Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRAALI- LASKENTA

samk

ESIPUHE

Tämä moniste on tarkoitettu insinöörikoulutuksen differentiaali- ja integraalilaskennan oppimateriaaliksi. Monisteen sisältö on rajattu niihin tarkasteltavan aihepiirin asioihin, jotka allekirjoittaneista Timo Ojala on käsitellyt viime vuosina omassa matematiikan opetuksessaan SAMK Tekniikka Porissa.

Aineiston muokkaamiseen ja esimerkkien laskemiseen ovat osallistuneet sekä matematiikan ylioppilas Leena Ojala että matematiikan yliopisto-opettaja Timo Ranta. TkT Ranta on myös omassa käytännön opetuksessaan Tampereen teknillisen yliopiston Porin yksikössä testannut osan monisteen materiaalista.

Insinöörillä on matematiikan opiskelussa kolme tärkeää tavoitetta: asioiden ymmärtäminen, tarvittavien laskujen suorittaminen sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten esittäminen.

I: Insinöörin tulee ymmärtää matemaattisten käsitteiden oleellinen sisältö. Siksi tässä monisteessa on pyritty monipuolisin sovelluksin korostamaan kurssin molempia ydinkäsitteitä: derivaattaa muutosnopeuden kuvaajana ja määrätyn integraalin summaluonnetta. Insinöörin pitäisi pystyä muuttamaan kohtaamansa reaalimaailman ongelma matemaattiseen muotoon ja ratkaisun jälkeen kriittisesti tulkitsemaan vastaus alkuperäisen ongelman kannalta.

II: Insinöörin tulee pystyä suorittamaan ne matemaattiset laskut, jotka ovat tarpeen matemaattiseen muotoon saattamansa ongelman ratkaisemiseksi. Keskimääräisellä insinööriopiskelijalla ei monista eri syistä johtuen enää ole mahdollisuuksia suorittaa esimerkiksi vaativia mekaanisia integrointeja käsin laskien. Insinöörillä ei siihen ole silti enää tänä päivänä mitään tarvettakaan. **Tehokkaat matematiikkaohjelmat ja symboliset laskimet pystyvät suorittamaan nopeammin ja luotettavammin kaikki ne mekaaniset laskutoimitukset, joihin parhaat insinöörit ovat milloinkaan pystyneet. Laskimet pystyvät vielä enempäänkin ja kaikki tämä tapahtuu ilman, että teknisen ongelmansa parissa työskentelevä insinööri mitään menettää.**

Edellä todettu ei suinkaan tarkoita sitä, että insinöörin ei tarvitsisi lainkaan osata derivoida ja integroida, vaan että **insinöörin tulee jo opiskeluaikanaan ennen kaikkea oppia hyödyntämään tehokkaita apuvälineitä**. **Mekaanisten laskujen suorittaminen apuvälineitä käyttäen jättää opiskelussa enemmän aikaa myös kahteen muuhun tavoitteeseen pääsemiseen.**

III: Ongelmanratkaisussa käytetyt menetelmät ja laskinkomennot yms. on esitettävä niin hyvin dokumentoituina, että ulkopuolinenkin ymmärtää ratkaisun eri vaiheet ja voi ne itse toistaa. Suppean monisteen lyhyet esimerkkiratkaisut eivät tähän ehkä aina yllä, mutta tarkoituksena onkin tarvittaessa käydä tällaiset esimerkit tunnilla opettajan selostamina yksityiskohtaisesti lävitse.

Apuna esimerkeissä on käytetty symbolista laskinta TI-Nspire CX CAS. (*) **Annetuista ohjeista saa vinkkejä muidenkin symbolisten laskinten tai matematiikkaohjelmien hyödyntämismahdollisuuksista.**

Monisteeseen on liitetty runsaasti harjoitustehtäviä. Tehtävien v-osioihin on annettu vastaukset monisteen lopussa. Nämä osiot on tarkoitettu omien tietojen ja taitojen itsenäiseen testaamiseen sekä ennen kotitehtävien laskemista että kokeeseen valmistauduttaessa. Kirjaimin a, b, c, … nimetyt kohdat on tarkoitettu ennen kaikkea kotitehtäviksi. Niihin ei ole annettu vastauksia, sillä eihän insinööri käytännössäkään voi tarkistaa vastauskirjasta tehtävän ratkaisua. **Kaikki käsin laskettaviksi annetut tehtävät voi ja kannattaakin aina tarkistaa laskimella.** Lisäksi tarkoituksena on esittää kotitehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut tunnilla. Oppitunneilla on tavoitteena myös oppia kriittisesti arvioimaan saatuja tuloksia. Monisteen lyhyt esitystapa ei ole antanut mahdollisuuksia sopivien arviointitapojen riittävään käsittelemiseen.

Kaikki halukkaat opettajat saavat kopioida tästä ja muistakin ”Ojalain laskuopeista” sekä omaan opetuskäyttöönsä että oppilailleen jaettavaksi mitkä tahansa sivut tai vaihtoehtoisesti kertoa opiskelijoilleen, mistä he voivat ilmaiseksi kopioida tai ladata käyttöönsä tarpeelliset sivut. Materiaalin voi tulostaa kaksipuolisiksi kopioiksi A4-arkeille siten, että keskeltä niiteillä nidottuna opiskelijalla on kätevä A5-kokoinen vihkonen. Epäkäytännöllisen vahvan vihkosen välttämiseksi tämän opuksen voi jakaa kahdeksi vihkoseksi oman harkinnan mukaan. Materiaalin voi tietenkin tulostaa haluamassaan koossa myös kansioissa säilytettäville arkeille.

Oppimateriaalisarjan jatkokehittämistä varten otamme kiitollisina vastaan ilmoitukset painovirheistä ja parannusideat pienistä yksityiskohdista aina laajempiin kokonaisuuksiin asti. Samalla lausumme kiitokset myös ”Ojalain laskuoppien” aiemmille kehittäjille FM Marjo Ojalalle ja päämatemaatikko, SHV Lauri Ojalalle.

Porissa 26.11.2016

Timo Ojala
Emeritus yliopettaja
PTOL/SAMK 1977-2016
timo.ojala@live.fi

Leena Ojala
Matematiikan yo
Åbo Akademi

Timo Ranta
Matematiikan yliopisto-opettaja
TTY
timo.ranta@tut.fi

(*) Esimerkkeinä olevissa laskinkomennoissa on tässä oppaassa käytetty tietyille suureille ja merkinnöille vakiintuneita isoja kirjaimia *A, V, T,* Δ *, …,* vaikka ne kyseisessä TI-laskimessa muuttuvatkin vastaaviksi pikkukirjaimiksi *a, v, t,* δ *, …*

SISÄLLYSLUETTELO

	ESIPUHE	**2**
	SISÄLLYSLUETTELO	**4**
1.	**FUNKTIOISTA**	**6**
	1.1 Funktion käsite ja havainnollistaminen	6
	1.2 Ratkaistu eli eksplisiittinen muoto	8
	1.3 Ratkaisematon eli implisiittinen muoto	9
	1.4 Parametrimuotoinen funktio	10
	1.5 Käänteisfunktio	14
2.	**FUNKTION RAJA-ARVO JA JATKUVUUS**	**17**
	2.1 Raja-arvon käsite	17
	2.2 Toispuoleisista raja-arvoista	18
	2.4 Epämääräistä muotoa olevista raja-arvoista	23
	2.5 Rationaalisen murtofunktion raja-arvoista	23
	2.6 Neliöjuuren sisältävistä raja-arvoista	25
	2.7 Trigonometrisista raja-arvoista	26
	2.8 Neperin luku *e*	27
	2.9 l'Hospitalin sääntö	28
3.	**KESKIMÄÄRÄINEN JA HETKELLINEN MUUTOSNOPEUS**	**30**
4.	**DERIVAATAN MÄÄRITELMÄ**	**36**
5.	**PERUSFUNKTIOIDEN DERIVOINTI**	**39**
6.	**YLEISIÄ DERIVOINTISÄÄNTÖJÄ**	**43**
7.	**KORKEAMMAT DERIVAATAT**	**49**
8.	**OSITTAISDERIVAATAT**	**51**
9.	**DERIVAATAN SOVELLUKSIA**	**54**
	9.1 Fysikaalisia sovelluksia	54
	9.2 Käyrän tangentti ja normaali	56

10. KUVAAJAN TUTKIMINEN **59**
10.1 Funktion kasvaminen ja väheneminen 59
10.2 Käyrän kuperuus ja käännepisteet 60
10.3 Paikalliset ääriarvot 61
10.4 Asymptootit 63

11. ÄÄRIARVOJEN SOVELLUKSIA **67**

12. USEAN MUUTTUJAN FUNKTION ÄÄRIARVOISTA **72**

13. DIFFERENTIAALI **76**

14. KOKONAISDIFFERENTIAALI **81**

15. DERIVOINTIMENETELMIÄ **85**
15.1 Parametrimuotoisen funktion derivointi 85
15.2 Ratkaisemattoman funktion derivointi 86
15.3 Logaritminen derivointi 95

16. MÄÄRÄÄMÄTÖN INTEGRAALI **89**

17. MÄÄRÄTTY INTEGRAALI **95**

18. INTEGROIMISMENETELMIÄ **98**
17.1 Osittaisintegrointi 98
17.2 Sijoitusmenetelmä 99

19. MÄÄRÄTYN INTEGRAALIN SOVELLUKSIA **100**
18.1 Fysikaalisia sovelluksia 100
18.2 Pinta-alan laskeminen 103
18.3 Tilavuuden laskeminen 106

20. VIIVAINTEGRAALI KAARIALKION PITUUDEN SUHTEEN **110**

21. PINTAINTEGRAALI **116**

22. AVARUUSINTEGRAALI **124**

VASTAUKSIA **128**

1. FUNKTIOISTA

1.1 Funktion käsite ja havainnollistaminen

Määritelmä. Suure y on toisen suureen x **funktio**, jos suureen y arvo määräytyy yksikäsitteisesti suureen x arvosta.

Tällaisen riippuvuuden olemassaolo ilmaistaan merkitsemällä $y = y(x)$, mikä luetaan "yy on yy äxästä".

Suuretta x sanotaan **argumentiksi** tai **myös vapaaksi eli riippumattomaksi muuttujaksi (independent variable)**. Funktiota y voidaan sanoa myös **riippuvaksi muuttujaksi (dependent variable)**.

Esimerkki. Ympyrän ala A on säteen r funktio, toisin sanoen $A = A(r)$, sillä ympyrän ala määräytyy yksikäsitteisesti säteen avulla, onhan $A = \pi r^2$ kaikilla mahdollisilla säteen r arvoilla eli aina, kun $r \geq 0$.
Kuution särmää s voidaan vastaavasti pitää kuution tilavuuden V funktiona $s = s(V)$, koska $s = \sqrt[3]{V}$ kaikilla mahdollisilla tilavuuden arvoilla.

Jos y on muuttujan x funktio, niin merkintä $y(x_0)$ (lue "yy arvolla x-nolla") tarkoittaa funktion y arvoa silloin, kun vapaa muuttuja on x_0.

Tässä kurssissa tutkitaan lähinnä vain ns. reaalifunktioita eli yhden reaalisen muuttujan reaaliarvoisia funktioita. Reaalifunktioita voidaan havainnollistaa esimerkiksi
- taulukoimalla funktion arvoja
- esittämällä funktion kuvaaja.

Esimerkki. Tarkastellaan funktiota $y = \sqrt{169 - x^2} + \sqrt{x^2 - 25} - 10$.

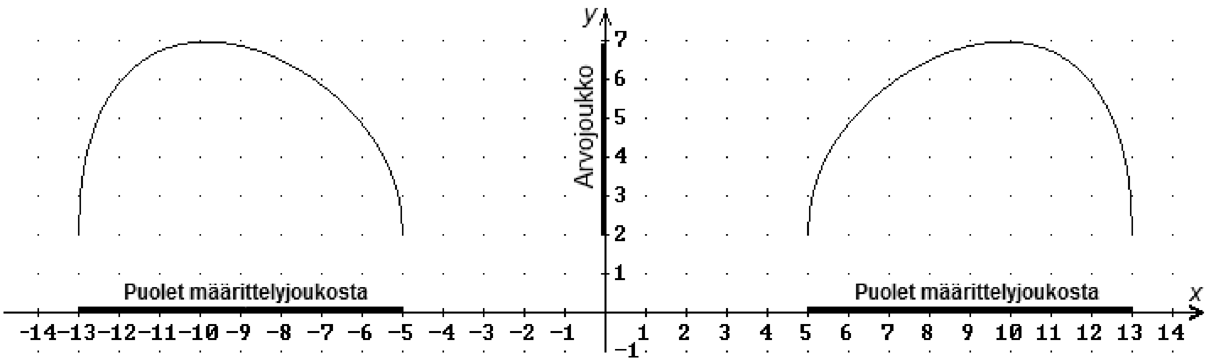
Näemme, että tämä funktio on (reaalisena) määritelty vain, jos molemmat juurrettavat ovat ei-negatiivisia eli jos $5 \leq |x| \leq 13$. Toisin sanoen muuttujan x on oltava jommallakummalla väleistä $-13 \leq x \leq -5$ tai $5 \leq x \leq 13$.

Seuraava taulukko esittää funktion tarkat arvot tai yksidesimaaliset likiarvot joissakin määrittelyalueen pisteissä.

x	...	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	...
$y(x)$			2	6.7	6.9	5.9	2					2	5.9	6.9	6.7	2		

Funktion arvon puuttuminen edellisessä taulukossa argumentin joidenkin arvojen kohdalta kuvaa sitä, että funktio ei ole näissä kohdissa määritelty.

