Tampereen ammattikorkeakoulu

AMMATILLINEN OPETTAJAKORKEAKOULU

Opettajankoulutuksen kehittämishanke

Matematiikan osaaminen peruskoulun jälkeen

Tarja Puurunen

2007

PUURUNEN TARJA: Matematiikan osaaminen peruskoulun jälkeen
Tampereen ammattikorkeakoulu
Opettajankoulutuksen kehittämishanke 12 s + 33 liitesivua
Ryhmän opettaja Kosti Nivalainen
Toukokuu 2007
Asiasanat: oppiminen, matematiikka, opetusmateriaali

TIIVISTELMÄ

Useiden kansallisten ja kansainvälisten tutkimusten mukaan suomalaisten peruskoulunsa päättäneiden opiskelijoiden matematiikan osaamisen taso on hyvä arjessa tarvittavissa päättelytaidoissa, mutta parantamisen varaa on perusmatematiikan, mekaanisen laskutaidon osalta.

Kehittämishankkeen tavoitteena on ollut valmistaa perusmatematiikan opetusmateriaali, joka soveltuu perusmatematiikan kertaukseen ja mekaanisen laskurutiinin harjoittamiseen. Materiaali on tarkoitettu toisen asteen opintoihin kertausaineistoksi, jota tarvitaan erilaisissa kemian ja fysiikan laskutoimituksissa.

Opetusmateriaalin ensimmäisessä osassa on perusmatematiikan osaamisesta testi, jolla saadaan selville perusmatematiikan osaamisen taso. Jos oppilas ei läpäise testiä, niin on syytä kerrata varsinainen perusmatematiikan materiaali. Aineiston toisessa osassa on ohjeet peruslaskutoimituksista esimerkein ja harjoitustehtävin. Lopussa on harjoitustehtävien vastaukset.
Materiaali sopii opetusmateriaaliksi tai itsenäisesti opiskelevalle.

SISÄLLYSLUETTELO

1. KEHITTÄMISHANKKEEN LÄHTÖKOHDAT

Tavoitteena oli tehdä perusmatematiikan harjoitusaineisto (LIITE 1) opetusmateriaaliksi, jonka avulla voidaan kerrata perusmatematiikan osa-alueita ja harjoitella mekaanista laskurutiinia. Aineisto on koottu tukemaan toisen asteen opintoja. Tämä materiaali liitetään myöhemmin kemian laskujen yhteyteen.

Kehittämishankkeeni aiheena on peruslaskutoimituksiin liittyvän materiaalin tuottaminen. Itse opetan kemian laskuja ja aiheeseen liittyen tein kyselyn keväällä 2006 (LIITE 2) ammattiopistojen ja ammattikorkeakoulujen kemian opettajille (kymmenen opettajaa). Sain vastauksen neljältä opettajalta, joista yksi oli ammattioppilaitokselta ja kolme ammattikorkeakoulusta. Kyselyssä yritin selvittää mitä aihealueita kemian laskuihin liittyen he käyvät läpi kemian opinnoissa. Kysyin mielipiteitä miksi kemian laskut ovat vaikeita oppilaille, niin opettajien kuin oppilaitten mielestä. Olen opettanut ammattiopistoilla ja ammattikorkeakoululla kemiaa, fysiikkaa ja matematiikkaa. Kaikkien aineiden kohdalla olen huomannut, että perusmatematiikan osaaminen on heikkoa. Sain vahvistusta mielipiteelleni kyselyjen vastauksista. Myös vastaajat kokivat opiskelijoiden matemaattisten perustaitojen heikkouden, laskurutiinin puuttumisen ja oppilaitten oman kielteisen ennakkoasenteen.
Voin käyttää jatkossa kyselymateriaalia laatiessani aineiston kemian laskuja varten. Tähän kehittämishankkeeseen olen liittänyt vain perusmatematiikan aineiston.

2. MATEMATIIKAN OSAAMINEN

Peruskoulun matematiikan oppimäärä sisältää kokonaisluvuilla, murtoluvuilla ja desimaaliluvuilla laskemisen. Lisäksi oppimäärä sisältää potenssit, polynomit, funktiot, yhtälöt, potenssin käsitteen ja geometriaa.
(http://www.oph.fi/etalukio/opiskelumodulit/manmath/)

Peruskoulun päättäneiden tulisi hallita nämä osa-alueet siten, että heillä olisi syntynyt riittävä laskurutiini, jotta he pystyisivät soveltamaan näitä tietoja toisen asteen opinnoissa käytännön tehtävien ratkaisuun.

Nämä tiedot ja taidot ovat tärkeitä siksi, että eteneminen toisen asteen opinnoissa ei tarpeettomasti vaikeutuisi.

3. MATEMATIIKAN OSAAMINEN TUTKIMUSTEN PERUSTEELLA

Suomi on osallistunut kansainvälisiin matematiikan osaamisen arviointeihin. OECD-maiden järjestämään PISA-hankkeeseen (Programme for International Student Assessment) osallistui vuonna 2000 28 OECD-maata ja 4 sen ulkopuolelta sekä vuonna 2003 vastaavasti 30 ja 11 maata. Siinä arvioidaan 15-vuotiaiden (Suomessa perusopetuksen 9. vuosiluokan oppilaita) äidinkielen, matematiikan ja luonnontieteiden osaamista. Tutkimus on kolmivaiheinen: kussakin vaiheessa yksi tutkimusaiheista saa pääpainon. Vuoden 2003 arviointikierroksella matematiikka oli tutkimuksen keskeisin aine. Pisa-tutkimuksen (http://ktl.jyu.fi/pisa/tied080502l.pdf) tulosten mukaan suomalaiset peruskoulun viimeisen luokan oppilaat ovat matematiikan huippuosaajia. Kuitenkin yliopistojen ja ammattikorkeakoulujen matematiikan opettajat ovat huolissaan, sillä uusien opiskelijoiden matematiikan taidot ovat heikentyneet dramaattisesti (http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik1/naatanen.pdf). Tämä ristiriita johtuu siitä, että Pisa-tutkimuksessa ei mitattu varsinaista matematiikan osaamista, vaan arjen käytännön ratkaisutaitoja, ”arkiosaamista”. Sellainen matematiikka, jota tarvitaan esimerkiksi lukio- ja ammattiopinnoissa, ei ollut mukana. Tutkimuksessa ei mitattu miten hyvin osataan esimerkiksi laskea murtoluvuilla, ratkaista yksinkertaisia yhtälöitä, tehdä varsinaisia geometrisiä päättelyjä tai käsitellä algebran lausekkeita.

Toinen kansainvälinen vertailututkimus TIMSS:n (Third International Mathematics and Science Study Repeat) tehtiin vuonna 1999. Arviointiin osallistui 38 maata, joista OECD:n jäseniä oli 14. Arvioitavat olivat Suomessa perusopetuksen 7. vuosiluokan oppilaita. Tämän tutkimuksen mukaan suomalaisten 7 –luokkalaisten matematiikan osaaminen olisi vain keskitasoa kansainvälisessä vertailussa. Suomessa vahvoja matematiikan osa-alueita olivat luvut ja laskutoimitukset sekä tilastot ja todennäköisyys. Raportin mukaan matematiikan osaamisessa oli myös puutteita ja ongelmakohtia. Suhteellisesti heikoimmin osattuja sisältöalueita olivat geometria ja algebra. Selkeitä puutteita ilmeni ns. käsitteellisessä osaamisessa (mm. ominaispiirteet, säännönmukaisuudet, yleistäminen), mikä on olennaisen tärkeää tiedon soveltamisen kannalta. Näitä alueita koskevat tulokset kaipaavat jatkoselvittelyjä mm. sen vuoksi, että suurta osaa niistä ei ollut vielä 7-luokkalaisille opetettu (Dimensio 3/2001, 5).

