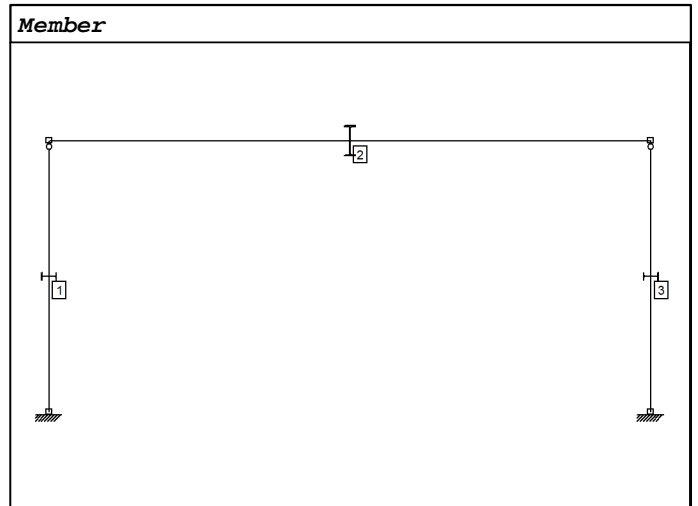


Joints

X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	X (m)	Y (m)	X	Y	M	
1	0	0	R	R	R	2	0	5.400		3	12.000	0	R	R	R	4	12.000	5.400		

Member

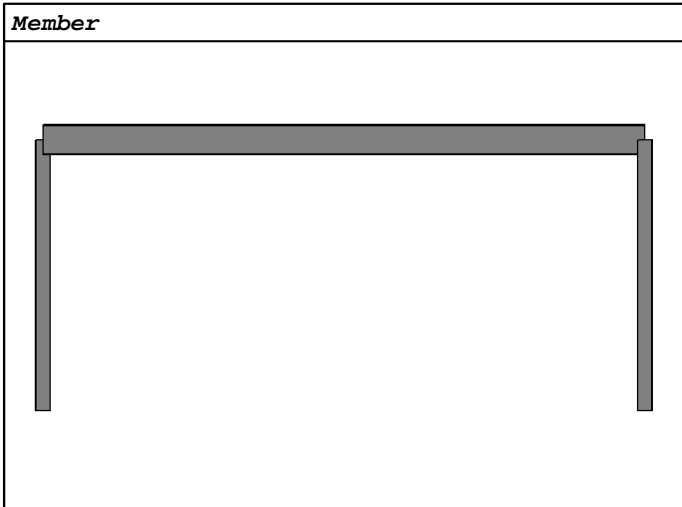
Name	Joint 1	Joint 2	Initial- (H=Hinge)	(H=Hinge)	bow imperfection.	Name	Joint 1	Joint 2	Initial- (H=Hinge)	(H=Hinge)	bow imperfection.
1	1	2	H		No	3	3	4	H		No
2	2	4			No						



Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra



Section data

Name	Dir.	Area (m ²)	I (m ⁴)	h (m)	z (m)	E-modulus (kN/m ²)	Cost (kr)
IPE 300 / S355	y-y	5.381e-3	8.36e-5	0.300	0.150	2.10e8	
IPE 600 / S355	y-y	1.560e-2	9.21e-4	0.600	0.300	2.10e8	

Section/Member

Member	Section	Dir.	Length (m)	Weight (kg)	Cost (kr)
1	IPE 300 / S355	y-y	5.400	227.880	
2	IPE 600 / S355	y-y	12.000	1464.000	
3	IPE 300 / S355	y-y	5.400	227.880	
Sum			22.800	1919.760	

Section specification

Section	Length (m)	Number	Weight (kg)	Cost (kr)
IPE 300 / S355	5.400	2	455.760	
IPE 600 / S355	12.000	1	1464.000	
Sum	22.800	3	1919.760	