Funktion $y = y(x)$ kuvaaja saadaan merkitsemällä xy-koordinaatistoon piste $(x, y(x))$ jokaisen sellaisen argumentin x arvon kohdalle, jossa funktio y on määritelty. Seuraavassa on funktion $y = \sqrt{169 - x^2} + \sqrt{x^2 - 25} - 10$ kuvaaja.



Kuvaan on vaakasuorilla viivoilla merkitty tämän funktion **määrittelyjoukko**, joka muodostuu suljetuista väleistä $[-13, -5]$ ja $[5, 13]$. Pystyviivalla on merkitty funktion **arvojoukko**, joka on suljettu väli $[2, 12\sqrt{2} - 10] \approx [2, 6.97]$.

Huomautus. Funktion määritelmässä olevasta yksikäsitteisyysvaatimuksesta johtuen funktion kuvaajalle on ominaista, että xy-tason jokainen pystysuora suora leikkaa funktion kuvaajaa enintään yhdessä pisteessä.

Esimerkki. Ympyräviiva $x^2 + y^2 = 10^2$ ei ole minkään funktion kuvaaja, sillä esimerkiksi pystysuora suora $x = 0$ leikkaa tätä viivaa kahdessa eri pisteessä $(0, \pm 10)$. Voimme kuitenkin ajatella ympyräviivan muodostuvan ylemmästä ja alemmasta puoliympyränkaaresta eli kahden eri funktion $y = \sqrt{100 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{100 - x^2}$ kuvaajista.

Seuraavissa kohdissa 1.2 – 1.4 tarkastelemme, millaisilla tavoilla funktion y riippuvuus argumentista x voidaan antaa. Tarkastelemme myös funktion kuvaajan piirtämistä eri tilanteissa.

1.2 Ratkaistu eli eksplisiittinen muoto

Sanomme, että funktio y on esitetty **ratkaistussa (eli eksplisiittisessä) muodossa**, jos funktion y riippuvuus muuttujasta x tunnetaan muotoa $y=f(x)$ olevan yhtälön avulla, missä lauseke $f(x)$ on saatu

- muuttujasta x ja reaalisista vakioista (esim. 0,1, 2.3, $\pi, e, a, b, \ldots$)
- suorittamalla äärellinen määrä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, potenssiinkorottamisia, juurenottoja sekä seuraavien funktioiden ottoja: eksponenttifunktiot, logaritmifunktiot, trigonometriset funktiot ja arkusfunktiot (sekä joitakin muitakin funktioita kuten hyperbeli- ja areafunktiot, joita ei kuitenkaan tässä materiaalissa käytetä).

Esimerkki. Ratkaistussa muodossa esitetyn funktion määrittelylauseke $f(x)$ voi olla esimerkiksi $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2-5}$ tai $3e^{4\sin(2-\sqrt{x})}-6(\ln(\arcsin(\sqrt{2x^2+1}))$.

Ratkaistussa muodossa olevan funktion kuvaajan piirtäminen on periaatteessa helppoa (joskin käytännössä usein työlästä): lasketaan riittävän tiheästi argumentin x arvoja vastaavia y-arvoja, joita vastaavat pisteet sijoitetaan koordinaatistoon ja lasketut pisteet yhdistetään. Laskettuja pisteitä ei saa tietenkään yhdistää, jos niiden välillä on esimerkiksi nimittäjän nollakohta tai jokin muu kohta, jossa funktio ei ole määritelty.

Laskimella tai tietokoneella piirrettäessä on valittava asetus, joka sopii ratkaistussa muodossa olevan funktion kuvaajan piirtämiseen. Turvallisinta on laskea pisteitä riittävän tiheästi ja valita sellainen piirtämisasetus, jossa vain lasketut pisteet merkitään näkyviin ilman, että perättäisiä laskettuja pisteitä yhdistetään viivalla, jotta kuvaajaa ei piirrettäisi esimerkiksi funktion nimittäjän nollakohtaan, kuten vanhemmilla laskimilla helposti kävisi.

Huomautus. Jos funktio y tunnetaan eksplisiittisessä muodossa $y=f(x)$, niin merkintä $y(x_0)$ tarkoittaa arvoa $f(x_0)$.

Esimerkki. Jos $y=\dfrac{x}{x+1}$, niin $y(2)=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$ ja $y(a+b)=\dfrac{a+b}{a+b+1}$.
Lauseke $y(-1)$ ei ole määritelty, sillä nollalla jakamista ei ole määritelty.

Määritelmä. Funktioista $f(x)$ ja $g(x)$ saatavat **yhdistetyt funktiot** $f\circ g$ ja $g\circ f$ määritellään ehdoista

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad \text{ja} \quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

Esimerkki. Jos $f(x)=x^2$ ja $g(x)=x+3$, niin

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+3)=(x+3)^2 \ .$$

Tässä esimerkissä ensin suoritettava funktio *g* on ns. **sisäfunktio** ja viimeksi suoritettava funktio *f* on ns. **ulkofunktio**.

Huomautus. Funktioita yhdistettäessä funktioiden suoritusjärjestys on merkitsevä, sillä yleensä yhdistetty funktio $f\circ g$ on eri funktio kuin päinvastaisessa järjestyksessä yhdistetty funktio $g\circ f$.
Edellisessäkin esimerkissä $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+3$, mikä on eri lauseke kuin edellä ollut yhdistetty funktio $(f\circ g)(x)=(x+3)^2$.

Esimerkki. Edellisen esimerkin funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ sekä $h(x)=f(g(x))$ voidaan määritellä moniin apuvälineisiin seuraavanlaisilla komennoilla

Define $f(x)=x\wedge 2$

$x+3$ $\boxed{\text{STO}\Rightarrow}$ $g(x)$

$h(x):=f(g(x))$ (Lue: $h(x)$ saa arvon $f(g(x))$)

Määrittelyn jälkeen lauseke $h(x)$ tarkoittaa lauseketta $(x+3)^2$ ja esimerkiksi lausekkeen $h(1)$ arvoksi saadaan 16.

1.3 Ratkaisematon eli implisiittinen muoto

Jos tunnetaan riippuvaa muuttujaa *y* ja riippumatonta muuttujaa *x* sitova muotoa $F(x,y)=0$ oleva yhtälö (esimerkiksi $x^2+y^2=100$ eli muokattuna $x^2+y^2-100=0$), niin sanotaan, että funktio *y* on annettu **ratkaisemattomassa (eli implisiittisessä) muodossa**. Ratkaisemattomasta muodosta pystytään joskus ratkaisemaan riippuva muuttuja *y* riippumattoman muuttujan *x* yhtenä tai useampana eksplisiittisenä lausekkeena.

Esimerkki. Yhtälö $x^2+y^2=1$ määrittelee luontevalla tavalla kaksi eri funktiota $y=+\sqrt{1-x^2}$ ja $y=-\sqrt{1-x^2}$.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman toisen asteen yhtälöstä

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (\,a,\ \ldots\ ,\ f \text{ vakioita})$$

saadaan yleensä kaksi ratkaisua funktioksi *y*. Jos ne ovat reaalisia, niin ratkaisufunktioiden kuvaajat yhdessä muodostavat jonkin toisen asteen käyrän (ympyrän, ellipsin, paraabelin tai hyperbelin) tai jonkin niiden surkastuman (pisteen, suoran tai kaksi suoraa).

1.4 Parametrimuotoinen funktio

Käytännössä on usein tilanteita, joissa funktiota ei tunneta suoraan riippumattoman muuttujan lausekkeena, vaan sekä riippuva että riippumaton muuttuja tunnetaan molemmat saman kolmannen muuttujan eli parametrin lausekkeina. Tutuin esimerkki tästä **parametrimuodossa** annetusta funktiosta lienee vino heittoliike.

Esimerkki. Tarkastellaan origosta hetkellä $t = 0$ alkavaa vinoa heittoliikettä, jossa alkunopeuden *x*- ja *y*-akseleiden suuntaiset komponentit ovat v_x ja v_y.

Kappaleen aseman *x*- ja *y*-koordinaatit saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} x = v_x \cdot t \\ y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}, \quad t \geq 0 ,$$

missä *g* on painovoiman aiheuttama kiihtyvyys.
Sijoittamalla ylemmästä yhtälöstä ratkaistu parametri $t = x/v_x$ alempaan yhtälöön, saadaan *y* ratkaistua *x*:n eksplisiittisenä lausekkeena

$$y = \frac{v_y}{v_x} \cdot x - \frac{g}{2{v_x}^2} \cdot x^2 ,$$

jonka kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Huomautus. Edellä parametri *t* **eliminoitiin sijoituskeinoa käyttäen**.
Seuraavassa esimerkissä parametri eliminoidaan **sopivaa kaavaa käyttäen**, jolloin päästään yhtälöön, jonka kuvaajan tunnemme.

Esimerkki. Yhtälöparista $\begin{cases} x = \cos\ t \\ y = \sin\ t \end{cases}$ on vaikea eliminoida parametria *t* sijoituskeinolla. Korottamalla yhtälöt erikseen neliöön ja laskemalla ne sitten yhteen saadaan $x^2 + y^2 = 1$, sillä onhan $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Alkuperäisestä yhtälöparista määräytyvät pisteet ovat siis kaikki origokeskisellä yksikköympyrällä.

Pisteitä laskemalla on helppo todeta, että koko ympyrä todella piirtyy kertaalleen vastapäivään alkaen positiivisen *x*-akselin pisteestä (1,0), kun parametri *t* kasvaa arvosta 0 arvoon 2π. Funktion yksikäsitteisyysvaatimuksesta johtuen meidän pitää tulkita tilanne siten, että annettu parametriesitys määrittää kaksi eri funktiota $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

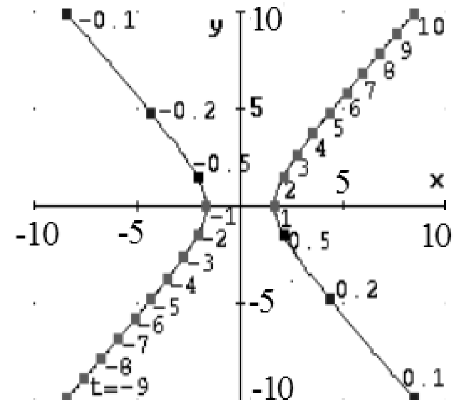
Esimerkki. Yhtälöitä neliöönkorotettaessa ja yhteenlaskettaessa mukaan saattaa tulla vieraitakin ratkaisuja. Tarkastellaan yhtälöparia $\begin{cases} x = \sin t \\ y = |\cos t| \end{cases}$.

Korottamalla yhtälöt neliöön ja laskemalla ne sitten yhteen, saadaan lopputulokseksi koko origokeskisen yksikköympyrän yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ kaksine funktioineen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, vaikka alkuperäisten yhtälöitten mukaan on voimassa $y \geq 0$, joten annetut yhtälöt määrittävätkin vain yhden funktion $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

Esimerkki. Tutkitaan yhtälöparin $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$ kuvaajaa korottamalla yhtälöt neliöön ja vähentämällä saadut yhtälöt, jolloin saadaan

$$x^2 - y^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 4$$

$$\overset{:4}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$



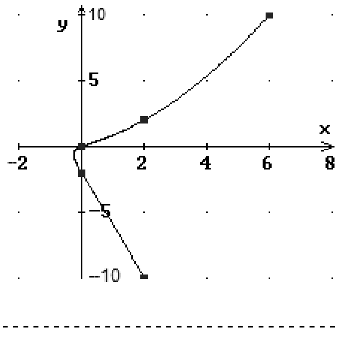
Kyseessä on sivuille aukeava hyperbeli, jonka puoliakselit ovat 2 ja 2. Kuvaajan joidenkin pisteiden vierelle on merkitty vastaava parametrin *t* arvo.

Vaikka parametrin eliminointi ei onnistuisi, niin parametrimuodossa annetun käyrän voi aina piirtää apuvälineillä käyttäen sopivaa moodiasetusta tai seuraavan esimerkin mukaisesti myös käsin laskemalla ensin riittävästi pisteitä.

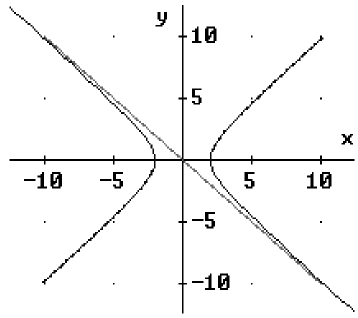
Esimerkki. Yhtälöparista $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 + t \end{cases}$, $-2 \leq t \leq 2$, on hankala eliminoida parametria *t.*

Mutta antamalla *t*:lle arvoja, voimme laskea kuvaajan yksittäisiä pisteitä, joiden avulla kuvaajaa voidaan hahmotella. Kuvaajan toinen haara jatkuu oikealle ylös ja toinen oikealle alas.

t	$x = t^2 + t$	$y = t^3 + t$
–2	2	–10
–1	0	–2
0	0	0
1	2	2
2	6	10



Esimerkki. Tarkastelemme uudelleen parametriesityksen $\begin{cases} x = t + 1/t \\ y = t - 1/t \end{cases}$ kuvaajan piirtämistä laskimella tai tietokoneella. Muutettaessa kuva-alueen rajoja tai parametrin askelpituutta saattaa hyperbelin kuvaajaan tulla mukaan viereisen kuvan mukainen ylimääräinen suora viiva.