Kansallisessa matematiikan kokeessa testattiin peruskoulun 9 –luokkalaisten matematiikan osaamista vuonna 2002 ja 2004. Tutkimuksiin osallistui vuonna 2002 4000 oppilasta ja vuonna 2004 4500 oppilasta. Tulokset olivat molemmissa tutkimuksissa samansuuntaiset. Matematiikan osa-alueista oppilaat hallitsivat parhaiten luvut ja laskutoimitukset. Eniten hankaluuksia tuotti geometria, etenkin avaruusgeometria. Suurimmat erot oppilaiden osaamisessa löytyivät algebrasta ja funktioista. Myös prosenttilaskuissa oli suuria suorituseroja. Oppilaiden matematiikan perustaidot olivat keskimäärin hyvät, mutta ongelmaratkaisutaidot olivat vain tyydyttävällä tasolla.

Kansainväliseen Pisa-tutkimukseen verrattuna nämä tulokset antavat kriittisemmän kokonaiskuvan suomalaisten koululaisten matematiikan osaamisesta. Mutta jos vertaamme eri osa-alueiden hallintaa, kansainvälisten ja kansallisten arviointien tuloksissa ei ole juuri eroja (Opetusneuvos Leena Mattila / http://www.edu.fi /page.asp?path=498,1329,1514,13276,41210).

3.1. Syitä perusmatematiikan heikkoon hallintaan

Tampereen ammattikorkeakoulussa tehdyssä tutkimuksessa on selvitetty tekniikan koulutusohjelmien ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoiden matematiikan opintoihin liittyviä vaikeuksia (Janhonen & Mäkinen 2007, 39). Kyselytutkimuksen mukaan peruskoulupohjaiset oppilaat kokivat merkittäviä matematiikan oppimisvaikeuksia enemmän kuin lukiopohjaiset oppilaat. Samassa tutkimuksessa oppilailla esiintyi motivaation puutetta eikä valittu opiskeluala kiinnostanut. Oppilaat kokivat myös lähituntien määrän vähäiseksi.

3.1.1. Asenteet

Matematiikan perusmateriaaleja ovat mekaaniset laskutoimitukset (eivät pelkästään), vaihtoehtoisten ratkaisutapojen löytäminen ja matemaattinen ajattelutapa.
Kirjassa Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla (Halinen 1990, 15) peruskoulun päättäneiden nuorten matemaattisessa ajattelussa on havaittu seuraavanlaisia puutteita:

- Oppilaille matematiikka on mekaanista laskemista, eivätkä he näe sillä olevan merkitystä elämässään.
- Osalla on negatiivinen asenne matematiikkaan ja käsitys itsestään matematiikan oppijana on heikko. Tämän vuoksi todellinen jatko-opintokelpoisuus matematiikan osalta on jäänyt saavuttamatta, vaikka oppilailla olisi hyväksytty arvosana päästötodistuksessa.
- Matematiikkaa nopeasti oppivista tulee alisuoriutujia, sillä he eivät ole saaneet kykyjään vastaavia haasteita. Seurauksena voi olla pahoja pettymyksiä jatko-opinnoissa mm. arvosanojen rajujen putoamisen johdosta.

Seitsemäsluokkalaisten asenteet matematiikkaa kohtaan (Kallonen-Rönkkö 1997, 15): hieman yli puolet koululaisista koki matematiikan joko yhdentekevänä tai vastenmielisenä oppiaineena, vaikka useimmat uskoivat tarvitsevansa matematiikkaa tulevassa työssään. Toisaalta eri tutkimusten mukaan matematiikalle ei löydetä käytännön merkitystä, sitä ei osata soveltaa käytäntöön.

Kansallisessa matematiikan kokeessa testattiin 2002 peruskoulun 9 – luokkalaisten matematiikan osaamista. Samassa yhteydessä oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan selvitettiin kolmesta näkökulmasta: oppiaineesta pitäminen, käsitys oppiaineen hyödyllisyydestä ja tunne omasta osaamisesta. Asenteet olivat pitämisen ja osaamisen suhteen keskimäärin neutraaleja, vaikka matematiikka ei kuulunut oppilaiden lempiaineisiin. Sitä kylläkin pidettiin hyödyllisenä. Poikien suhtautuminen matematiikkaan oli positiivisempaa kuin tyttöjen, mikä ilmeni etenkin käsityksessä omasta osaamisesta. Asenteiden myönteisyys ja koemenestys olivat yhteydessä toisiinsa. Vastaavanlaisessa kokeessa 2004 poikien asenteet matematiikkaa kohtaan ovat myönteisempiä kuin tyttöjen, ja heidän itseluottamuksensa on parempi. Molemmat sukupuolet pitävät matematiikkaa hyödyllisenä oppiaineena, joskaan siitä ei kovin pidetä. Asenne on yhteydessä osaamiseen (http://www.minedu.fi/OPM/Koulutus/?lang=fi).

Kokemusteni mukaan oppilaat eri oppilaitoksissa ovat kyseenalaistaneet kemian ja yleensä luonnontieteiden opiskelun välttämättömyyttä. Jos oppija ei ymmärrä, miksi tietty asia pitää osata, ei opittua käytetä hyväksi uusissa tilanteissa.

Esimerkiksi tentissä hyvin muistettua tietoa ei välttämättä käytetä käytännön ongelmanratkaisutilanteissa. Konstruktivistinen oppimisnäkemys kuitenkin kyseenalaistaa sellaisen yksityiskohtaisen opetuksen etukäteissuunnittelun, jossa oppijan yksilöllistä lähtötilannetta ei huomioida. Opettajan tulisi pystyä suunnittelemaan sellainen joustava "oppimisympäristö", jossa oppijan on mahdollista rakentaa tietämystään omista lähtökohdistaan (Leino 2004, 20).
Konstruktivistisen oppimisteorian mukaan perustietoja ja taitoja tarvitaan tavoitteiden perusrakenteina. Oppimisen lähtökohtana ovat opiskelijan aikaisemmat tiedot, kokemukset, ongelmanratkaisutavat ja skeemat - oppijan tapa hahmottaa maailmaa. Oppiminen on näiden muokkaamista, täydentämistä ja uudelleenrakentamista.

3.1.2. Muita tekijöitä

Luokkien heterogeenisuus, opetuksen ja oppimisen monotonisuus heikentävät matematiikan opetuksen kiinnostavuutta (Kallonen-Rönkkö 1997, 15). Oppilaat toivoivat opetuksen ja työtapojen monipuolistamista ja oppilaiden omien tarpeiden huomioonottamista.