Mould costs

	hour/m ²	kr/m ²		hour/m ²	kr/m ²
Beam mould	0.80	50.00	Column mould	0.90	50.00

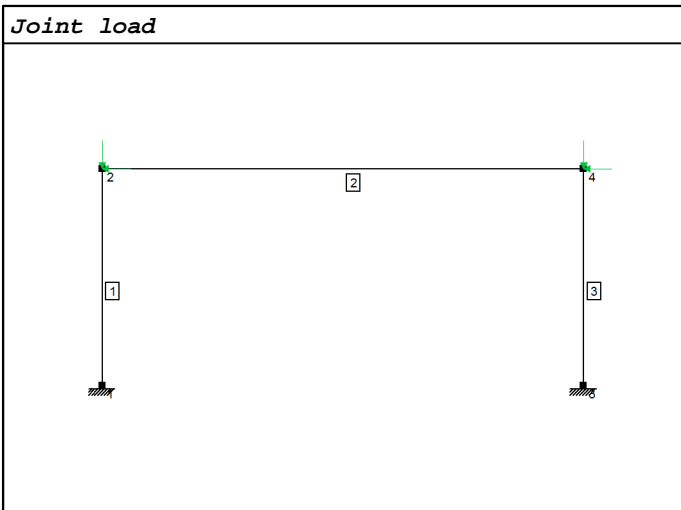
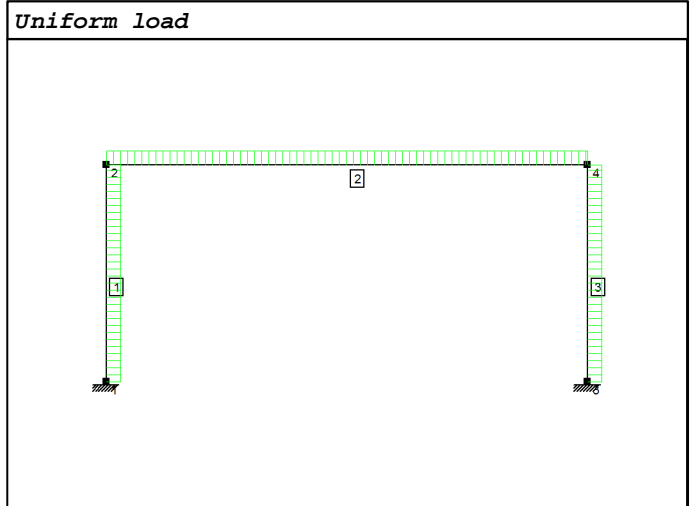
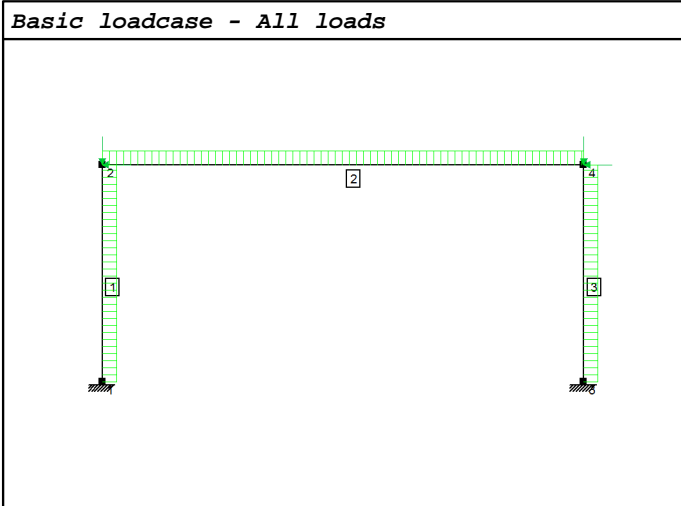
Work salary: 220kr/hour

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Basic loadcase: All loads



Uniform load

Member	Dir.	Load intensity	L1(m)	L2(m)
3	L / q(kN/m)	-3.0	0	0
1	L / q(kN/m)	-1.5	0	0

Member	Dir.	Load intensity	L1(m)	L2(m)
2	Y / q(kN/m)	25.0	0	0

Joint load

Joint	Dir.	Load intensity	Joint	Dir.	Load intensity
2	Y / P(kN)	2.3	4	X / P(kN)	-2.4
4	Y / P(kN)	2.3	2	X / P(kN)	-1.4

Basic loadcase

Name	Des.
All loads	B1

Loadcase

Name	Combination	Limit	Type	Dependency
1 Loadcase 1: All loads	B1		ULS	

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Results

Max pos. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max neg. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max neg. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	44.1	Loadcase 1: All loads	3	53.9	Loadcase 1: All loads
2	146.5	Loadcase 1: All loads			