Tämä viiva aiheutuu siitä, että apuväline on jossakin vaiheessa laskenut negatiiviseen t-arvoon liittyvän pisteen kuvan vasemmasta yläreunasta ja seuraavaksi laskettava positiiviseen t-arvoon liittyvä piste on kuvan oikeassa alareunassa. Peräkkäin laskettuja pisteitä oletusoptioin yhdistettäessä syntyy sitten tällainen ylimääräinen viiva.

Ylimääräisen viivan synnyn voi estää valitsemalla piirrettäväksi vain pelkät lasketut pisteet ilman niitä yhdistävää viivaa. Jos laskettuja pisteitä on riittävän tiheässä, niin pistejono vaikuttaa yhtenäiseltä viivalta.

Vastaavanlainen ylimääräinen viiva saattaa syntyä varsinkin vanhemmilla laskimilla piirrettäessä myös ratkaistussa muodossa olevan funktion $y = 1/x$ kuvaajaa moodissa, jossa perättäin lasketut pisteet yhdistetään.

Tärkeimpien viivojen parametriesityksiä

Monilla viivoilla on muotoa $y = f(x)$ tai $F(x,y) = 0$ olevan koordinaattiyhtälön lisäksi parametriesitys, joka on tietyissä tilanteissa paljon käyttökelpoisempi kuin koordinaattiyhtälö.

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen jana

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1}$$

Huomautus. Edellisellä janalla on esimerkiksi myös seuraavat vähemmän suositeltavat parametriesitykset

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot \dfrac{(x_2 - x_1)}{2} \\ y = y_1 + t \cdot \dfrac{(y_2 - y_1)}{2} \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2 \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = x_2 + t \cdot 3(x_1 - x_2) \\ y = y_2 + t \cdot 3(y_1 - y_2) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{1}{3}.$$

Kaikki edellä olleet janan kolme parametriesitystä saadaan tasaisen liikkeen kaavalla $s = s_0 + t \cdot v$ ajattelemalla pisteen siirtyvän tasaisella nopeudella pisteestä (x_1, y_1) pisteeseen (x_2, y_2) (tai päinvastaiseen suuntaan) ajassa 1, 2 tai 1/3 (sekuntia).

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkeva suora

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cdot(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\cdot(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Avaruuspisteiden (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) kautta kulkeva suora

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cdot(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\cdot(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t\cdot(z_2 - z_1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Origokeskinen *r*-säteinen ympyrä

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos t \\ y = r\cdot\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Huomautus. Yllä olevaa kaavaa käytettäessä ympyrä piirtyy kertaalleen vastapäiväisellä kierrolla alkaen pisteestä $(r, 0)$.

Tällä ympyrällä on myös muita vähemmän suositeltavia esityksiä:

$\begin{cases} x = r\cdot\sin t \\ y = r\cdot\cos t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$	Ympyrä syntyy myötäpäiväisellä kierrolla alkaen pisteestä $(0, r)$
$\begin{cases} x = r\cdot\cos(3t) \\ y = r\cdot\sin(3t) \end{cases}, 0 \le t \le \frac{2\pi}{3}$	Ympyrä piirtyy kuten aidatussa perusesityksessäkin, mutta "kolminkertaisella nopeudella"

(x_0, y_0) - keskinen *r*-säteinen ympyrä

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cdot\cos t \\ y = y_0 + r\cdot\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(x_0, y_0) - keskinen ellipsi puoliakseleina *a* ja *b*

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cdot\cos t \\ y = y_0 + b\cdot\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(x_0, y_0) - keskinen hyperbeli ja sen liittohyperbeli puoliakseleina *a* ja *b*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{2}(t \pm \frac{1}{t}) \\ y = y_0 + \frac{b}{2}(t \mp \frac{1}{t}) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1.5 Käänteisfunktio

Määritelmä. Kahta funktiota f ja g sanotaan toistensa **käänteisfunktioiksi**, jos ne peräkkäin suoritettuina kumoavat toistensa vaikutuksen ts. jos

$$f(g(x)) = x \quad \text{ja} \quad g(f(x)) = x$$

niillä x:n arvoilla, joilla sisempi funktio on määritelty. Tällöin merkitään

$$f = g^{-1} \quad \text{ja} \quad g = f^{-1} \ .$$

Huomautus. Käänteisfunktion tunnukseen liittyvä yläindeksi $^{-1}$ ei suinkaan tarkoita "kantalukunsa" käänteislukua, vaan määritelmän mukaista käänteisfunktiota, jolla ei yleensä ole mitään tekemistä lukujen jakolaskun kanssa.

Huomautus. Jotta funktiolla $f(x)$ voisi olla olemassa käänteisfunktio $f^{-1}(x)$, niin funktio f ei voi saada samaa arvoa kahdessa eri pisteessä.
Jos nimittäin olisi erisuuret luvut x_1 ja x_2 siten, että $f(x_1) = f(x_2) = y_0$, niin mahdollinen käänteisfunktio f^{-1} kuvaisi luvun y_0 kahdella eri tavalla: $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ ja toisaalta $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$. Käänteisfunktio saisi siis kohdassa y_0 kaksi eri arvoa, mikä olisi ristiriidassa käänteisfunktiotakin koskevan yksikäsitteisyysvaatimuksen kanssa.

Huomautus. Jos funktio f saa mahdolliset arvonsa vain kertaalleen, niin sillä on käänteisfunktio f^{-1}, joka määräytyy ehdosta $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.
Vaikka huomautuksen ehdon täyttävällä funktiolla onkin käänteisfunktio olemassa, niin käänteisfunktion eksplisiittisen määrittelylausekkeen muodostaminen on usein vaikeaa tai jopa mahdotonta.

Esimerkki. Koska funktion $f(x) = 3x - 5$ saa mahdolliset arvonsa vain kertaalleen, niin sillä on käänteisfunktio, joka tällä kerta löydetään helpostikin lähtien määritelmän ehdosta

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \overset{\text{Laske f arvolla } f^{-1}(x)}{\Leftrightarrow} \quad 3f^{-1}(x) - 5 = x \quad \overset{\text{Ratkaise } f^{-1}(x)}{\Leftrightarrow} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

Tarkistus:

$$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+5}{3}) = 3 \cdot \frac{x+5}{3} - 5 = x$$

edelläkin vaaditun perusteella ja myös

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-5) = \frac{(3x-5)+5}{3} = x \ .$$

Huomautus. Funktion f ja sen käänteisfunktion f^{-1} kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

Todistus. (x_0, y_0) on funktion $y = f(x)$ kuvaajan piste

$\Leftrightarrow\quad y_0 = f(x_0)\quad$ | Otetaan kummastakin puolesta f^{-1}

$\Leftrightarrow\quad f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$

$\Leftrightarrow\quad (y_0,\ x_0)$ on funktion $y = f^{-1}(x)$ kuvaajan piste

Koska funktioiden f ja f^{-1} kuvaajien pisteet ovat pareittain symmetriset suoran $y = x$ suhteen, niin itse kuvaajatkin ovat symmetriset ko. suoran suhteen.

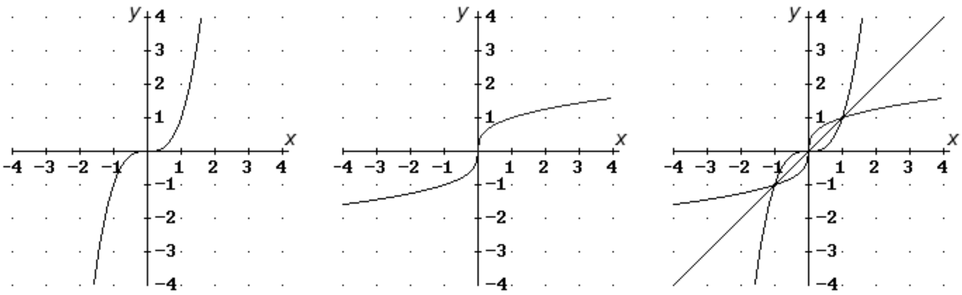
Esimerkki. Koska funktio $f(x) = x^3$ saa mahdolliset arvonsa vain kertaalleen, niin sillä on käänteisfunktio, joka nyt määräytyy helpostikin määritelmän ehdosta, että käänteisfunktio ja funktio kumoavat toistensa vaikutuksen:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \overset{\text{Laske } f \text{ arvolla } f^{-1}(x)}{\Leftrightarrow} \quad (f^{-1}(x))^3 = x \quad \overset{\text{Ratkaise } f^{-1}(x)}{\Leftrightarrow} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Tarkistus. $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$ edelläkin lasketun perusteella.

Myös $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.

Alle vasemmalle on piirretty funktion $f(x) = x^3$ kuvaaja, keskelle käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaaja ja oikealle molemmat kuvaajat, jotka ovat todellakin toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.



Huomautus. Palautamme ensin mieleen arcussinifunktion määritelmän:

$\arcsin x$ on se välin $[-90°, 90°]$ kulma, jonka sini on x, $-1 \le x \le 1$.

Tavallisella sinifunktiolla ei voi olla käänteisfunktiota, koska tavallinen sini saa useammassa pisteessä saman arvon, esimerkiksi $\sin(0) = \sin(2\pi)$.
Mutta välille $[-90°, 90°]$ rajoitettu sinifunktio ja edellä määritelty arcussini ovat toistensa käänteisfunktioita, sillä ne kumoavat toistensa vaikutuksen:

1) Jos $-90° \le \alpha \le 90°$, niin $\underbrace{\arcsin(\underbrace{\sin(\alpha)}_{\text{välin } [-1,1] \text{ luku}})}_{\substack{\text{se välin } [-90°,90°] \text{ kulma, jonka sini on } \sin(\alpha) \\ \text{ja tällaisia kulmia on ko välillä vain yksi}}} = \alpha$

2) Jos $-1 \le x \le 1$, niin $\sin(\underbrace{\arcsin(x)}_{\substack{\text{se välin } [-90°,90°] \\ \text{kulma, jonka sini on } x}}) = x$

Harjoitustehtäviä

1.1 Olkoon $y(x)=x^2$, $u(x)=2x+1$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ja $g(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.

Määritä käsin ja laskimella

v1) $y(2)$, $u(2)$, $f(2)$, $g(2)$ **v2)** $f(a+1)$ **v3)** $f(a)+f(1)$

v4) $\dfrac{a}{f(a)}$ **v5)** $\dfrac{g(3)}{g(4)}$ **v6)** $y(u(2))$ **v7)** $y(u(x))$ **v8)** $u(y(x))$

a) $y(-1)$, $f(-1)$, $g(-1)$ **b)** $f(a-1)$ **c)** $\dfrac{a}{f(a)}$ **d)** $g(3)g(4)$

e) $y(u(3))$ **f)** $u(y(3))$ **g)** $y(y(x))$ **h)** $u(u(u(1)))$

1.2 Tarkastellaan funktioita $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+1$ ja $h(x)=3x-1$.

Ratkaise käsin ja laskimella seuraavat yhtälöt.

v) $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ **a)** $(f\circ h)(x)=(h\circ f)(x)$ **b)** $(g\circ h)(x)=(h\circ g)(x)$

1.3 Hahmottele käsin ja piirrä laskimella seuraavien funktioiden kuvaajat

a) $y=\sqrt[5]{x^3}$ **b)** $x^3+y^3=8$ **c)** $\begin{cases}x=t^2\\ y=\dfrac{t^4}{8}+1\end{cases}, |t|\le 2$.

1.4 Esitä y muuttujan x avulla eliminoimalla parametri t yhtälöistä

v1) $\begin{cases}x=t-3\\ y=t^2-1\end{cases}$ **v2)** $\begin{cases}x=4t-1\\ y=2t+1\end{cases}$ **v3)** $\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ **v4)** $\begin{cases}x=\sin t+1\\ y=2\cos^2 t\end{cases}$

a) $\begin{cases}x=t+1\\ y=t^2+1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x=2t+1\\ y=3t-1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=3\cos t\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}x=2\sin t+1\\ y=\cos t-3\end{cases}$

1.5 Määritä seuraaville viivoille ainakin kaksi eri parametriesitystä, tarkista vastauksesi laskimella piirtämällä.

a) jana A(1,2)B(5,4)

b) pisteiden C(2,1) ja D(4,4) kautta kulkeva suora

c) origokeskinen 4-säteinen ympyrä

d) (2,1)-keskinen 3-säteinen ympyrä

e) (1,2)-keskinen ellipsi, jonka puoliakselit ovat 4 ja 3.

1.6 Määritä suorien leikkauspisteet sekä graafisesti että laskemalla

v) $\begin{cases}x=2t-1\\ y=t+1\end{cases}$ ja $\begin{cases}x=t-1\\ y=2t-2\end{cases}$

a) $\begin{cases}x=4-t\\ y=-4+2t\end{cases}$ ja $\begin{cases}x=3-2t\\ y=1+t\end{cases}$ **b)** $2x+3y=4$ ja $\begin{cases}x=2t-1\\ y=3t+2\end{cases}$

1.7 Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x}{2}+3$ käänteisfunktio kahdella eri tavalla:

a) vaatimalla, että f ja f^{-1} kumoavat toistensa vaikutuksen

b) piirtämällä funktion f kuvaaja ja symmetriaa käyttäen sen käänteisfunktion kuvaaja, jonka yhtälön päättelet lopuksi kuvasta.