Kirjan Opetuskasvatus (Halinen 1991, 15) mukaan ongelmana koetaan opetusryhmien heterogeenisuuden lisäksi oppilaiden välillä kasvavat suorituserot. Heterogeenisen luokan opettaminen on ratkaistu eriyttämällä opettamista siten, että tavallisimmin lasketetaan oppilailla vaihteleva määrä eritasoisia tehtäviä. Tällainen yleensä oppikirjaan tukeutuva ”tehtävädidaktiikka” painottaa kirjan käyttämistä ja sen seuraamista. Tällainen johtaa käsitykseen, että kouluhallituksen hyväksymän kirjan läpikäyminen on sama kuin opetussuunnitelma. Seurauksena on ollut, että opetus on suunnattu keskitasolle ja se on mekaanista. Huomiota vaille jäävät nopeasti suoriutuvat ja hitaammat oppilaat. Samoin kielen osuus matematiikan opetuksessa joudutaan usein sivuuttamaan sekä useiden oikeiden ratkaisutapojen löytäminen ja vaihtoehtoisten ratkaisujen hakeminen ja niiden vertailu saavat liian vähäisen aseman.

Syitä 5 - 7 luokkalaisten heikkoihin matematiikan oppimistuloksiin FM Jukka Törnroosin väitöskirjan mukaan ovat oppikirjojen ja opetussuunnitelmien vaihtelevuus. Tutkimuksen mukaan eri matematiikan oppikirjojen tulkinnat opetussuunnitelmasta poikkesivat toisistaan huomattavasti.
(http://info.adm.jyu.fi/main/portti/tiedotteet/2005/01/3330/show_announcement/)
Kouluissa käytettyjen matematiikan oppikirjojen väliset erot vaikuttivat oppilaiden oppimistuloksiin. Oppimistuloksissa näkyivät myös opetussuunnitelmassa esitetyt painotukset. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden opettajilta saatujen tietojen perusteella oppikirjat olivat olleet annetun opetuksen pohjana. Eri oppikirjoja 7. luokalla käyttäneiden oppilaiden matematiikan osaamisen kokonaispistemäärissä ei ollut eroja, mutta oppikirjoja erottelevien matematiikan osa-alueiden kohdalla selkeitä osaamiseroja oli nähtävissä. Oppimistulosten kansainvälisessä vertailussa (TIMSS-tutkimus 1999) näkyivät selvästi myös opetussuunnitelman perusteissa esitetyt painotukset. Matematiikan opetuksen kohdalla on painotettu ongelmanratkaisun merkitystä. Tämä näkyi tuloksissa siten, että 7. luokan oppilaat menestyivät paremmin sanallisesti esitetyissä ongelmatehtävissä kuin pääasiassa mekaanista laskemista vaativissa tehtävissä. Diagrammien ja taulukoiden tulkinta nousi esille niin oppikirjoissa kuin Opetussuunnitelman perusteiden (1994) tavoitteissakin. Tilastot olivatkin suomalaisten parhaiten hallitsema matematiikan sisältöalue. Algebran käsittely puolestaan painottuu Suomessa perusopetuksen viimeisille luokille ja vielä seitsemännen luokan jälkeen algebran tehtävät osattiin heikosti.

Matematiikan tuntimäärät ovat peruskoulussamme pienet UNESCON tekemän tutkimuksen mukaan. Luokkakoko on kasvanut. Vuoteen 1990 mennessä yli 20 oppilaan opetusryhmien osuus ala-asteella lähes 80 prosenttiin (Kallonen-Rönkkö 1997). Opettajien muodollinen pätevyys oli erittäin korkea molempina ajankohtina. Luokanopettajat käyttivät ilmoituksensa mukaan vuonna 1979 matematiikan tuntien valmisteluun 4 tuntia ja vuonna 1990 enää 2,5 – 3 tuntia.

4. JOHTOPÄÄTÖKSET

Kansainvälisten tutkimusten ja omien kokemusteni perusteella peruskoulunsa päättäneiden oppilaiden perusmatematiikan osaaminen ei ole riittävää jatko-opintojen kannalta ajatellen. Pitäisikö uudelleen arvioida ja suunnitella peruskoulun matematiikan opetus? Peruskoulun jälkeen jatko-opiskelut tulevat vaikeiksi, jos matemaattinen taso on heikko. Uusia yhä vaikeampia asioita on vaikea omaksua, jos huomattava osa opiskelun panostuksesta menee peruskoulutason asioiden pohdiskelussa. Kierre jatkuu jatko-opinnoissa ja eteenpäinmeno vaikeutuu.
Konstruktivistisen oppimisteorian mukaan perustietoja ja taitoja tarvitaan tavoitteiden perusrakenteina. Oppimisen lähtökohtana ovat opiskelijan aikaisemmat tiedot, kokemukset, ongelmanratkaisutavat ja skeemat - oppijan tapa hahmottaa maailmaa. Oppiminen on näiden muokkaamista, täydentämistä ja uudelleenrakentamista.

Kehittämishankkeen liitteenä oleva perusmatematiikan opetusmateriaali soveltuu perusmatematiikan kertaukseen ja mekaanisen laskurutiinin harjoittamiseen. Materiaali on tarkoitettu toisen asteen opintoihin kertausmateriaaliksi, jota tarvitaan erilaisissa kemian ja fysiikan laskutoimituksissa. Materiaali liitetään myöhemmin kemian laskujen yhteyteen.

Materiaalin ensimmäisessä osassa on perusmatematiikan osaamisesta testi, jolla saadaan selville perusmatematiikan osaamisen taso. Jos oppilas ei läpäise testiä, on syytä kerrata perusmatematiikan aineisto. Materiaalin toisessa osassa seuraa ohjeet peruslaskutoimituksista esimerkein ja harjoitustehtävin. Lopussa on harjoitustehtävien vastaukset.
Aineisto sopii opetusmateriaaliksi tai itsenäisesti opiskelevalle.

Tulevaisuudessa perusmatematiikan opetusmateriaali testataan käytännössä ja muokataan palautteiden mukaisesti sekä liitetään kemian laskujen yhteyteen. Mahdollisuuksien mukaan koko yhdistetty materiaali julkaistaan kirjana.

LÄHDELUETTELO

Janhonen S. & Mäkinen M. Matematiikan oppimisvaikeudet. Tekniikan koulutusohjelmat 2003-2004. Tampereen ammattikorkeakoulun julkaisuja. Sarja B. Raportteja 13. Tampere 2005.

Kallonen-Rönkkö M. 1997. Seitsemäsluokkalaisten suhde matematiikkaan: Asenteet ja oppimistulokset. LUMA-hankkeen lähtötasomittaukset Kajaanissa. Sarja A: Tutkimuksia 14/1997.

Kupari P. & Reinikainen P. Matematiikan osaaminen TIMSS-tutkimuksen perusteella. Dimensio 3/2001, http://www.maol.fi/frames/dimensio/D3kansio/TIMMS_d3.pdf luettu 26.04.2007.

Leino J. 2004, Konstruktivismi matematiikan opetuksessa, Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, Räsänen P., Kupari P., Ahonen T. & Malinen P. (toim.), 2.uudistettu painos, Jyväskylän yliopisto.

Halinen I. 1991. Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla, Helsinki: VAPK.

Opetusneuvos Leena Mattila / http://www.edu.fi /page.asp?path=498,1329,1514,13276,41210 luettu 23.04.2007

http://info.adm.jyu.fi/main/portti/tiedotteet/2005/01/3330/show_announcement/ luettu 26.04.2007.

http://ktl.jyu.fi/pisa/tied080502l.pdf luettu 26.04.2007.

http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik1/naatanen.pdf luettu 26.04.2007.

http://www.minedu.fi/OPM/Koulutus/?lang=fi luettu 26.04.2007.

http://www.oph.fi/etalukio/opiskelumodulit/manmath/ luettu 26.04.2007.