Max stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	49.9	Loadcase 1: All loads	3	59.8	Loadcase 1: All loads
2	146.5	Loadcase 1: All loads			

Equilibrium check - 1. order

Loadcase	X-dir. kN	Y-dir. kN	X-dir. kN	Y-dir. kN
Loadcase 1: All loads	-28.100	-304.600	28.100	304.600

Equilibrium check - 2. order

Loadcase	X-dir. kN	Y-dir. kN	X-dir. kN	Y-dir. kN
Loadcase 1: All loads	-28.100	-304.600	28.100	304.600

Max pos. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Max pos. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	-150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	-150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max pos. axial force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-3.418	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	0	-0.382	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. axial force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	0	-4.281	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	0	-1.212	-152.300	Loadcase 1: All loads

Min neg. stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	-100.7	Loadcase 1: All loads	3	-110.5	Loadcase 1: All loads
2	-146.7	Loadcase 1: All loads			

Min neg. stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	-106.5	Loadcase 1: All loads	3	-116.4	Loadcase 1: All loads
2	-146.8	Loadcase 1: All loads			

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Max abs. moment - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.000	0	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. moment - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	450.052	0	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. shear force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. shear force - 2. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. stresses - 1. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	100.7	Loadcase 1: All loads	3	110.5	Loadcase 1: All loads
2	146.7	Loadcase 1: All loads			

Max abs. stresses - 2. order

Member	Sig MPa	Loadcase	Member	Sig MPa	Loadcase
1	106.5	Loadcase 1: All loads	3	116.4	Loadcase 1: All loads
2	146.8	Loadcase 1: All loads			

Max abs. axial force - 1. order

Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	40.325	-11.518	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0	150.000	-2.018	Loadcase 1: All loads
3	45.805	-16.582	-152.300	Loadcase 1: All loads

Max abs. axial force - 2. order

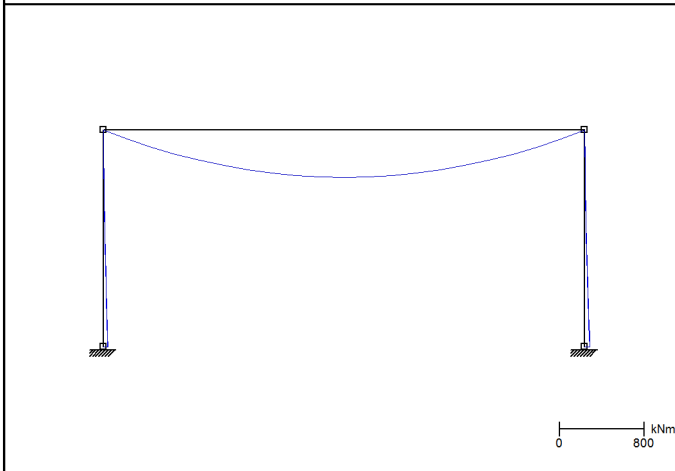
Member	M kNm	V kN	N kN	Loadcase
1	43.568	-11.513	-152.300	Loadcase 1: All loads
2	0.038	150.000	-2.013	Loadcase 1: All loads
3	49.095	-16.587	-152.300	Loadcase 1: All loads

Frame1

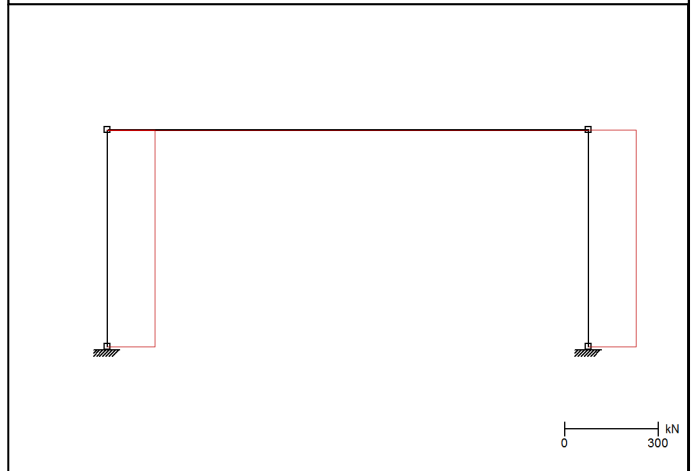
2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