2. FUNKTION RAJA-ARVO JA JATKUVUUS

2.1 Raja-arvon käsite

Määritelmä. Sanomme, että funktiolla $f(x)$ on kohdassa x_0 **raja-arvo** y_0, jos funktion f arvot lähestyvät arvoa y_0 muuttujan x lähestyessä kohtaa x_0 kummalta puolen tahansa. Raja-arvon olemassaolo ja arvo ilmoitetaan kirjoitelmilla

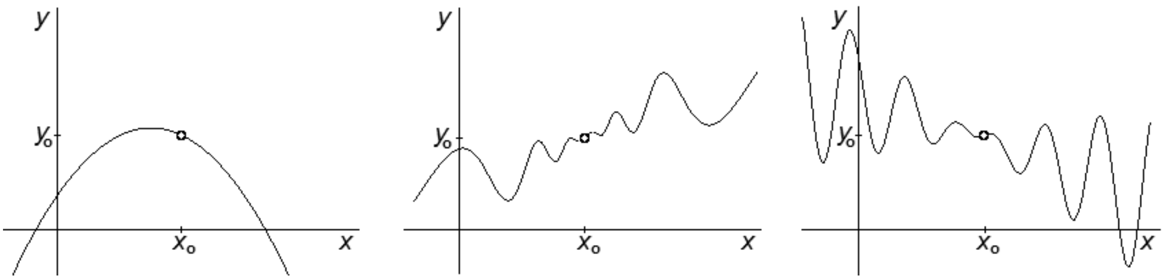
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0 \qquad \text{tai} \qquad f(x)\to y_0\text{, kun } x\to x_0$$

Esimerkki. Täsmällisten matemaattisten tarkastelujen asemasta tyydymme havainnollistamaan raja-arvoa seuraavilla kuvilla, joissa avoin ympyrä kuvaa sitä, että funktiota ei ole lainkaan määritelty vapaan muuttujan arvolla x_0.

Kaikilla kuvan funktioilla on kohdassa x_0 raja-arvo y_0, koska funktion arvot ilmeisesti lähestyvät kyseistä arvoa, kun vapaa muuttuja lähestyy kohtaa x_0.

Funktion arvojen ei tarvitse koko ajan lähestyä raja-arvoa, vaan välillä voi vähän etääntyäkin. Lähestyminen voi tapahtua myös kolmannen kuvan mukaisesti ”heilahdellenkin” arvon y_0 molemmin puolin. Pääasia on, että muuttujan ollessa riittävän lähellä kohtaa x_0 funktion arvotkin ovat hyvin lähellä arvoa y_0.

Kannattaa huomata, että funktion mahdollisella arvolla raja-arvokohdassa x_0 ei ole mitään vaikutusta funktion raja-arvoon, vaikka kyseinen kuvaajan piste olisi jopa täysin erillään muusta kuvaajasta.

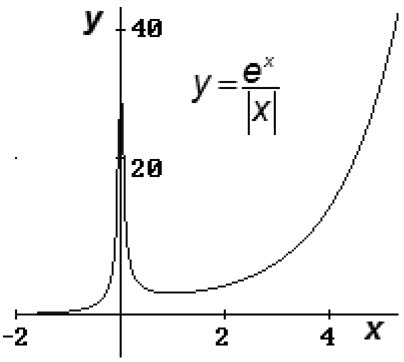


Esimerkki. Huomaa myös funktion $f(x)=e^x/|x|$ viereisen kuvan mukaisesti ”äärettömyyksiin” liittyvät raja-arvot

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{eli} \quad f(x)\to 0\text{, kun } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty \quad \text{eli} \quad f(x)\to \infty\text{, kun } x\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \text{eli} \quad f(x)\to \infty\text{, kun } x\to \infty$$

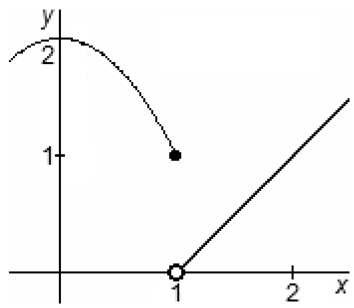


Viimeinen tulos luetaan ”limes *f x*, kun *x* lähestyy ääretöntä, on ääretön” tai ”*f x* lähestyy ääretöntä, kun *x* lähestyy ääretöntä”.

2.2 Toispuoleisista raja-arvoista

Esimerkki. Kuvan mukaisella funktiolla

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, \text{ kun } x\le 1\\ x-1, \text{ kun } x>1\end{cases}$$



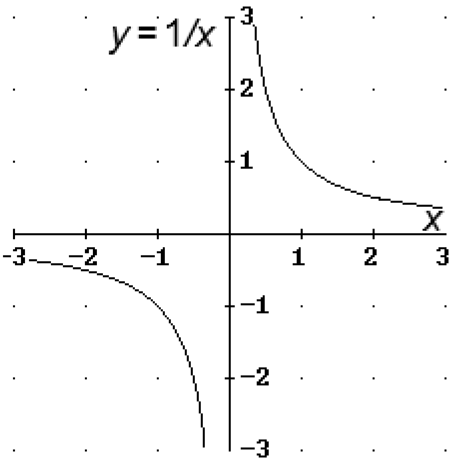
on kohdassa $x=1$ ns. **toispuoleiset raja-arvot**

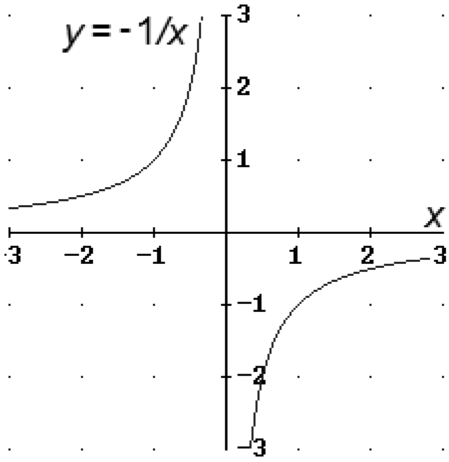
- **vasemmanpuoleinen raja-arvo** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$
- **oikeanpuoleinen raja-arvo** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$.

Jälkimmäinen luetaan ”limes $f\,x$, kun x lähestyy ykköstä oikealta, on 0”. Koska toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret, niin raja-arvoa $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ei ole olemassa.

Esimerkki. Sekä funktion arvoja taulukoimalla, kuvan mukaan että ”terveellä järjellä” päätellen todetaan seuraavat toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\quad ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$$





Esimerkki. Seuraavissa murtolausekkeissa osoittaja lähestyy nollasta eroavaa vakiota ja nimittäjä lähestyy nollaa, jolloin osamäärä lähestyy joko plus- tai miinusääretöntä. Raja-arvon merkki päätellään osoittajan ja nimittäjän merkkien avulla:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\overbrace{2-x}^{\to -1}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^-}}=+\infty\qquad ,\qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{2-x}^{\to -1}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^+}}=-\infty$$

2.3 Jatkuvuus

Määritelmiä. Funktio $f(x)$ on **jatkuva kohdassa** x_0, jos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funtio on **oikealta jatkuva** kohdassa x_0, jos $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

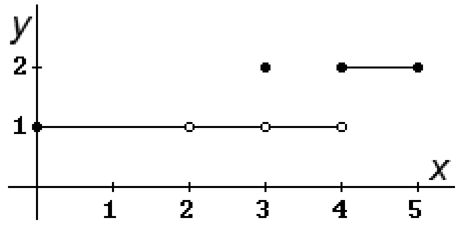
Funtio on **vasemmalta jatkuva** kohdassa x_0, jos $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Funktio on **epäjatkuva** kohdassa x_0, jos funktio ei ole jatkuva ko. kohdassa.

Esimerkki. Tarkastellaan kuvan funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \le x < 4,\ x \ne 2,\ x \ne 3 \\ 2, & x = 3 \text{ tai } 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

jota ei ole määritelty kohdassa $x = 2$ eikä välin $[0, 5]$ ulkopuolella.



Funktio $f(x)$ on

- epäjatkuva kohdassa $x = 0$, koska $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ei ole määritelty
- epäjatkuva kohdassa $x = 2$, koska $f(2)$ ei ole määritelty
- epäjatkuva kohdassa $x = 3$, koska $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1 \ne 2 = f(3)$
- epäjatkuva kohdassa $x = 4$, koska $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ei ole määritelty
- epäjatkuva kohdassa $x = 5$, koska $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ei ole määritelty
- jatkuva kaikissa muissa määrittelyalueensa pisteissä.

Määritelmiä. Funktio on **jatkuva avoimella välillä**, jos funktio on jatkuva tämän välin jokaisessa pisteessä.

Funktio $f(x)$ on **jatkuva suljetulla välillä** $[a, b]$, jos funktio on jatkuva vastaavalla avoimella välillä ja oikealta jatkuva välin alkupisteessä sekä vasemmalta jatkuva välin loppupisteessä.

Funktio $f(x)$ on **jatkuva puoliavoimella välillä** $]a, b]$, jos funktio on jatkuva vastaavalla avoimella välillä ja vasemmalta jatkuva välin loppu pisteessä.

Vastaavasti määritellään funktion jatkuvuus puoliavoimella välillä $[a, b[$.

Esimerkki. Edellisen esimerkin funktio $f(x)$ on jatkuva

- puoliavoimella välillä $[0, 2[$
- avoimilla väleillä $]2, 3[$ ja $]3, 4[$
- suljetulla välillä $[4, 5]$
- sekä näiden kaikkien välien kaikilla mahdollisilla osaväleillä kuten esimerkiksi väleillä $]0.5, 1.5]$ ja $]4, 5[$.

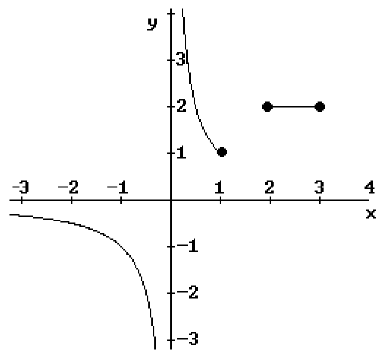
Huomautus. Funktio on jatkuva jollakin (avoimella, puoliavoimella tai suljetulla) välillä silloin ja vain silloin, kun sen kuvaaja on tällä välillä jatkuva, katkeamaton viiva.

Määritelmä. Funktio on **jatkuva**, jos se on jatkuva määrittelyalueensa jokaisessa kohdassa. Funktio on **epäjatkuva**, jos se ei ole jatkuva.

Esimerkki. Tarkastellaan suljetulla välillä $[0,1]$ ehdosta $f(x)=2$ määriteltyä funktiota *f*. Vaikka tämä funktio on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$, niin se ei ole jatkuva eikä se ole jatkuva tämän suljetun välin päätepisteissä! Sanonta "s*uljetulla* välillä jatkuva funktio" korostaa sitä, että jatkuvan funktion raja-arvoehtoa on lievennetty päätepisteiden ulkopuoliselta osalta.

Huomautus. Funktio on jatkuva silloin ja vain silloin, kun sen määrittelyjoukko muodostuu avoimista väleistä ja funktion kuvaaja on jatkuva, katkeamaton viiva jokaisella näistä väleistä.
Jatkuvan funktion kuvaaja katkeaa yksittäisissä kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty eikä kuvaajaa ole olemassa sellaisilla suljetuilla väleillä, joilla funktio ei ole määritelty.

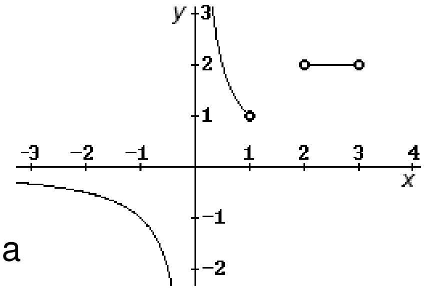
Esimerkki. Funktio $f(x)=\begin{cases} 1/x \text{ , kun } x\leq 1 \text{ , } x\neq 0 \\ 2 \text{ , kun } 2\leq x\leq 3 \end{cases}$



on jatkuva kaikilla määrittelyjoukon muodostavilla väleillä eli avoimella välillä $]-\infty,0[$, puoliavoimella välillä $]0,1]$ ja suljetulla välillä $[2,3]$.

Koska esimerkin funktio ei ole jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdissa 1, 2 ja 3, niin se on epäjatkuva. Huomaa, että vaikka funktio on jatkuva määrittelyjoukkonsa kaikilla mahdollisilla osaväleillä, niin se ei kuitenkaan ole jatkuva.

Esimerkki. Edellisestä pienin muutoksin saadun funktion $g(x)=\begin{cases} 1/x \text{ , kun } x<1 \text{ , } x\neq 0 \\ 2 \text{ , kun } 2<x<3 \end{cases}$ jatkuvuus

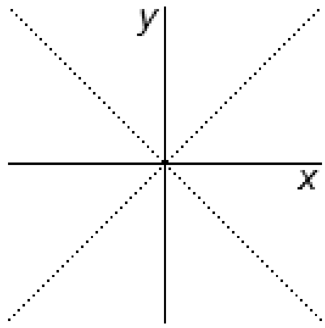


voidaan perustella kahdellakin tavalla:
- funktion kuvaaja on katkeamaton viiva kaikilla kolmella funktion määrittelyjoukon muodostavalla avoimella osavälillä
- funktio on jatkuva määrittelyjoukkonsa jokaisessa kohdassa.

Huomautus. Jos funktio on jatkuva jollakin välillä, niin funktion kuvaaja on tällä välillä jatkuva, katkeamaton viiva. Funktion jatkuvuus yksittäisessä kohdassa ei kuitenkaan takaa funktion kuvaajalle minkäänlaista katkeamattomuutta.