SISÄLLYSLUETTELO

JOHDANTO

Aineistossa on otettu esille niitä peruslaskutoimituksia, joita tulee vastaan kemian ja fysiikan laskutoimituksissa.
Aineiston ensimmäisessä osassa (sivut 3-5) on perusmatematiikan osaamisesta testi, jolla saadaan selville perusmatematiikan osaamisen taso. Jos testin kustakin alueesta saa vähemmän kuin puolet oikein, on syytä kerrata perusmatematiikan aineisto. Aineiston toisessa osassa ohjeet peruslaskutoimituksista esimerkein ja harjoitustehtävin. Lopussa seuraa harjoitustehtävien vastaukset.
Aineisto sopii opetusmateriaaliksi tai itsenäisesti opiskelevalle.

OSA 1. TASOTESTI

Murtolukulaskut

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=$

2. $2-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=$

3. $3\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}=$

4. $3\times1\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=$

5. $5\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=$

6. $12:2\frac{2}{5}\times\frac{1}{9}=$

7. $1\frac{2}{3}\times4\frac{1}{5}+5\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=$

8. $\dfrac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{24}{25}-\frac{3}{5}\right)}=$

Prosenttilaskut

1. Kuinka monta prosenttia luku 4 on luvusta 250?

2. Mistä luvusta 12% on 6?

3. Kuinka paljon on 15% luvusta 220?

4. Mikä luku on 15% suurempi kuin 4?

5. Mikä luku on 15% pienempi kuin 1400?

6. Kuinka monta prosenttia luku 140 on suurempi kuin 60?

7. Kuinka monta prosenttia luku 60 on pienempi kuin luku 140?

8. Auton nopeusmittari näyttää 10% todellista nopeutta suurempaa lukemaa.
   a) Kuinka suuri on auton todellinen nopeus, kun mittari näyttää 90 km/h?
   b) Kuinka paljon mittari näyttää, kun auton todellinen nopeus on 90 km/h?

Potenssit ja neliöjuuri

1. a) $2^3 \times 2^4 =$

   b) $2^{-3} \times 2^4 =$

2. $\frac{3^4}{3^2} =$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

4. $(2x)^3 =$

5. $(x^2)^3 =$

6. $\sqrt{\frac{4}{9}} =$

7. $\sqrt{x^4} =$

8. $\sqrt[3]{1000} =$

Yhtälön ratkaisu

1. $2x - 2 = 0$

2. $\frac{1}{2}x = 1$

3. $\frac{8}{x} = \frac{4}{3}$

4. $x - 3(x - 2) = 3 - x$

5. $\frac{x - 1}{2} = \frac{x}{3}$

6. Ratkaise v:n suhteen yhtälö $c = \frac{m}{M \times v}$.

7. $4x^2 = 1$

8. $0{,}2x^2 - 0{,}8x = 1{,}2x$

9. $x^2 - 50x + 525 = 0$

10. $(x + 1)^2 = x^2$

OSA 2. PERUSMATEMATIIKKAA

LASKUTOIMITUKSISTA

Etumerkkien vaikutus laskutoimituksiin

Luvun vastaluku saadaan, kun luvun etumerkki muutetaan.

Samanmerkkisten ja erimerkkisten lukujen summat.

Esimerkiksi: -1 + (-2) = -3
1+2 = 3
-1 +2 = 1

Kahden luvun tulo on positiivinen, jos luvut ovat samanmerkkisiä ja negatiivinen, jos luvut ovat erimerkkisiä. Useista luvuista koostuvan tulo on etumerkki on +, jos miinuksia on parillinen määrä, muuten etumerkki on -.

Esimerkiksi: -2 x (-2) = 4 -2 x 2 = -4

Jakolaskun tulos eli osamäärä on positiivinen, jos osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkisiä ja negatiivinen, jos ne ovat erimerkkisiä.

Esimerkiksi: $\frac{-4}{-2} = 2$ $\frac{4}{-2} = -2$

Laskujärjestys

Jos lauseke sisältää useita laskutoimituksia peräkkäin, ne on suoritettava seuraavien sääntöjen mukaisessa järjestyksessä:

a) Kerto- ja jakolaskut lasketaan kirjoitetussa järjestyksessä.
b) Kun sulkeita ei ole, laskutoimituksista suoritetaan ensin kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle ja vasta sitten yhteen ja vähennyslaskut.
c) Kun lausekkeessa on sulkeita, sulkeissa olevat laskutoimitukset lasketaan ensin. Jos lausekkeessa on sisäkkäisiä sulkeita, lasketaan ensin sisimmäisten sulkeiden laskutoimitukset.

Yhteen ja vähennyslaskuissa sulkeet voidaan poistaa:
- jos sulkeiden edessä on + tai ei mitään, suluissa olevien termien etumerkit jätetään ennalleen
- jos sulkeiden edessä on -, miinusmerkki jätetään pois ja sulkeissa olevien termien etumerkit muutetaan vastakkaisiksi

MURTOLUVUT

Murtoluku, varsinainen murtoluku, epämurtoluku, sekaluku ja samannimiset murtoluvut.

Murtoluku on muotoa $\frac{a}{b}$, jossa a on osittaja (jaettava) ja b on nimittäjä (jakaja).

Varsinainen murtoluku on muotoa $\frac{2}{3}$. Epämurtoluku on muotoa $\frac{7}{3}$, josta saadaan sekamurtoluku. Sekamurtoluku muodostuu kokonaisosasta ja murto –osasta. Epämurtoluvusta $\frac{7}{3}$ saadaan sekamurtoluku jakamalla osoittaja (7) nimittäjällä (3).

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ $2\frac{1}{3}$ on sekamurtoluku, jossa 2 on kokonaisosa ja $\frac{1}{3}$ on murto –osa.

Samannimisillä murtoluvuilla on sama nimittäjä. Luvut $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ ovat samannimisiä, koska niillä molemmilla on sama luku , luku 3, nimittäjänä.

Murtolukujen laventaminen ja supistaminen

Murtolukuja joudutaan usein laventamaan samannimisiksi ja sieventämään supistamalla. Sekä lavennettaessa, että supistettaessa murtoluvun suuruus säilyy.

Murtoluku lavennetaan kertomalla osoittaja ja nimittäjä samalla luvulla. Laventamista käytetään, jotta murtoluvut saadaan samannimisiksi.

$$\frac{^{2)}3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{6}{8}$$

Murtoluku supistetaan jakamalla osoittaja ja nimittäjä samalla luvulla.

$$\frac{6^{(2}}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Samannimiset murtoluvut lasketaan yhteen:
- osoittajat lasketaan yhteen
- yhteinen nimittäjä pysyy samana

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$$

Erinimiset murtoluvut lasketaan yhteen:
- lavennetaan ne ensiksi samannimisiksi
- lasketaan osoittajat yhteen
- nimittäjä pysyy samana

$$\frac{^{3)}1}{2}+\frac{^{2)}2}{3}=\frac{3\times 1}{3\times 2}+\frac{2\times 2}{2\times 3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$$

Samannimisten murtolukujen vähennyslasku:
- suoritetaan osoittajassa vähennyslasku
- yhteinen nimittäjä pysyy samana

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$$

Erinimisten murtolukujen vähennyslasku:
- lavennetaan ne ensiksi samannimisiksi
- suoritetaan osoittajassa vähennyslasku ja pidetään nimittäjä samana

$$2-\frac{2}{5}=\frac{^{5)}2}{1}-\frac{2}{5}=\frac{5\times 2}{5\times 1}-\frac{2}{5}=\frac{10}{5}-\frac{2}{5}=\frac{10-2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Murtolukujen kerto- ja jakolasku

Murtoluvut kerrotaan keskenään siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$$2\times\frac{4}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{1\times 5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Murtoluku jaetaan toisella murtoluvulla kertomalla jaettava jakajan käänteis-luvulla.