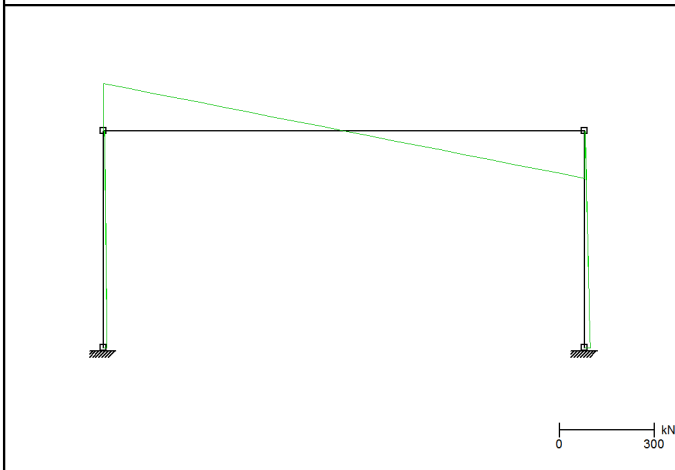
Loadcase - Loadcase 1: All loads Moment - 1., 2. order



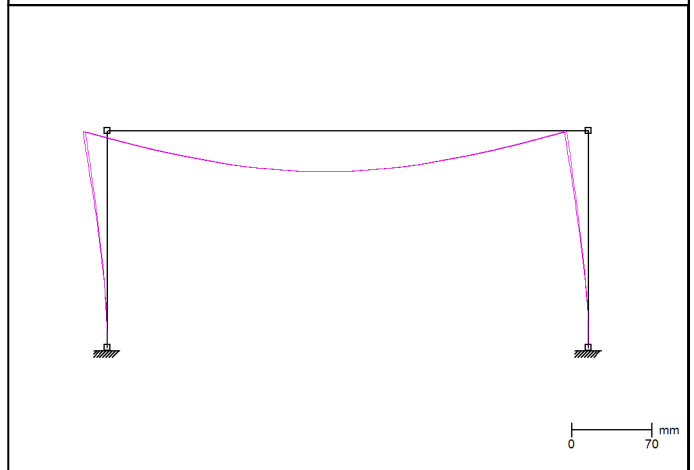
Loadcase - Loadcase 1: All loads Axial force - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Shear force - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Deflection - 1., 2. order



Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 1. order

Member	Joint	M kNm	V kN	N kN	Member	Joint	M kNm	V kN	N kN
1	1	40.325	-11.518	-152.300	4	4	0	-150.000	-2.018
	2	0	-3.418	-152.300	3	3	45.805	-16.582	-152.300
2	2	0	150.000	-2.018	4	4	0	-0.382	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 2. order

Member	Joint	M kNm	V kN	N kN	Member	Joint	M kNm	V kN	N kN
1	1	43.568	-11.513	-152.300	4	4	0.038	-150.000	-2.013
	2	0	-4.281	-152.300	3	3	49.095	-16.587	-152.300
2	2	0.038	150.000	-2.013	4	4	0	-1.212	-152.300

Joint deflections - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad
1	0	0	0	3	0	0	0				
2	-19.308	-0.728	-0.009	4	-19.315	-0.728	0.009				

Joint deflections - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad	Joint	ux mm	uy mm	fi rad
1	0	0	0	3	0	0	0				
2	-21.443	-0.728	-0.009	4	-21.451	-0.728	0.009				

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Support reactions - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm	Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm
1	11.518	152.300	-40.325	3	16.582	152.300	-45.805

Support reactions - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads

Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm	Joint	Rx kN	Ry kN	Rm kNm
1	11.513	152.300	-43.568	3	16.587	152.300	-49.095

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	40.325	-11.518	-152.300	5.400	0	-3.418	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	43.568	-11.513	-152.300	5.400	0	-4.281	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-100.691	-28.303	44.084	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-106.512	-28.303	49.906	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-19.308	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-21.443	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	0	150.000	-2.018	12.000	0	-150.000	-2.018
6.000	450.000	0	-2.018				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	0.038	150.000	-2.013	12.000	0.038	-150.000	-2.013
6.000	450.052	0	-2.013				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-0.129	-0.129	-0.129	12.000	-0.129	-0.129	-0.129
6.000	-146.741	-0.129	146.482				