Esimerkkinä tarkastellaan funktiota

$$h(x)=\begin{cases} |x|, & \text{jos } x \text{ on rationaalinen} \\ -|x|, & \text{jos } x \text{ on irrationaalinen} \end{cases},$$



jonka kuvaaja muodostuu kuvan mukaisesti origosta sekä äärettömän tiheässä x-akselin yläpuolella olevista rationaalikoordinaattisista pisteistä $(x,|x|)$ ja äärettömän tiheässä x-akselin alapuolella olevista irrationaalikoordinaattisista pisteistä $(x,-|x|)$, joista molemmantyyppisistä pisteistä vain harvat on merkitty näkyviin. Koska $\lim_{x\to 0} h(x)=0=h(0)$, niin funktio $h(x)$ on määritelmän mukaisesti jatkuva origossa. Kaikissa muissa pisteissä funktio on tietenkin epäjatkuva.

Huomautus. Jatkuvia funktioita ovat esimerkiksi kaikki

- polynomit
- potenssifunktiot (esimerkiksi x^2 ja $\sqrt[n]{x}$ eli $x^{1/n}$)
- eksponenttifunktiot (esimerkiksi e^x, 2^x)
- logaritmifunktiot (esimerkiksi $\ln x, \lg x$)
- trigonometriset funktiot $(\sin x, \cos x, \tan x)$.
- arcusfunktiot ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$)

sekä näistä peruslaskutoimituksilla (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskulla sekä potenssiin korottamalla) ja funktioita yhdistämällä saatavat funktiot.

Huomautus. Tangenttifunktio on jatkuvan funktion määritelmän mukaan jatkuva, vaikka sen kuvaaja katkeaakin kohdissa $x=\pi/2+n\pi$, joissa funktio ei ole määritelty.

Yleisemminkin jatkuvien funktioiden osamäärät ovat em. määritelmän mukaan jatkuvia, vaikka niiden kuvaajat katkeavat nimittäjän nollakohdissa, joissa funktio ei ole määritelty ja jotka eivät siis kuulu funktion määrittelyalueeseen. Itse asiassa tangenttifunktiokin on jatkuvien sini- ja kosinifunktioiden osamäärä.

Huomautus. Sellaisia kohtia, joissa ”tavallisista” funktioista muodostetun funktion kuvaaja voi katketa, ovat

- nimittäjän nollakohdat, joissa funktio ei ole edes määritelty
- paloittain määritellyn funktion määrittelyjen vaihtumiskohdat, joissa funktio voi olla määritelty tai määrittelemättä.

Esimerkki. Jatkuvista funktioista (e^x, $\sin x$, $x+1$, $\sqrt[3]{x}$) funktioita yhdistämällä ja jakolaskulla saatu funktio $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt[3]{x+1}}$ on jatkuva, joten sen raja-arvo esimerkiksi kohdassa π saadaan sijoittamalla

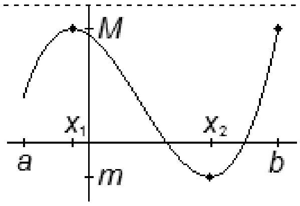
$$\lim_{x\to\pi} f(x)=f(\pi)=\frac{e^{\sin\pi}}{\sqrt[3]{\pi+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi+1}},$$

Vinkki. Tutki aina ennen jatkuvan funktion raja-arvon laskemista, onko funktio määritelty raja-arvokohdassa ja jos on, niin raja-arvon saa suoralla sijoituksella.

Tarkastelemme vielä suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia.

Lause. Jos funktio $f(x)$ on suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio, niin jokin funktion tällä välillä saamista arvoista on suurin ja jokin on pienin.
Jatkuva funktio saa kyseisellä suljetulla välillä myös kaikki pienimmän ja suurimman arvon väliset arvot ainakin kerran.

Esimerkki. Kuvan tilanteessa suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio saa tällä välillä pienimmän arvon m kohdassa x_2 ja välin suurimman arvon M jopa kahdessakin eri kohdassa x_1 ja b.



Esimerkki. Hae yhtälön $x^3-4x-4=0$ yksi juuri kymmenesosan tarkkuudella.

Koska polynomi $P(x)=x^3-4x-4$ on jatkuva sekä $P(2)=-4<0$ ja $P(3)=11>0$, niin välillä $]2,3[$ on polynomin nollakohta. Koska $P(2.5)=1.625>0$, niin nollakohta on välillä $]2,2.5[$. Koska $P(2.3)=-1.033<0$, niin nollakohta on välillä $]2.3,2.5[$. Puolittamalla tämä väli vielä kahdesti nähdään, että nollakohta on ensin välillä $]2.3,2.4[$ ja sitten välillä $]2.35,2.4[$, joten nollakohta on 2.4 halutulla tarkkuudella. Laskimella voit todeta, että juuri on likimain $2{,}383$. Muita reaalisia nollakohtia tällä kolmannen asteen polynomilla ei olekaan.

Edellä yhtälön juuri haettiin ”haarukoimalla” käyttäen niin sanotun **välinpuolitusmenetelmä**n yhdessä vaiheessa tarkan puolittajapisteen 2.25 asemasta käsinlaskemiseen paremmin sopivaa lukua 2.3 .

Huomautus. Avoimella välillä jatkuvan funktion ko. välillä saamista arvoista mikään ei välttämättä ole pienin eikä suurin. Esimerkiksi funktiolla $h(x)=x$ ei ole välillä $]0,1[$ suurinta eikä pienintä arvoa. Arvo 1 ei kelpaa suurimmaksi, koska se ei ole funktion arvo ko. välillä. Mikään ykköstä pienempi arvo M ei myöskään kelpaa suurimmaksi, koska välillä saatu arvo $(M+1)/2$ on suurempi.

2.4 Epämääräistä muotoa olevista raja-arvoista

Huomautus. Jos raja-arvoa määritettäessä päädytään johonkin epämääräiseen muotoon

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0},$$

niin raja-arvoa on tutkittava tarkemmin joko käyttäen myöhemmin esitettäviä lauseita tai suorittamalla vaikkapa sellainen myöhempien esimerkkien mukainen supistus, jossa epämääräisyyden aiheuttava tekijä supistuu pois tutkittavan lausekkeen muuttumatta raja-arvokohdan ulkopuolella. Itse raja-arvokohdassa uusi supistettu muoto tulee usein olemaan määritelty, vaikka alkuperäinen funktio ei olisikaan siinä määritelty.

2.5 Rationaalisen murtofunktion raja-arvoista

Kahden polynomin osamäärää sanotaan **rationaaliseksi murtofunktioksi** tai lyhyemmin **rationaalifunktioksi**.

Jos rationaalifunktion raja-arvo on epämääräistä muotoa $\frac{0}{0}$, niin raja-arvokohta x_0 on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, jolloin sekä osoittajassa että nimittäjässä täytyy olla sama nollaa lähestyvä tekijä $x-x_0$, joka voidaan tekijöihin jaon jälkeen supistaa pois.

Huomautus. Polynomien tekijöihin jaossa voit käyttää hyväksi esimerkiksi

1) yhteisen tekijän erottamista
2) kaavoja

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+a^1b^{n-2}+a^0b^{n-1})$$

3) polynomien nollakohtia algebran kurssista tutulla tavalla
4) laskimen/tietokoneen factor-komentoa.

Esimerkki. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} \overset{\substack{\text{Totea ensin 0/0-muodoksi,}\\ \text{jaa osoittaja ja nimitäjä sitten tekijöihin}}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}}=\frac{2+2}{2}=2$$

Huomautus. TI-laskimessa on valmis lausekemalli raja-arvon laskemiseksi. Raja-arvon voi laskea myös yhdelle riville kirjoitettavasta lausekkeesta

limit(expression, variable, point, [direction])

missä komennon parametri direction liittyy toispuoleisiin raja-arvoihin.

Esimerkki. Edellisen esimerkin raja-arvon voi laskea seuraavilla syötteillä

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-2x}\right) \boxed{\hookleftarrow}\ 2$$

$$\text{limit}((x\,^\wedge 2-4)/(x\,^\wedge 2-2x), x, 2)\ \boxed{\hookleftarrow}\ 2$$

Huomautus. Myöhemmin voimme laskea monet epämääräistä muotoa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ olevat raja-arvot helposti ns. l'Hospitalin säännöllä, jonka käyttäminen edellyttää kuitenkin derivoinnin hallintaa.

Huomautus. Välttääksesi turhaa työtä raja-arvoa laskiessasi muista aina ensin laskemalla tarkistaa, onko funktio jatkuva raja-arvokohdassa.

Esimerkki. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{3^2-9}{3+3}=\frac{0}{6}\overset{\text{Funktio on määritelty raja-arvokohdassa,}}{\underset{\text{joten raja-arvon saa sijoituksella}}{=}}0$ | Funktio on jatkuva määrittelyalueellaan

Vinkki. Tarkasteltaessa rationaalisen murtofunktion raja-arvoa x:n lähestyessä ääretöntä osamäärä kannattaa supistaa nimittäjän korkeimmalla x:n potenssilla.

Esimerkki. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{3x^2+4x+5}\overset{\text{supistetaan } x^2\text{:lla}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to 0}}=\frac{2}{3}$$

Esimerkki. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-100x}{2x+200}\overset{\text{supistetaan } x\text{:llä}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x-100}^{\to\infty}}{\underbrace{2+\frac{200}{x}}_{\to 2}}=\infty$$

2.6 Neliöjuuren sisältävistä raja-arvoista

Vinkki. Jos epämääräistä muotoa olevassa raja-arvossa esiintyy neliöjuuri, niin usein juurilausekkeen "liittolausekkeella" laventamalla ja sääntöä

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

käyttämällä päästään eroon hankalasta neliöjuuresta.

Esimerkki.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{3-\sqrt{x+7}}$$

Koska lauseke on 0/0-muotoa, niin se kannattaa laventaa juurilausekkeen liittolausekkeella.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})}$$

Kerro erotuksen ja summan tulo auki nimittäjässä, jossa kyseinen tulo voidaan korvata helpommalla neliöiden erotuksella, mutta älä kerro auki murtolausekkeen osoittajaa, koska silloin "menettäisit" osoittajasta tekijän, joka myöhemmin supistuu pois.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{\cancel{(x-2)}}^{-1}(3+\sqrt{x+7})}{\cancel{9-(x+7)}}$$

$$=-6$$

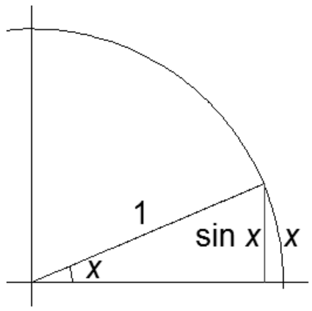
Myös muotoa $\infty-\infty$ oleva, neliöjuurta sisältävä raja-arvo voidaan joskus määrittää laventamalla juurilausekkeen liittolausekkeella.

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+4x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x}+x}\overset{\substack{\text{ota } x \text{ väkisin}\\ \text{tekijäksi}\\ \text{nimittäjästä}}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}+1\right)}=2$$

2.7 Trigonometrisista raja-arvoista

Tarkastellaan 1-säteiseen ympyrään piirrettyä kuvan mukaista kulmaa, jonka suuruus on x radiaania. Kulmaa vastaava kaari on suuruudeltaan x ja pystykateetti $\sin x$. Koska kulman lähestyessä nollaa kaaren pituus lähestyy pystykateetin pituutta, niin $\frac{\sin x}{x} \to 1$.
Sama tulos todetaan osamäärän arvoja taulukoimalla tai myöhemmin l'Hospitalin säännöllä.
Näin olemme saaneet seuraavan lauseen.



Lause. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ ja $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$

Edellistä lausetta käyttäen voidaan laskea monia epämääräistä muotoa 0/0 olevia trigonometrisia raja-arvoja.

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(4x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{\sin(4x)} \cdot \frac{3}{4} \overset{\text{Merkitään } 4x=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Huomautus. Edellisessä laskussa EI SAA lausekkeen $\sin(4x)$ paikalle kirjoittaa lauseketta $4 \cdot \sin x$, vaikka se johtaakin oikeaan lopputulokseen.

Huomautus. Edellisessä esimerkissä lauseketta $4x$ ei tarvitse korvata uudella muuttujalla t, kunhan varmistaa, että murtolausekkeessa $\frac{\sin(4x)}{4x}$ on **sekä sinin sisällä että nimittäjässä sama nollaa lähestyvä lauseke** $4x$.

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{2}{3\underbrace{\cos(2x)}_{\to 1}} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Huomautus. Trigonometrisia lausekkeita käsiteltäessä **laskin on pidettävä radiaani-moodissa kaikkialla differentiaali- ja integraalilaskennassa** (esimerkiksi raja-arvoja, derivaattoja ja integraaleja laskettaessa).

2.8 Neperin luku *e*

Esimerkki. Alle on taulukoitu lausekkeen $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ arvoja, kun $x \to \pm\infty$.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2	$1.5^2 = 2.25$	-2	$0.5^{-2} = 1/0.5^2 = 4$
10	$1.1^{10} \approx 2.59374246$	-10	$0.9^{-10} = 1/0.9^{10} \approx 2.867971991$
100	$1.01^{100} \approx 2.704813829$	-100	$0.99^{-100} = 1/0.99^{100} \approx 2.731999026$
10^3	2.716923932	-10^3	2.719642216
10^6	2.718280469	-10^6	2.718283188
10^9	2.718281828	-10^9	2.718281828
10^{12}	2.718281828	-10^{12}	2.718281828

Tarkasteltava lauseke esittää tuloa, jossa kantaluvun $1+\frac{1}{x}$ suuruisia tekijöitä on kerrottu keskenään x kappaletta. Vaikka x:n kasvaessa äärettömän suureksi kaikki kantalukutekijät lähestyvät ykköstä, niin tulon arvo ei kuitenkaan lähesty ykköstä, koska tulon tekijöiden määrä samalla kasvaa äärettömän suureksi. Taulukon mukaan tarkasteltavan lausekkeen arvo vakiintuu kohden arvoa ≈ 2.7182818, kun $x \to \pm\infty$. Tämä raja-arvo määritellään Neperin luvuksi *e*.