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times 3}{5\times 2}=\frac{12^{(2}}{10}=\frac{12:2}{10:2}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Harjoitustehtäviä

Laskutoimituksia murtoluvuilla.

1. a) $2\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}-1\frac{3}{4}$ c) $-\frac{5}{4}-4\frac{1}{4}+5\frac{1}{2}$

2. a) $2\frac{4}{5}+3\frac{3}{4}$ b) $6-1\frac{2}{3}$ c) $3\frac{1}{8}+5\frac{3}{4}-2\frac{5}{6}$

3. a) $\frac{4}{5}\times 3\frac{1}{3}$ b) $7\frac{2}{3}:5$ c) $12:2\frac{2}{5}\times\frac{1}{9}$

4. a) $10+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ b) $10:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ c) $\left(15-4\times 2\frac{3}{4}\right):\left(6\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)$

5. a) $3\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right):8$ c) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

6. Jos MM:ltä kuluu aikaa nukkumiseen neljäsosa ja työaikaan kolmasosa vuorokaudesta, niin kuinka monta tuntia vuorokaudesta kuluu kaikkeen muuhun?

7. Puoli kilogrammaa kahvia maksaa 2,5 € ja sen tilavuus on 1 litra. Kuinka paljon voittoa tuottaa kahvin keitto puolesta kilosta kahvia, jos 1,8 litran kahvimäärään tarvitaan kahvijauhetta 1 dl? Kahvikupin tilavuus on 1,5 dl ja sen hinta on 1,5 €.

8. Mikä on joutomaan osuus maa -alasta, kun viljellyn maan osuus on $\frac{2}{5}$ ja metsän osuus $\frac{1}{4}$?

9. MM:n kuukausipalkka on 1500 €. Tästä palkasta menee $\frac{1}{3}$ veroihin ja erilaisiin pidätyksiin, $\frac{1}{3}$ ruokaan ja 250 euroa vuokraan. Kuinka paljon MM:lle jää palkasta muihin menoihin?

10. Oppitunteja on viikossa 30. Oppitunnin pituus on 60 minuuttia, josta välitunnin pituus on $\frac{1}{4}$. Muu osa oppitunnista käytetään opiskeluun. Kuinka paljon aikaa kuluu viikossa välitunteihin ja mikä on opiskeluun käytettävä aika viikossa?

PROSENTTILASKUT

Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa.

Prosenttiosuuksia voidaan merkitä kolmella eri tavalla:
- prosenttimerkillä %
- murto – osina
- desimaalilukuina

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Prosenttiyksikkö –termiä käytetään silloin, kun lasketaan pelkillä prosenteilla

Prosenttiarvon laskeminen

$$b = \frac{p}{100} \times a$$

a = perusarvo; suure, jonka sadasosista on kyse
b = prosenttiarvo; prosenttiluvun ilmaisemien sadasosien määrä perusarvosta
p = prosenttiluku; ilmoittaa sadasosien määrän

Paljonko on 25% luvusta 160?

b = ?
a = 160
p = 25%

$b = \frac{25\%}{100\%} \times 160 = 40$ Vastaus: Luku 40 on 25% luvusta 160

Prosenttiluvun (%) laskeminen

$$p = \frac{b}{a} \times 100$$

Montako prosenttia luku 50 on luvusta 200?

p = ?
b = 50
a = 200

$$p = \frac{50}{200} \times 100\% = 25\%$$

Perusarvon laskeminen

$$a = \frac{b}{p} \times 100$$

Mistä luvusta luku 25 on 5%?

a = ?
b = 25
p = 5%

$$a = \frac{25}{5\%} \times 100\% = 500$$

Promille (‰)

Promille on yksi tuhannesosa.

$$p = \frac{b}{a} \times 1000$$

Miljoonasosa (ppm)

ppm on yksi miljoonasosa.

$$p = \frac{b}{a} \times 1000\ 000$$

Harjoitustehtäviä

Prosentti ja promille

1. Kuinka monta prosenttia on alennus, kun 150 euron takin hintaa alennetaan 25 euroa?

2. Jos 10 prosentin alennus tuotteen hinnasta on 20 euroa, niin kuinka suuri olisi 15 prosentin alennus?

3. Polkupyörä, jonka hinta oli 240 €, myytiin 15 prosentin alennuksella. Mikä oli alennettu hinta?

4. Hapankorppujen ravintoainesisältöluettelon mukaan 100 g hapankorppuja sisältää rasvaa 1,9 g, josta tyydyttyneitä rasvahappoja on 0,4 g. Kuinka monta prosenttia tyydyttyneiden rasvahappojen osuus on rasvoista?

5. Samat hapankorput sisältävät rautaa 4,6 mg / 100 g korppuja, joka on 33 % vuorokautisen saannin vertailuarvosta. Mikä on raudan tarve vuorokaudessa?

6. Lääkeaine valmistetaan siten, että 10 milligrammaan vaikuttavaa ainetta lisätään vettä, kunnes liuoksen paino on 100 g. Kuinka monta promillea on lääkkeessä lääkeainetta?

7. Yksi lusikka painaa 15 g ja sen hopeapitoisuus on 840 ‰. Kuinka paljon hopeaa on tusinassa tällaisia lusikoita?

8. Mehu valmistetaan mehutiivisteestä sekoittamalla yksi osaa tiivistettä neljään osaan vettä. Tiivisteen sokeripitoisuus on 24%. Mikä on valmiin mehun sokeripitoisuus?

9. 20 %:sta puhdistusainetta on 100 ml. Kuinka paljon saat siitä vedellä laimentamalla 5 %:sta liuosta?

10. Malmin kuparipitoisuus on 1,3 ‰. Kuinka paljon kuparia sisältää miljoona tonnia malmia?

POTENSSIT JA JUURET

Potenssit

Yleisesti $a^n = a \times a \times a ... \times a$

Miinusmerkkinen kantaluku merkitään sulkeisiin. Potenssin arvo riippuu siitä, onko eksponentti parillinen vai pariton.

Samankantaisten potenssien kertominen keskenään

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Samankantaisten potenssien jakaminen

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

Osamäärän potenssi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Tulon potenssi

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Potenssin potenssi

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$$

Suuret ja pienet luvut ilmaistaan usein luvun 10 potenssin avulla (Katso sivu 16, mittayksiköiden etuliitteitä ja kerrannaisyksiköitä).

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Juuret

Potenssiyhtälön juuret

Oletetaan, että luku a on positiivinen.

Potenssi $a^{1/2}$ on luvun a neliöjuuri.

$a^{1/2} = \sqrt{a}$ a = juurrettava

Negatiivisella luvulla ei ole reaalista neliöjuurta.

Laskusääntöjä

Tulon neliöjuuri

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Osamäärän neliöjuuri

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Potenssilausekkeen neliöjuuri

$$\sqrt{a^n} = a^{n/2}$$

Potenssi $a^{1/3}$ on luvun a kuutiojuuri. $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

Yleisesti $a^{1/n}$ on yhtälön $x^n = a$ positiivinen juuri.