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-0.141	-0.129	-0.117	12.000	-0.141	-0.129	-0.117
6.000	-146.758	-0.129	146.499				

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	-19.308	-0.728	6.000	-19.312	-35.635	12.000	-19.315	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	-21.443	-0.728	6.000	-21.447	-35.640	12.000	-21.451	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 1. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	45.805	-16.582	-152.300	5.400	0	-0.382	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 2. order

Length m	M kNm	V kN	N kN	Length m	M kNm	V kN	N kN
0	49.095	-16.587	-152.300	5.400	0	-1.212	-152.300

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 1. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-110.529	-28.303	53.923	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 2. order

Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa	Length m	Sig o MPa	Sig 0 MPa	Sig u MPa
0	-116.435	-28.303	59.828	5.400	-28.303	-28.303	-28.303

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 1. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-19.315	-0.728

Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 2. order

Length m	u mm	y mm	Length m	u mm	y mm
0	0	0	5.400	-21.451	-0.728

As the analysis is made according to 2:nd order theory the flexural buckling check in the plane of the frame for members in compression will be made with regard to these 2:nd order moments.

Member: 1 IPE 300 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Left	Not defined at Right
Load level	Top	

Member: 2 IPE 600 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Bottom level	Not defined at Top level

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖ\LIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Details ()

Load level	Top	
------------	-----	--

Member: 3 IPE 300 / S355

Details ()

End conditions	[Hinged]	[Hinged]
End stiffenings	Non-rigid end post	Non-rigid end post
Buckling stiffeners	Not defined at	
Lateral supports	Not defined at Left	Not defined at Right
Load level	Top	

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖLIIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Index

SUMMARY	1
CONVENTIONS	1
Picture:	2
Joints	2
Member	2
Picture:Joints	2
Picture:Member	2
Picture:Member	3
Section data	3
Section/Member	3
Section specification	3
Mould costs	3
Work salary: 220kr/hour	3
Basic loadcase: All loads	4
Picture:Basic loadcase - All loads	4
Picture:Uniform load	4
Picture:Joint load	4
Uniform load	4
Joint load	4
Basic loadcase	4
Loadcase	4
Results	5
Max pos. moment - 1. order	5
Max pos. moment - 2. order	5
Max neg. moment - 1. order	5
Max neg. moment - 2. order	5
Max stresses - 1. order	5
Max stresses - 2. order	5
Equilibrium check - 1. order	5
Equilibrium check - 2. order	5
Max pos. shear force - 1. order	5
Max pos. shear force - 2. order	6
Min neg. shear force - 1. order	6
Min neg. shear force - 2. order	6
Max pos. axial force - 1. order	6
Max pos. axial force - 2. order	6
Min neg. axial force - 1. order	6
Min neg. axial force - 2. order	6
Min neg. stresses - 1. order	6
Min neg. stresses - 2. order	6
Max abs. moment - 1. order	7
Max abs. moment - 2. order	7
Max abs. shear force - 1. order	7
Max abs. shear force - 2. order	7
Max abs. stresses - 1. order	7
Max abs. stresses - 2. order	7
Max abs. axial force - 1. order	7
Max abs. axial force - 2. order	7
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Moment - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Axial force - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Shear force - 1., 2. order	8
Picture:Loadcase - Loadcase 1: All loads Deflection - 1., 2. order	8

Frame1

2014-03-28

F:\INSINÖÖRITYÖLIITE 2\Mastopilarikehän
vertailulaskelmat 2.fra

Index

Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 1. order	8
Loadcase - Loadcase 1: All loads Joint forces - 2. order	8
Joint deflections - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	8
Joint deflections - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	8
Support reactions - 1. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	9
Support reactions - 2. order Loadcase: Loadcase 1: All loads	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Section values - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Stresses - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 1 Deflection - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Section values - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 1. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Stresses - 2. order	9
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 2 Deflection - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Section values - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Stresses - 2. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 1. order	10
Loadcase - Loadcase 1: All loads Member : 3 Deflection - 2. order	10
As the analysis is made according to 2:nd order theory the flexural buckling check in the plane of the frame for members in compression will be made with regard to these 2:nd order moments.	10
Member: 1 IPE 300 / S355	10
Details ()	10
Member: 2 IPE 600 / S355	10
Details ()	10
Details ()	11
Member: 3 IPE 300 / S355	11
Details ()	11