Määritelmä. Neperin luku $e = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2.7182818$

Huomautus. Neperin luku saadaan myös sarjana

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

(muista, että $0! = 1$) tai raja-arvona

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

joka sekin on edellä ollutta epämääräistä muotoa 1^∞.

Huomautus. Epämääräistä muotoa 1^∞ olevan raja-arvon saa usein laskettua Neperin lukuun liittyvillä raja-arvoilla.

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{15} \overset{\text{Merk. } \frac{x}{3}=t}{=} \lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}_{\to e}\right)^{15} = e^{15}$

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}_{\to e}\right)^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}} = e^0 = 1$

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1000} = 1$, sillä yo. esimerkeistä poiketen tulossa on nyt **kiinteä** määrä tekijöitä, jotka kaikki lähestyvät ykköstä.

2.9 l'Hospitalin sääntö

Vaikka derivointi käsitellään myöhemmin, niin esitämme jo nyt helpon säännön epämääräistä muotoa 0/0 tai ∞/∞ olevien raja-arvojen laskemiseksi, jotta raja-arvojen laskuohjeet myöhemmin löytyisivät yhdestä paikasta.

Lause. Epämääräistä muotoa 0/0 tai ∞/∞ oleva raja-arvo voidaan usein laskea säännöllä

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

missä raja-arvokohta x_0 voi olla äärellinen tai ääretön.

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0},\text{ l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{D\sin x}{Dx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$

Esimerkki. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty},\text{ l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{De^x}{Dx} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1} = \infty$

Harjoitustehtäviä

2.1 Laske sekä käsin että laskimella

v1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2x+1}$ **v2)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ **v3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}$

v4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+2}$ **v5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x+3}$ **v6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{4x^3-2x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+3}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+3x+1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+1}{2x+3}$.

2.2 Laske käsin ja laskimella **v)** $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{5x}$ **a)** $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$

2.3 Laske käsin ja laskimella

v1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{10x}$ **v2)** $\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin(2x)}$ **v3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(6x)}{3x}$ **v4)** $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos(3x)}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{4x}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(3x)}$ **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\tan(5x)}$ **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)}{4x}$

2.4 Laske käsin ja laskimella

v1) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{x}$ **v2)** $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-4}{x-2}$ **v3)** $\lim_{x\to 3^-}\frac{2-x}{x-3}$

a) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-3}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-4}{x-3}$ **c)** $\lim_{x\to -2^-}\frac{2-x}{x+2}$

2.5 Määritä sekä funktion kuvaajaa miettimällä että laskimella

a) $\lim_{x\to 0^+}\ln x$ **b)** $\lim_{x\to\infty}\ln x$ **c)** $\lim_{x\to 1^-}\ln x$

d) $\lim_{x\to 0^+}e^x$ **e)** $\lim_{x\to\infty}e^x$ **f)** $\lim_{x\to -\infty}e^x$

g) $\lim_{x\to\infty}\sin x$ **h)** $\lim_{x\to 0}\cos x$ **i)** $\lim_{x\to\infty}(3x-x^2)$

2.6 Määritä käsin ja laskimella $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}\right)^n$.

2.7 Määritä kaavaa $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b^0+...+a^0b^{n-1})$ käyttäen ja laskimella

v) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ **b)** $\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{x^4-10000}$ **c)** $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$

2.8 Määritä sekä kaavaa $(a+b)^n=1a^nb^0+na^{n-1}b^1+...+na^1b^{n-1}+1a^0b^n$ käyttäen **(**kertoimet 1, n, ..., n, 1 saat helposti Pascalin kolmiosta) että laskimella

v1) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$ **v2)** $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{(t+\Delta t)^5-t^5}$

a) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$ **b)** $\lim_{h\to 0}\frac{h}{(t+h)^4-t^4}$

2.9 Määritä vakio a siten, että annettu funktio on kaikkialla jatkuva

v) $f(x)=\begin{cases}2x+a, & \text{kun } x\le 3\\ ax+4, & \text{kun } x>3\end{cases}$ **a)** $g(x)=\begin{cases}2x^2+x+1, & \text{kun } x\le a\\ x+9, & \text{kun } x>a\end{cases}$

2.10 Miksi laskimen mukaan $(1+1/x)^x\approx 1$ suurilla x:n arvoilla (esimerkiksi kun $x=10^{20}$ tai 10^{50}), vaikka $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$?

3. KESKIMÄÄRÄINEN JA HETKELLINEN MUUTOSNOPEUS

Monet fysiikan suureet kuvaavat jonkin toisen suureen muuttumisnopeutta. Esimerkiksi

- x-akselilla liikkuvan kappaleen nopeus v kuvaa kappaleen paikan x muuttumisnopeutta
- avaruudessa liikkuvan kappaleen nopeusvektori $\overline{v}$ kuvaa kappaleen paikkavektorin $\overline{r}$ muuttumisnopeutta
- kappaleen kiihtyvyys a kuvaa kappaleen nopeuden v muuttumisnopeutta
- kappaleen kiihtyvyysvektori $\overline{a}$ kuvaa kappaleen nopeusvektorin $\overline{v}$ muuttumisnopeutta
- koneen teho P kuvaa koneen tekemän työn W kasvunopeutta
- sähkövirta I kuvaa johtimen poikkipinnan läpi kulkeneen varauksen Q muuttumisnopeutta
- putkessa kulkevan nesteen tilavuusvirta q (yksikkönä esim. m^3/h) kuvaa putken poikkipinnan läpi kulkeneen nesteen tilavuuden muuttumisnopeutta. Tilavuusvirran merkki kertoo virtaussuunnan.

Tällaisen muutosnopeutta kuvaavan suureen **keskimääräinen arvo** tietyllä aikavälillä saadaan jakamalla muuttuvan suureen muutos aikavälin pituudella.

Esimerkki. Edellä mainittujen muutosnopeutta kuvaavien suureiden keskimääräiset arvot voidaan laskea seuraavina osamäärinä

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ ,\ \overline{v}_k = \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}\ ,\ a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}\ ,\ \overline{a}_k = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}\ ,\ P_k = \frac{\Delta W}{\Delta t}\ ,\ I_k = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\ ,\ q_k = \frac{\Delta V}{\Delta t}\ ,$$

joiden osoittajana on muuttuvan suureen muutos ja nimittäjänä muutokseen kulunut aika.

Muutosnopeutta kuvaavan suureen **hetkellinen arvo** hetkellä t tarkoittaa saman suureen aikavälillä $[t,\ t+\Delta t]$ lasketun keskimääräisen arvon raja-arvoa, kun aikavälin pituus Δt lähestyy nollaa (kummalta puolelta tahansa).

Esimerkki. Olkoon x-akselilla liikkuvan kappaleen asema $x = x(t) = 3t^2$. Tehtävänä on määrittää kappaleen hetkellinen nopeus hetkellä $t = 5$ eri tavoin.

Tapa 1. Muodostetaan viereinen aikaväleillä [5, t] lasketuista keskinopeuksista muodostuva taulukko.

Aikaväli	Keskinopeus
[5, 6]	33
[5, 5.1]	30.3
[5, 5.01]	30.03
[5, 5.001]	30.003

Esimerkiksi keskinopeus aikavälillä [5, 6] saadaan lausekkeesta

$$v_k(5,6) = \frac{x(6)-x(5)}{6-5} = \frac{3\cdot 6^2 - 3\cdot 5^2}{1} = 33$$

Kysytty hetkellinen nopeus on taulukon nopeuksien ilmeisenä raja-arvona 30.

Tapa 2. Hetkellisen nopeuden voi laskea käsin seuraavina raja-arvoina

$$v(5) = \lim_{t\to 5} v_k(5,t) = \lim_{t\to 5}\frac{x(t)-x(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{3\cdot t^2 - 3\cdot 5^2}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{3\cdot \cancel{(t-5)}(t+5)}{\cancel{t-5}} = 30$$

tai

$$v(5) = \lim_{\Delta t\to 0} v_k(5,5+\Delta t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(5+\Delta t)-x(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\cdot(5+\Delta t)^2 - 3\cdot 5^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\cdot(\cancel{5^2} + 10\Delta t + (\Delta t)^2) - \cancel{3\cdot 5^2}}{\Delta t} \quad \text{(Supista lopuksi } \Delta t\text{)} \quad = \lim_{\Delta t\to 0} 3\cdot(10+\Delta t) = 30$$

Tapa 3. Edelliset raja-arvot voit laskea myös laskimella lausekemalleja käyttä-en seuraavasti:

Define $x(t) = 3t^2$

$\lim_{t\to 5}\left(\frac{x(t)-x(5)}{t-5}\right)$ ↵ 30

$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)$ ↵ 30

Huomautus. Symbolin Δ voit hakea laskimen symbolivalikosta kreikkalaisten kirjaimien Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, … joukosta. Vaikka ennen kirjaimen valintaa painaisit vielä ⇑ shift -näppäintä saadaksesi symbolin näkyviin isona deltana Δ, niin se muuttujanimen kirjaimena kuitenkin jatkossa muuttuu pikku-deltaksi δ. Käyttämälläsi merkinnällä ei kuitenkaan ole merkitystä, joten kirjoita muuttujan nimeksi vaikkapa *dt* tai *delta_t* alleviivausviivaa käyttäen.

TI-laskimen symbolivalikossa on kyllä muitakin kolmion näköisiä merkkejä, joilla on kuitenkin omat matemaattiset merkityksensä eikä niitä siksi voi käyttää muuttujanimen kirjaimena.

Esimerkki. Määritä koneen (hetkellinen) teho $P(t)$ hetkellä *t,* jos koneen aikavälillä [0, *t*] tekemä työ $W(t)=4t^3$.

Seuraavassa hetkellinen teho hetkellä *t* lasketaan kahdella eri tavalla

(i) aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ lasketun keskimääräisen tehon raja-arvona aikavälin pituuden Δt lähestyessä nollaa:

$$P(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(t+\Delta t)^3-4t^3}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(\cancel{t^3}+3t^2\cdot\Delta t+3t\cdot(\Delta t)^2+(\Delta t)^3)-\cancel{4t^3}}{\Delta t}$$

Binomin 3. potenssi kerrottu auki Pascalin kolmion avulla. Supista lopuksi Δt

$$=\lim_{\Delta t\to 0}4\left(3t^2+3t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2\right)=12t^2$$

tai muokkaamalla samaa raja-arvoa toisin

$$P(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(t+\Delta t)^3-4t^3}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4\,\cancel{((t+\Delta t)-t)}\,((t+\Delta t)^2+(t+\Delta t)\cdot t+t^2)}{\cancel{\Delta t}}$$

$$=4(t^2+t^2+t^2)=12t^2$$

Ota 4 tekijäksi, käytä kaavaa $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(ii) aikavälillä $[t, t_2]$ lasketun keskimääräisen tehon raja-arvona, kun $t_2\to t$:

$$P(t)=\lim_{t_2\to t}\frac{W(t_2)-W(t)}{t_2-t}=\lim_{t_2\to t}\frac{4t_2^{\,3}-4t^3}{t_2-t}=\lim_{t_2\to t}\frac{4\,\cancel{(t_2-t)}\,(t_2^{\,2}+t_2t+t^2)}{\cancel{t_2-t}}=12t^2$$

Laske raja-arvot myös laskimella! (Katso edellisen sivun huomautus!)

Esimerkki. Jos johtimen poikkipinnan läpi aikavälillä [0, *t*] kulkenut varaus on $Q=Q(t)=5-5e^{-t}$, niin keskimääräinen sähkövirta aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ on

$$I_k(t,\ t+\Delta t)=\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}.$$

Hetkellinen sähkövirta saadaan siis raja-arvona

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t},$$

mikä meidän on toistaiseksi laskettava laskimella:

$$\text{Define } Q(t)=5-5e^{-t}\ :\ \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}\right)\quad \boxed{\hookleftarrow}\quad 5e^{-t}$$

Esimerkki. Auton polttoaineen kulutusta voidaan mitata kahdella tapaa: joko yksiköissä $\frac{\text{L}}{100\text{ km}}$ tai $\frac{\text{L}}{\text{h}}$. Oletetaan, että levosta liikkeelle lähdettäessä kiihdytyksen ajan auton polttoaineen kulutus yksiköissä L/h on vakio $C = 25\,\text{L/h}$. Oletetaan tällöin myös auton kiihtyvyys vakioksi $a = 1.8\text{ m/s}^2$. Seuraavassa tutkitaan auton keskimääräistä polttoaineenkulutusta $pk_k(0, t)$ kiihdytyksen aikana aikavälillä $[0, t]$ yksiköissä litraa sataa kilometriä kohden

$$pk_k(0, t) = \frac{\text{aikavälillä } [0,t] \text{ kulunut polttainemäärä}}{\text{aikavälillä } [0,t] \text{ kuljettu matka}} = \frac{\cancel{t} \cdot C}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^{\cancel{2}}} = \frac{2C}{at}.$$

Erityisesti aikaväleillä [0, 20s] ja [0, 2s] saadaan

$$pk_k(0, 20\text{s}) = \frac{2 \cdot 25\,\text{L/h}}{1.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20s} = 38.6\frac{\text{L}}{100\text{km}} \quad \text{ja} \quad pk_k(0, 2\text{s}) = \frac{2 \cdot 25\,\text{L/h}}{1.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s}} = 386\frac{\text{L}}{100\text{km}}.$$

Lasketaan seuraavaksi lähtöhetken hetkellinen polttoaineen kulutus $pk(0^+)$ hetkellä $t = 0^+$ keskimääräisen polttoaineen kulutuksen $pk_k(0, t)$ raja-arvona:

$$pk(0^+) = \lim_{t \to 0^+} pk_k(0, t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{2C}{at} \overset{C,a \text{ positiivisia vakioita}}{=} \infty \frac{\text{L}}{100\,\text{km}}.$$

Pieniruokaisimmankin auton hetkellinen polttoaineen kulutus yksiköissä L/(100km) on siis lähtöhetkellä äärettömän suuri!
Onneksemme auton hetkellinen kulutus mainituissayksiköissä on äärettömän suuri lähtöhetkellä vain äärettömän lyhyen aikaa ja automme liikkuu todellisuudessakin vähän matkaa jo varsin pienellä polttoainemäärällä.