Potenssi $a^{1/n}$ on potenssiyhtälön $x^n = a$ positiivinen juuri, sillä

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a$$

Potenssista $a^{1/n}$ käytetään myös nimitystä luvun a n:s juuri ja sitä voidaan merkitä $\sqrt[n]{a}$

MITTAYKSIKÖIDEN ETULIITTEITÄ JA KERRANNAISYKSIKÖITÄ

Etuliite		Kymmenen potenssi		
T	tera	10^{12}	1 000 000 000 000	biljoona
G	giga	10^{9}	1 000 000 000	miljardi
M	mega	10^{6}	1 000 000	miljoona
k	kilo	10^{3}	1 000	tuhat
h	hehto	10^{2}	100	sata
da	deka	10^{1}	10	kymmenen
perusyksikkö		10^{0}	1	
d	desi	10^{-1}	0,1	kymmenesosa
c	sentti	10^{-2}	0,01	sadasosa
m	milli	10^{-3}	0,001	tuhannesosa
µ	mikro	10^{-6}	0,000 001	miljoonasosa
n	nano	10^{-9}	0,000 000 001	miljardisosa
p	piko	10^{-12}	0,000 000 000 001	biljoonasosa

Huomaa etuliitteiden ja kymmenen potenssin käytännön merkitys:

Säiliön tilavuudeksi ilmoitetaan 2,5 tuhatta litraa, tämä voidaan kirjoittaa seuraavasti 2500 litraa eli $2{,}5\mathrm{x}10^{3}$ litraa eli kaksituhattaviisisataa litraa.

Päivän B_1-vitamiinin tarve on 1,4 milligrammaa. Milligramma on gramman tuhannesosa eli 0,0014 g = $1{,}4\mathrm{x}10^{-3}$g = 1,4 mg.

Maan keskimääräinen etäisyys auringosta on 150 000 000 000 m ja vetyatomin halkaisija on 0,000 000 000 1m.
On parempi merkitä vastaavat luvut:

$1{,}5 \times 10^{11}$ m tai 0,15 Tm
1×10^{-10} m tai 0,1nm

Myös kun teet liuoksia ja ilmoitat esim.:
Työssä tarvittiin 0,0000025 g suolaa. Luontevampaa on ilmaista luku $2{,}5 \times 10^{-6}$ g tai mieluimmin etuliitteenä 2,5 µg.

EKSPONENTTI JA LOGARITMI

Logaritmi on potenssin käänteistoimitus:

$$\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$$

Jos kantaluku a on positiivinen, niin potenssin a^x eksponentin ei tarvitse olla kokonaisluku. Potenssin arvo voidaan kaikilla muuttujan x arvoilla.

Merkintä e^x ; e on kantaluku, ns. Neperin luku, joka on päättymätön desimaaliluku. Likiarvo 2,7181.

Jos a on positiivinen luku, eksponenttiyhtälöllä $10^x = a$ on aina ratkaisu. Ratkaisua kutsutaan luvun a logaritmiksi.

Merkintä $\log_a k$; a on kantaluku ja k on luku, jonka logaritmi on kyseessä.

Yleensä käytetään joko 10-kantaisia eli Briggsin logaritmeja tai e-kantaisia eli luonnollisia logaritmeja. Näitä merkitään

$\log_{10} k = \lg k$ tai $\log_{10} k = \log k$

$\log_e k = \ln k$

Kun luvun 10 eksponenttina on luvun a logaritmi lga, niin potenssin arvo on a

$$a = 10^{\lg a}$$

Potenssin logaritmi

Potenssin a^r logaritmi on luvun a logaritmi kerrottuna eksponentilla r, eksponentin siirtosääntö:

$\lg a^r = r \lg a$ (a on positiivinen)

Esimerkki:

Määritä luvun 8 2-kantainen logaritmi.

$\log_2 8 \;=$	
$\log_2 2^3 \;=$	$2^3 = 8$
$3\log_2 2 \;=$	eksponentin siirtosääntö
$3 \times 1 \;=\; 3$	kantaluvun logaritmi on 1

TAI logaritmin määritelmän mukaan:

$$\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$$

$$\log_2 8 = x \quad \Leftrightarrow$$
$$2^x = 8 \quad \Leftrightarrow$$
$$2^x = 2^3 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = 3$$

Harjoitustehtäviä

Juuret ja potenssit

1.
a) $3^2+5^2 =$
b) $(2a^2)^2 =$
c) $(x^2)^0 =$
d) $\frac{ab^2}{ab} =$

2. Ilmoita seuraavat luvut kerrannaisyksiköiden avulla yhden desimaalin tarkkuudella

a) 0,00025 =
b) 0,00123 =
c) 250000 =
d) 3000000 =

3.
a) $\sqrt{\frac{1}{16}} =$
b) $\left(\sqrt{4}\right)^2 =$
c) $81^{\frac{1}{2}} =$
d) $\sqrt[3]{27} =$
e) $\sqrt{5^4} =$

4. Määritä
a) $\log 0{,}85 =$
b) $\log 100 =$
c) $\frac{\log 45}{\log 200} =$
d) $\log_2 16 =$
e) $\log 1 =$

5. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä
a) $2^x = 8$

b) $1{,}5^x = 2$

ENSIMMÄISEN- JA TOISEN ASTEENYHTÄLÖ

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälössä merkitään yhtä suuriksi (=) kaksi yhtä suurta lauseketta tai lukua. Yhtälössä on tuntematon (X), jolle löydetään arvo, joka toteuttaa alkuperäisen yhtälön. Ratkaistua x:n arvoa sanotaan yhtälön juureksi.

Yleinen Normaalimuoto

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad ax = -b$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Ratkaistaessa yhtälö päädytään seuraavanlaisiin tilanteisiin:

a) Yhtälöllä on yksi ratkaisu. (ehdollinen yhtälö)

$\frac{3x}{2} - 5 = 13 \quad \Leftrightarrow$ siirretään -5 yhtäsuuruusmerkin oikealle puolelle

$\frac{3x}{2} = 13 + 5 \quad \Leftrightarrow$ huomaa etumerkin muutos

$\frac{3x}{2} = 18 \quad /\times 2 \Leftrightarrow$ kerrotaan puolittain kahdella

$\frac{2 \times 3x}{2} = 2 \times 18 \Leftrightarrow$

$3x = 36 \quad /:3 \quad \Leftrightarrow$ jaetaan puolittain kolmella

$\frac{3x}{3} = \frac{36}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 12$

b) Yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua (yhtälö on identtisesti epätosi)

$3 - (1 + x) = -1 - x \Leftrightarrow$ poistetaan sulut

$3 - 1 - x = -1 - x \Leftrightarrow$ siirretään muuttujat yhtäläisyysmerkin vasemmalle puolelle ja vakiot oikealle puolelle (muista etumerkki vaihtuu)

$-x + x = -1 - 3 + 1 \quad \Leftrightarrow$

$0 = -3$ yhtälöllä ei ole ratkaisua

c) Mikä tahansa X:n arvo käy ratkaisuksi (yhtälö on identtisesti tosi eli ehdoton)

$2-\frac{1}{2}(1+2x)=\frac{3}{2}-x \quad \Leftrightarrow$ poistetaan sulut

$2-\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 2x=\frac{3}{2}-x \quad \Leftrightarrow$

$2-\frac{1}{2}-x=\frac{3}{2}-x \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3}{2}-x=\frac{3}{2}-x \quad \Leftrightarrow$ siirretään muuttujat yhtäläisyysmerkin

vasemmalle puolelle ja vakiot oikealle puolelle

$x-x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0=0$ mikä tahansa x:n arvo käy ratkaisuksi