Esimerkki. Jos kappaleen paikkavektori on ajan t funktiona $\bar{r} = \bar{r}(t) = [t^2, 2t, 3]$, niin kappaleen hetkellinen nopeusvektori hetkellä t saadaan aikavälillä $[t,\ t + \Delta t]$ lasketun keskimääräisen nopeusvektorin raja-arvona aikavälin pituuden lähestyessä nollaa:

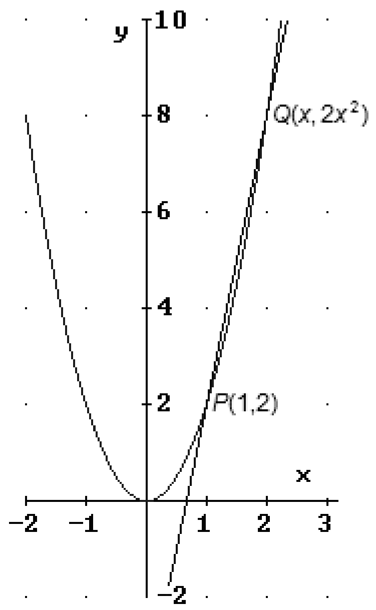
$$\begin{aligned}
\bar{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_k(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(t + \Delta t)^2, 2(t + \Delta t), 3] - [t^2, 2t, 3]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\cancel{t^2} + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - \cancel{t^2}, \cancel{2t} + 2\Delta t - \cancel{2t}, \cancel{3} - \cancel{3}]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} [2t + \Delta t, 2, 0] = [2t, 2, 0].
\end{aligned}$$

Raja-arvon voi määrittää laskimella:

Define $r(t) = [t^2,\ 2t, 3]$

$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \right)$ ↵ $[2t, 2, 0]$

Esimerkki. Tarkastelemme paraabelin $y = 2x^2$ pisteiden $P(1,2)$ ja $Q(x, 2x^2)$ kautta asetettua sekanttia.



Jos piste Q lähestyy pistettä P pitkin paraabelin kaarta, niin sekantti kääntyy pisteeseen (1, 2) asetetuksi tangentiksi. Näin ollen tangentin kulmakerroin saadaan sekantin kulmakertoimen

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2\cdot 1^2}{x - 1}$$

raja-arvona, kun $x \to 1$. Tangentin kulmakerroin on siis

$$k_t = \lim_{x\to 1} k_s = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 2\cdot 1^2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 4\,.$$

Harjoitustehtäviä.

3.1 Olkoon kappaleen asema **v)** $x = x(t) = t^3$ **a)** $x = x(t) = t^2$

i) Laske kappaleen keskinopeus ylitarkasti aikaväleillä [7, 7.1], [7, 7.001] ja [7, 7.00001]. Arvaa tulostesi avulla kappaleen hetkellinen nopeus hetkellä $t = 7$.

ii) Määritä hetkellinen nopeus hetkellä $t = 7$ myös sopivan keskimääräisen nopeuden raja-arvona aikavälin pituuden lähestyessä nollaa.

3.2 Olkoon astiassa olevan veden tilavuus

v) $V(t) = \begin{cases} 16t - 2t^2, \text{ kun } 0 \le t \le 8 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$ **a)** $V(t) = \begin{cases} 8t - t^2, \text{ kun } 0 \le t \le 8 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$

i) Määritä veden tilavuuden keskimääräinen muutosnopeus aikaväleillä [2, 2.1], [2, 2.01] ja [2, 2.001].

ii) Veden tilavuuden muutosnopeus merkkeineen on samalla astiaan saapuvan nestevirtauksen tilavuusvirta (yksikkönä esimerkiksi ltr/s tai m^3/h), mikäli astiaan ei tule eikä siitä poistu vettä mitään muuta reittiä pitkin. Määritä hetkellinen tilavuusvirta $q(t)$ aikavälin $0<t<8$ yleisellä ajanhetkellä t sopivan keskimääräisen tilavuusvirran raja-arvona ja määritä tuloksesi perusteella hetkellinen tilavuusvirta hetkellä $t = 2$.

iii) Piirrä tilavuuden ja laskemasi tilavuusvirran kuvaajat allekkain oleviin koordinaatistoihin käyttäen aika-akseleilla yhtä pitkiä yksiköitä.

3.3 Tarkastellaan kappaletta, jonka paikkavektori on

v) $\bar{r} = \bar{r}(t) = [2, t^2, t^4]$ **a)** $\bar{r} = \bar{r}(t) = [3t, t^3, 4]$.

i) Määritä kappaleen hetkellinen nopeusvektori hetkellä t aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ lasketun keskimääräisen nopeusvektorin raja-arvona, kun aikavälin pituus lähenee nollaa.

ii) Laske sitten kappaleen hetkellinen kiihtyvyysvektori hetkellä t sopivan keskimääräisen kiihtyvyysvektorin raja-arvona.

3.4 Tehtävässä tarkastellaan auton polttoaineen kulutusta, jota tavallisesti tarkastellaan yksiköissä ltr/(100 km).

v) Oletetaan, että kiihdytyksessä auton polttoaineen kulutus on 5.00 ltr/h, jolloin auton kiihtyvyys on 1.00 m/s^2 kunnes auto 30.0 sekunnissa saavuttaa nopeuden 108 km/h.

i) Määritä auton keskimääräinen polttoaineen kulutus em. kiihdytyksessä yksiköissä ltr/(100 km) aikaväleillä [10, 11], [10, 10.1] ja [10, 10.01] sekuntia sekä aikaväleillä [0, 10], [0, 1], [0, 0.1] ja [0, 0.01] sekuntia. Aikaa mitataan tietenkin liikkeellelähtöhetkestä alkaen.

ii) Määritä myös hetkellinen polttoaineen kulutus yksiköissä ltr/(100 km) ajanhetkinä $t = 10$ ja $t = 0^+$ sekuntia. Hetkellinen polttoaineen kulutus hetkellä 0^+ tarkoittaa aikavälillä $[0, t]$, $t > 0$, lasketun keskimääräisen polttoaineen kulutuksen raja-arvoa, kun $t \to 0^+$.

a) Oletetaan, että kiihdytyksessä auton polttoaineen kulutus on 20.00 ltr/h, jolloin auton kiihtyvyys on 3.00 m/s^2 kunnes auto 15.0 sekunnissa saavuttaa nopeuden 162 km/h. Suorita edellä olleet osiot i) ja ii).

3.5 Määritä käyrän $y = x^3$ pisteiden $P(2,8)$ ja $Q(x, x^3)$ kautta kulkevan sekantin kulmakerroin. Määritä myös pisteeseen P asetetun tangentin kulmakerroin edellä tarkastellun sekantin kulmakertoimen raja-arvona.

4. DERIVAATAN MÄÄRITELMÄ

Edellä olemme laskeneet monien suureiden hetkellisen (tai muuttujan luonteesta riippuen paikallisen) muutosnopeuden keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona antamalla välin pituuden lähestyä nollaa.

Tätä laskemista voidaan nopeuttaa määrittelemällä käsitteet erotusosamäärä ja derivaatta, jotka kuvaavat funktion keskimääräistä ja hetkellistä (paikallista) muutosnopeutta.

Funktion hetkellinen (paikallinen) muutosnopeus tullaan myöhemmin laskemaan suoraan alkuperäisestä funktiosta jatkossa esitettävillä derivointisäännöillä ilman, että joudumme laskemaan ensin keskimääräisen muutosnopeuden ja sitten sen raja-arvon.

Määritelmä. Funktion $y = y(x)$ **erotusosamäärä** välillä $[x, x+\Delta x]$ tarkoittaa funktion muutoksen ja argumentin muutoksen suhdetta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

(eli sananmukaisesti erotusten osamäärää, sillä onhan myös $\Delta x = (x+\Delta x) - x$ kahden eri *x*-arvon erotus).

Huomautus. Erotusosamäärä kuvaa funktion **keskimääräistä muutosnopeutta** tarkasteluvälillä.

Määritelmä. Funktion $y = y(x)$ **derivaatta** $y'(x)$ kohdassa (hetkellä) *x* määritellään välillä $[x, x+\Delta x]$ lasketun erotusosamäärän raja-arvona välin pituuden lähestyessä nollaa ts.

$$\boxed{y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}.$$

Huomautus. Funktion $y = y(x)$ derivaatta $y'(x)$ kuvaa funktion **paikallista (hetkellistä) muutosnopeutta** kohdassa (hetkellä) *x.*

Merkintä. Funktion $y = y(x)$ derivaattaa merkitään monin eri tavoin kuten

$$y',\ y'(x),\ Dy,\ Dy(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}y(x),\ \ldots$$

Huomautus. Derivaatan tunnuksessa oleva pilkku korvataan joskus pisteellä varsinkin, jos muuttujana on aika *t.* Esimerkiksi funktion $y = y(t)$ derivaattaa merkitään myös $\dot{y}$ tai $\dot{y}(t)$.

Esimerkki. Johdetaan määritelmään perustuen funktion $y = x^2$ derivaatta kohdissa a) x ja b) $x = 3$.

a)
$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Saman funktion *y* derivaatta kohdassa *x* voidaan laskea myös välillä $[x, x_1]$ lasketun erotusosamäärän raja-arvona muuttujan x_1 lähestyessä *x*:ää, sillä tällöinkin välin pituus $\to 0$:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x}$$
$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\cancel{(x_1 - x)}(x_1 + x)}{\cancel{x_1 - x}} = 2x$$

b) Derivaatta kohdassa $x = 3$ saadaan nopeimmin edellä laskettusta derivaatan yleisestä arvosta sijoittamalla $x = 3$, joten $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Jos derivaatan yleistä arvoa ei olisi edellä laskettu, niin derivaatta kohdassa $x = 3$ voitaisiin laskea

1) välillä $[3, 3 + \Delta x]$ lasketun erotusosamäärän raja-arvona, kun $\Delta x \to 0$:

$$y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(3+\Delta x) - y(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3^2} + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{3^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot 3 + \Delta x) = 6$$

2) välillä $[3, x]$ lasketun erotusosamäärän raja-arvona, kun $x \to 3$:

$$y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 3} \frac{y(x) - y(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$$

Kohdan b laskut vastaavat kohdan a yleisiä laskuja sillä erolla, että *x*:n tilalla on 3 ja x_1 on nyt korvattu lyhyemmällä merkinnällä *x.*

Samat laskut voi suorittaa laskimella seuraavasti:

Define $y(x) = x^2$

a) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ $\boxed{\hookleftarrow}$ $2x$

$\displaystyle\lim_{x1 \to x} \frac{y(x1)-y(x)}{x1-x}$ $\boxed{\hookleftarrow}$ $2x$

b) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(3+\Delta x)-y(3)}{\Delta x}$ $\boxed{\hookleftarrow}$ 6

$\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{y(x)-y(3)}{x-3}$ $\boxed{\hookleftarrow}$ 6

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.1 Määritä funktioiden **v)** $y = x^3$ **a)** $y = \sqrt{x}$
derivaattafunktiot väleillä $[x, x+\Delta x]$ ja $[x, x_1]$ laskettujen erotusosamäärien raja-arvoina, kun välin pituus lähestyy nollaa. Suorita tarvittavat raja-arvolaskut sekä käsin laskien että laskinta hyödyntäen

4.2 Määritä funktion $y = 7x^2$ derivaatta kohdassa $x = 4$ väleillä $[4, 4+\Delta x]$ ja $[4, x]$ laskettujen erotusosamäärien raja-arvoina, kun välinpituus lähestyy nollaa. Suorita laskut molemmilla merkintätavoilla sekä käsin laskien että laskinta hyödyntäen.

4.3 Olkoon kappaleen paikkavektori ajan t funktiona
v) $\bar{r} = \bar{r}(t) = [4, 5t, t^2]$ **a)** $\bar{r} = \bar{r}(t) = [t^3, 4, 5t^2]$.
Määritä kappaleen nopeusvektori hetkellä t aikaväleillä $[t, t+\Delta t]$ ja $[t, t_1]$ laskettujen keskimääräisten nopeusvektoreiden raja-arvoina aikavälin pituuden lähestyessä nollaa. Suorita laskut sekä käsin laskien että laskinta hyödyntäen.