Toisen asteen yhtälö

Yleinen normaalimuoto

$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$6x^2-5x+1=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12} \quad \Rightarrow$

$x_1=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2}$

Vastaus on $x_1=\frac{1}{3} \quad \vee \quad x_2=\frac{1}{2}$

Supistettu normaalimuoto

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -2 + 1 = -1$$

$$x_2 = -2 - 1 = -3$$

Vastaus on $x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = -3$

VERRANTO

Verranto on käyttökelpoinen tapa monessa käytännön tapauksessa ratkaista ongelmat.
Verrannoksi sanotaan yhtälöä, jossa kaksi suhdetta on merkitty yhtä suuriksi.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Kerrotaan verranto ristiin, jolloin nimittäjät saadaan poistettua.

$$a \times d = b \times c$$

Suoraan verrannolliset suureet

Jos suureet ovat suoraan verrannolliset, kirjoitetaan suureitten kesken suora verranto. Suorassa verrannossa toisiaan vastaavat suureitten arvot ovat verrannossa esiintyvissä suhteissa samassa järjestyksessä
Suoraan verrannolliset suureet kasvavat tai pienenevät samaan suuntaan samassa suhteessa.

Esimerkki. Henkilö kävelee 5 km tunnissa. Kuinka kauan hänellä kestää kävellä 4 km?
Merkitään kysyttyä aikaa x:llä ja tehdään verranto;

Matkojen suhde	Aikojen suhde
5 km	60 min
4 km	x

Merkitään suhteet yhtä suuriksi;

$$\frac{5\ km}{4\ km} = \frac{60\ \text{min}}{x}$$

Kerrotaan ristiin;

$$5 \times x = 4 \times 60\ \text{min} \Leftrightarrow x = \frac{240\ \text{min}}{5} \Leftrightarrow x = 48\ \text{min}$$

Esimerkki. Sinulla on käytössä 20 ml keittosuolaliuosta, jossa on keittosuolaa 5,0 mg. Työssäsi tarvitset suolaa vain 0,5 mg. Kuinka paljon mittaat liuosta?

Merkitään kysyttyä liuoksen tilavuutta x:llä ja tehdään verranto;

Suolan määrän suhde	Liuoksen tilavuuden suhde
5,0 mg	20 ml
0,5 mg	x

Merkitään suhteet yhtä suuriksi;

$$\frac{5{,}0\ mg}{0{,}5\ mg} = \frac{20\ ml}{x}$$

Kerrotaan ristiin;

$$5{,}0 \times x = 0{,}5 \times 20\ ml \Leftrightarrow x = \frac{10\ ml}{5{,}0} \Leftrightarrow x = 2\ ml$$

Kääntäen verrannolliset suureet

Käänteisessä verrannossa toisiaan vastaavat suureitten arvot ovat verrannossa esiintyvissä suhteissa käänteisessä järjestyksessä.
Kääntäen verrannolliset suureet muuttuvat eri suuntaan (toisen kasvaessa toinen pienenee) mutta samassa suhteessa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Otetaan suhteesta $\frac{c}{d}$ käänteisarvo:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

Kerrotaan verranto ristiin, jolloin nimittäjät saadaan poistettua.

$$a \times c = b \times d$$

Esimerkki. Matkaan kului aikaa 60 min, kun käytetty nopeus oli keskimäärin 50 km/h. Missä ajassa matkasta selvitään, jos keskinopeus olisi 100 km/h?

Merkitään kysyttyä aikaa x:llä ja tehdään verranto;

Nopeuksien suhde	Ajan suhde
50 km/h	60 min
100 km/h	x

Muodostetaan käänteinen verranto;

Nopeuksien suhde	Ajan suhde
50 km/h	x
100 km/h	60 min

Merkitään suhteet yhtä suuriksi ja kerrotaan ristiin;

$$\frac{50km/h}{100km/h} = \frac{x}{60\min} \quad \Leftrightarrow \quad 100 * x = 50 * 60\min \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3000\min}{100} \quad \Leftrightarrow x = 30\min$$

Harjoitustehtäviä / Yhtälön ratkaisuja

1. a) $5x-13=3x-5$

   b) $4(2x-9)=5(11-x)$

2. a) $\frac{x}{2}-\frac{(x+1)}{4}=-1$

   b) $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=\frac{x}{3}-1$

3. a) $4x^2=1$

   b) $3x-x^2=0$

4. a) $x^2-6x+5=0$

   b) $4x^2-12x+9=0$

5. a) $\frac{6x-1}{2}=\frac{2x-5}{2}$

   b) $\frac{x-1}{x-3}=-1$

6. Eräs työ valmistui 5 päivässä, kun sitä tehtiin 8 tuntia päivässä. Kuinka pitkä on päivittäinen työaika, jos työ tehdään 10 päivässä?

7 Jaettaessa tanko kuuteen yhtä suureen osaan oli jokaisen osan pituus 30 cm. Mikä on osan pituus jaettaessa tanko yhdeksään yhtä suureen osaan?

.

8. Putkivauriossa kellariin valunut vesi tyhjennetään pumpulla, jossa on kaksi tehoa, 120 litraa minuutissa ja 200 litraa minuutissa. Käytettäessä pienempää tehoa pumppaaminen kestää 1h 45min. Kuinka kauan pumppaaminen kestää käytettäessä isompi tehoista pumppua?

9 Ratkaise seuraava yhtälö n:n suhteen

$$K = r^n k$$

.

10. Ratkaise seuraava yhtälö r:n suhteen

$$K = r^n k$$

HAVAINTOJEN JA TULOSTEN NUMEERINEN ESITTÄMINEN

Käytännön laboratoriotöissä on tärkeää osata ilmoittaa tulokset oikealla tarkkuudella.

- fysikaaliset havainnot eivät koskaan ole absoluuttisen tarkkoja, vaan sisältävät aina tunnetun tai useimmiten tuntemattoman suuruisia epätarkkuuksia, virheitä
- havaintoarvot ovat likiarvoja, joten niillä suoritettavat laskutoimitukset ovat likiarvolaskuja
- havaintoarvoihin on täten osattava ottaa havainnon tarkkuutta vastaava määrä numeroita
- liiat numerot eivät hyödytä, mutta liian vähien numeroiden käyttö ei tee oikeutta saavutetulle havaintotarkkuudelle
- koska tekniikassa ja luonnontieteissä esiintyvät luvut ja suureet yleensä ovat likiarvoja, täsmennetään seuraavassa niiden käyttöä

Havaintotulokset ja tarkat luvut

Luvut ja suureet voidaan laskuissa jakaa kahteen pääryhmään

a) Havaintoarvot, jotka ovat likiarvoja. Nämä ilmoitetaan sillä tarkkuudella kuin havainnon tarkkuus edellyttää.
b) Tarkat luvut ja suureet. Näitä ovat yleensä pienet kokonaisluvut kertoimina tai eksponentteina. Lukumäärää ilmoittavat suureet ovat yleensä tarkkoja.

Esim. Ympyrän alan kaavassa πr^2 tai $(\pi d^2):4$ ovat 4 ja π laskun kannalta tarkkoja lukuja.

Laskennollinen virhe ja likiarvolaskujen tarkkuus

- laskutoimituksista aiheutuvaa epämääräisyyttä kutsutaan laskennolliseksi virheeksi erotuksena varsinaisista mittausvirheistä
- yhteen- ja vähennyslaskuissa otetaan tarkimpiin havaintoarvoihin yhtä monta merkitsevää desimaalia kuin mitä niitä on kaikkein epätarkimmassa arvossa
- kerto- ja jakolaskuissa otetaan tarkimpiin havaintoarvoihin yhtä monta merkitsevää numeroa kuin niitä on kaikkein epätarkimmassa arvossa
- lopputulokseen pyöristetään sama määrä tai korkeintaan yksi desimaali tai numero enemmän kuin mitä niitä oli kaikkein epätarkimmassa arvossa
- välituloksiin otetaan aina mukaan yksi tai useampikin ylimääräinen numero, jotta laskennolliset virheet eivät pääsisi etenemään laskutoimituksia jatkettaessa ja siten kasautumaan lopputulokseen. Huom. tallenna laskimessa välitulokset muistiin.
- lopullinen ”katkaisu” tai ”pyöristys” tehdään vasta lopputulokseen

Likiarvojen tarkkuus voidaan osoittaa ilmoittamalla:
-Merkitsevien ja oikeiden numeroiden lukumäärä
-Virheen yläraja
-Desimaalien lukumäärä ja lukujen pyöristys

Merkitsevien numeroiden lukumäärä

- merkitsevien numeroiden lukumäärään ei huomioida
  - kokonaisluvun lopussa olevia nollia
  - desimaalinluvun alussa olevia nollia
  - muut numerot huomioidaan

Luku	***Merkitsevien numeroiden määrä / kpl***	
2000	1	numero 2
2007	4	kaikki
0,0032	2	numerot 3,2
0,00302	3	numerot 3 ja 2 sekä näiden välissä oleva nolla
0,3200	4	desimaalipilkun jälkeen olevat numerot

Desimaalien lukumäärä ja lukujen pyöristys

- likiarvojen tarkkuuden määrittelyssä ei ole suotavaa käyttää desimaalien lukumäärää, koska laatumuunnos muuttaa myös desimaalien lukumäärän
- lukujen pyöristäminen tehdään seuraavasti kolmen säännön perusteella:
  1) Jos ensimmäinen pois jätettävä numero <5, niin korotusta ei suoriteta
  2) Jos ensimmäinen pois jätettävä numero >5, korotus suoritetaan
  3) Jos ensimmäinen pois jätettävä numero =5, jonka jälkeen:
  - seuraa nolla tai ei mitään, niin viimeinen jäljelle jäävä numero korottuu, jos se on pariton, mutta jos se on parillinen, niin se pysyy ennallaan
  - seuraa nollasta eroava luku, niin korotus tehdään

HARJOITUSTEHTÄVIEN VASTAUKSET

OSA 1. TASOTESTI

Murtolukulaskut

1. $1\frac{3}{8}$
2. $1\frac{3}{4}$
3. $7\frac{1}{3}$
4. $\frac{7}{15}$
5. 11
6. $\frac{5}{9}$
7. $8\frac{1}{3}$
8. $1\frac{2}{3}$

Prosenttilaskut

1. 1,6%
2. 50
3. 33
4. 4,6
5. 1190
6. 130%
7. 57%
8. a) 82 km/h
   b) 99km/h

Potenssi ja neliönjuuri

1. a)128
   b) 2
2. 9
3. 8/27
4. $8x^3$
5. x^6
6. 2/3
7. x^2
8. 10

Yhtälön ratkaisu

1. x=1
2. x=2
3. x=6
4. x=1
5. x=3
6. $v = \frac{m}{Mc}$
7. x=1/2
8. x=0 v x=10
9. x=15 v x=35
10. x=-1/2

OSA 2. PERUSLASKUJA

Laskutoimituksia murtoluvuilla

1.	a) $7\frac{11}{12}$	b) $-1\frac{5}{12}$	c) 2
2.	a) $6\frac{11}{20}$	b) $4\frac{1}{3}$	c) $6\frac{1}{24}$
3.	a) $2\frac{2}{3}$	b) $1\frac{8}{15}$	c) $\frac{5}{9}$
4.	a) $10\frac{1}{20}$	b) $39\frac{4}{5}$	c) $3\frac{1}{5}$
5.	a) $1\frac{1}{4}$	b) $\frac{3}{35}$	c) $\frac{1}{5}$
6.	10h		
7.	177,5€		
8.	$\frac{7}{20}$		
9.	250€		
10.	välitunteihin 7,5 h	opiskeluun 22,5 h	

Prosentti ja promille

1. 17 %
2. 30 €
3. 204 €
4. 21 %
5. 13,9 mg
6. 0,1 ‰
7. 151 g
8. 408 %
9. 400 ml
10. 1300 t

Juuret ja potenssit

1.	a) 34	b) $4a^4$	c) 1	d) ab	
2.	a) $2{,}5 \times 10^{-4}$	b) $12{,}3 \times 10^{-4}$	c) $2{,}5 \times 10^{5}$	d) $3{,}0 \times 10^{6}$	
3.	a) 1/4	b) 4	c) 9	d) 3	e) 25
4.	a) -0,07	b) 2	c) 0,72	d) 4	e) 0
5.	a) 3	b) 1,7			

Yhtälön ratkaisuja

1.	a) x = 4	b) x = 7
2.	a) x = -3	b) ei ratkaisua
3.	a) x = 1/2	b) x = 0 V x = 3
4.	a) x = 1 V x = 5	b) x = 1,5
5.	a) x = -1	b) x = 2
6.	4 h	
7.	20 cm	
8.	57 min	

9. $$n = \frac{\log K/k}{\log r}$$

10. $$r = \sqrt[n]{K/k}$$

LIITE2. Kyselylomake

Kertokaa mielipiteenne seuraaviin kysymyksiin ja vaihtoehtoihin. Voitte rastittaa valintanne hiiren vasemmalla näppäimellä ja vastata klikkaamalla harmaata aluetta ja kirjoittamalla teksti siihen. Vaihtoehtoisesti voitte tulostaa tämän lomakkeen ja vastata kirjoitta-malla käsin.

1. **Opetatte**
   a) **Ammattikorkeakoulussa …………..** ☐
   b) **Ammattiopistolla ……………………** ☐
   c) **Lukiossa …………………………….** ☐
   d) **Muu**

2. **Pidättekö kemian laskut erillisenä kurssina? Kyllä** ☐ **Ei** ☐

3. **Mitä seuraavista aihealueista käsittelette kemian laskuissa:**
   a) **Ainemäärä ja moolimassa …………….............** ☐
   b) **Stoikiometria ………………………………..........** ☐
   c) **Liuosten pitoisuudet ……………………….........** ☐
   d) **Liuosten ja liuoslaimennosten tekeminen …......** ☐
   e) **Titraukset ....** ☐
   f) **Liukoisuus ja liukoisuustulo ……………….........** ☐
   g) **pH –laskut ja puskuriliuokset ………………......** ☐
   h) **Havaintojen ja tulosten numeerinen esittäminen** ☐
   i) **Muita aiheita:**

4. **Mitkä aihealueet teidän mielestänne aiheuttavat eniten ongelmia oppilaille?**

5. **Miksi kemian laskut ovat mielestänne vaikeita oppilaille?**

6. **Mikä kemian laskuissa on vaikeaa oppilaittenne mielestä?**

7. **Onko kemian laskuihin liittyvää materiaalia riittävästi saatavilla?**
   Kyllä ☐ **Ei** ☐
   Jos ei, niin minkälaista materiaalia haluaisitte lisää?

8. **Muita kommentteja:**