4.4 **J**ohda laskimella erotusosamäärän raja-arvoina funktioiden
x^a (a vakio), $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$ ja $\arcsin x$
derivaatat yleisessä pisteessä x.

5. PERUSFUNKTIOIDEN DERIVOINTI

Seuraavassa esitämme ne kaavat, joilla saa välittömästi tavallisimpien perusfunktioiden derivaatat eli paikalliset (hetkelliset) muutosnopeudet ilman mitään raja-arvojen laskemista.

Lause.

$$\boxed{\begin{aligned} DC &= 0 \\ D(x^n) &= n \cdot x^{n-1} \\ D\sin x &= \cos x \\ D\cos x &= -\sin x \\ D(e^x) &= e^x \\ D\ln x &= \frac{1}{x} \end{aligned}}$$

Huomautus. Kaksi ylintä kaavaa kannattaa opetella sanallisesti:

Vakion derivaatta on nolla.

Potenssifunktion derivaatta on eksponentti kertaa muuttuja korotettuna yhtä pienempään eksponenttiin.

Huomautus. Koska vakiofunktion C arvo on aina sama, niin vakiofunktio ei muutu ja sen keskimääräinen ja hetkellinen muutosnopeus ovat tietenkin nollia.

Huomautus. Potenssifunktion derivointisääntö $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ on voimassa kaikilla reaalieksponenteilla n, kunhan vain tarvittaessa $x > 0$. Seuraavassa todistamme tämän derivointisäännön kuitenkin vain siinä erikoistapauksessa, kun n on positiivinen kokonaisluku:

Olkoon $y = y(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Silloin

$$y'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{\cancel{(x_1 - x)}\,(x_1^{\,n-1}x^0 + x_1^{\,n-2}x^1 + \ldots + x_1^{\,1}x^{n-2} + x_1^{\,0}x^{n-1})}{\cancel{x_1 - x}} = n \cdot x^{n-1}$$

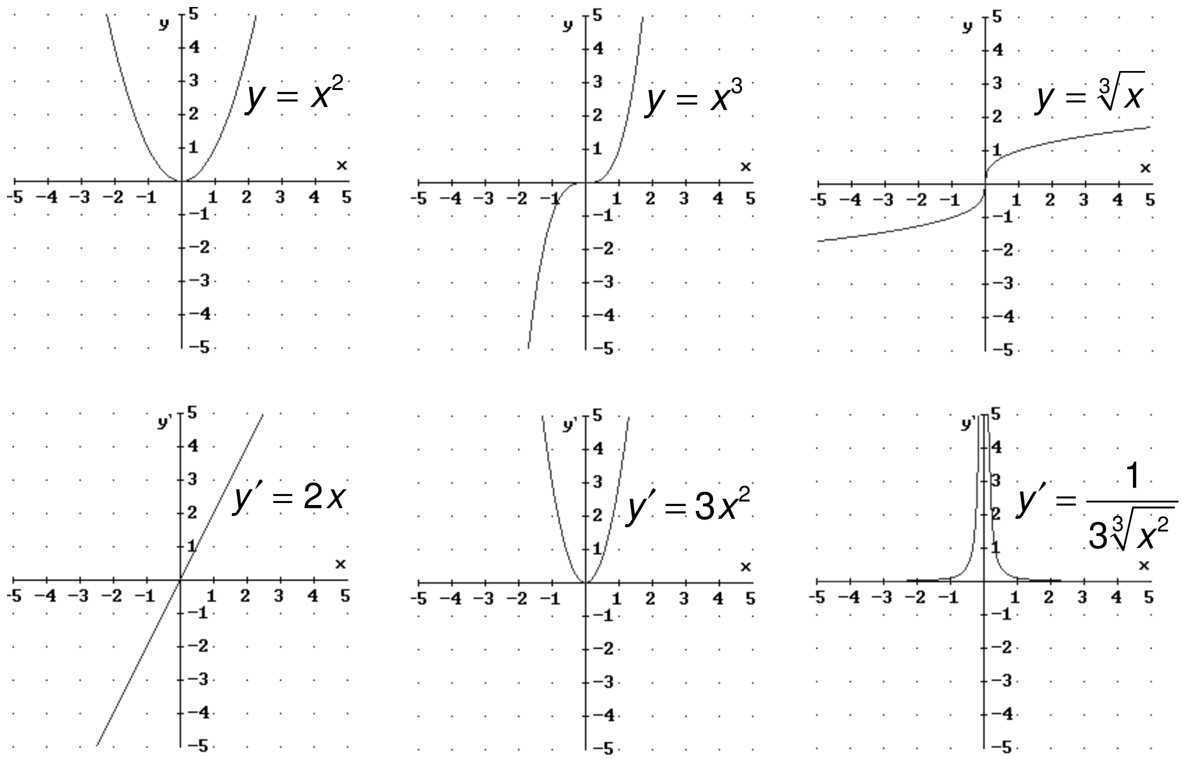
Esimerkki. $Dx^4 = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

$$D\sqrt[3]{x} = D(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$D\left(\frac{1}{x^4}\right) = D(x^{-4}) = -4 \cdot x^{-4-1} = \frac{-4}{x^5}$$

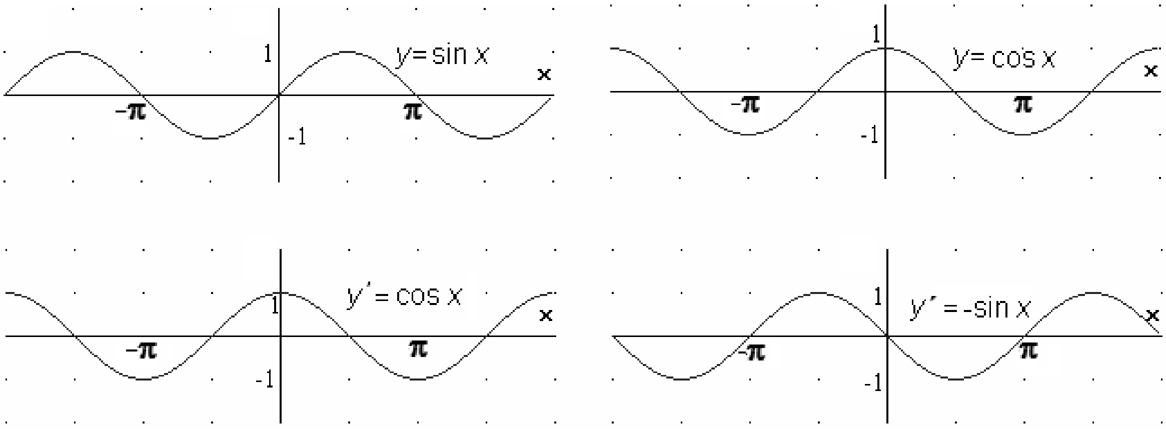
Huomautus. Edellisen esimerkin ensimmäisen derivaatan voi laskea sopivaa lausekemallia käyttäen TI-laskimen komennolla $\frac{d}{dx}\left(x^4\right)$ tai yksirivisellä syötteellä $d(x \wedge 4, x)$, missä d on valikoista löytyvä derivaattaoperaattori.

Huomautus. Potenssifunktioiden derivointisääntöjä voi havainnollistaa seuraavalla kuvalla, johon on piirretty funktioiden $y = x^2$, $y = x^3$ ja $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ kuvaajat ja niiden alle vastaavat derivaattafunktiot.

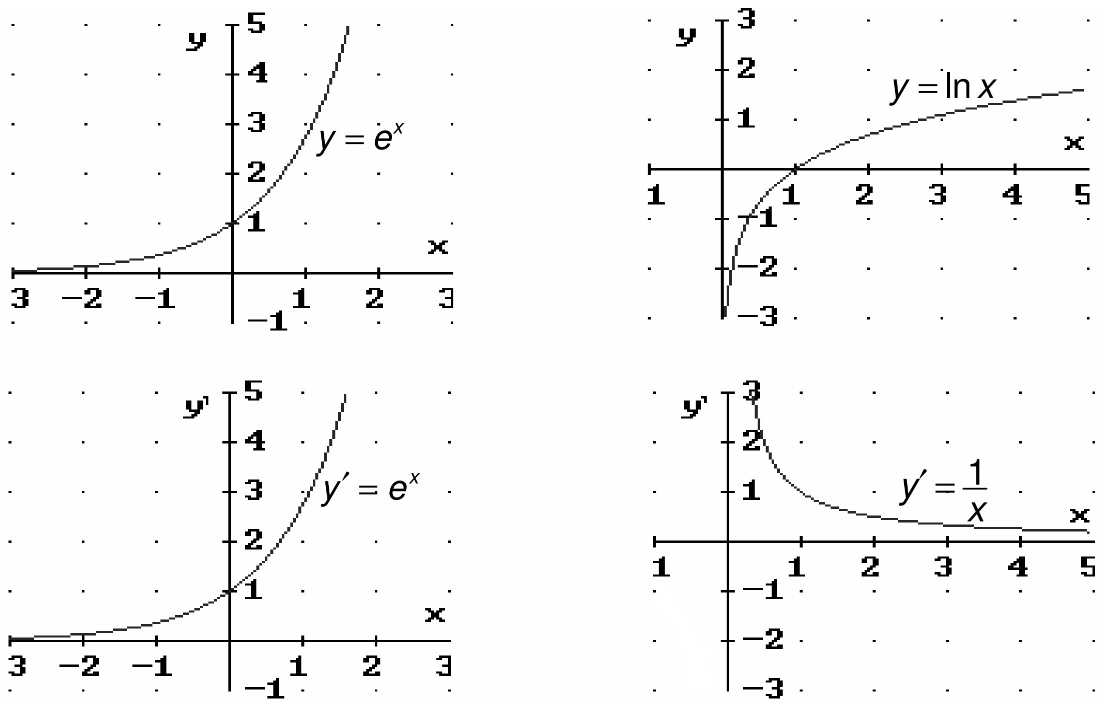


Edellä olleista potenssifunktioiden ja niiden derivaattafunktioiden kuvaajista ilmenee, että funktion derivaatta y' on ei-negatiivinen, jos itse funktio y on kasvava, ja derivaatta on sitä suurempi, mitä nopeammin (”jyrkemmin”) itse funktio kasvaa. Funktion kuvaajan vaakasuorissa kohdissa (ääriarvo- tai terassipisteessä) funktion derivaatta on nolla. Derivaatta todellakin kuvaa siis funktion paikallista kasvunopeutta.

Seuraavat kuvaparit esittävät vastaavasti funktioita $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ derivaattafunktioineen $D\sin x = \cos x$ ja $D\cos x = -\sin x$.



Viimeinen kuvapari esittää vielä funktioita $y = e^x$ ja $y = \ln x$ derivaattafunktioineen $De^x = e^x$ ja $D\ln x = 1/x$.



Huomautus. Esitämme vielä perusteluitta joukon harvinaisempien perusfunktioiden derivointikaavoja, joita ei tarvitse osata ulkoa, vaan ne voi tarvittaessa määrittää laskimella tai tietokoneella.

$$D\tan x = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1+\tan^2 x \end{cases}$$

$$D\cot x = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sin^2 x} \\ -1-\cot^2 x \end{cases}$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \text{ kun } |x|<1$$

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \text{ kun } |x|<1$$

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Huomautus. Trigonometrisia funktioita ja niiden käänteisfunktioita derivoitaessa **laskin on pidettävä radiaanimoodissa**.

Harjoitustehtäviä

5.1 Derivoi käsin ja laskimella seuraavat funktiot:

a) x^{77} b) x c) $\sqrt{x}$ d) $\sqrt[9]{x^4}$ e) $\dfrac{1}{x^5}$

f) $\dfrac{1}{2^4}$ g) $x^2\sqrt{x}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ i) $x^{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}}$ j) $\sqrt{3}$

k) $\dfrac{1}{x^{\sqrt[3]{5}}}$ l) $\cos x$ m) $\sin(\frac{\pi}{4})$ n) $x^2 \cdot x^3$ o) $\ln 4$

5.2 Milloin funktio **v)** $f(x)=4x^2-7x+2$ **a)** $g(x)=2x^3-6x^2+6x-5$ on kasvava ja milloin vähenevä?

5.3 Laske mahdollisimman monin eri tavoin

v) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$ **a)** $\dfrac{d}{ds}\left(s\sqrt{s}\right)$ **b)** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ **c)** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}\right)$

6. YLEISIÄ DERIVOINTISÄÄNTÖJÄ

Lause. Koska summan muutosnopeus on termien muutosnopeuksien summa, niin summa voidaan derivoida termeittäin eli

$$D\big(f(x)+g(x)\big)=Df(x)+Dg(x)=f'(x)+g'(x)$$

Havainnollistus. Jos kahdesta peräkkäin olevasta sauvasta toinen kasvaa pituutta nopeudella 2 cm/s ja toinen nopeudella 3 cm/s, niin sauvojen yhteenlaskettu pituus kasvaa nopeudella 5 cm/s.

Esimerkki. $D(x^2+\ln x)=D(x^2)+D(\ln x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

Huomautus. Myös erotus voidaan derivoida termeittäin.

Esimerkki. $D(\sin x-x^3)=D(\sin x)-D(x^3)=\cos x-3x^2$

Lause. Koska monikerran muutosnopeus on muutosnopeuden monikerta, niin vakiotekijän voi siirtää derivoinnin eteen eli

$$D\big(a\cdot f(x)\big)=a\cdot Df(x)=a\cdot f'(x).$$

Havainnollistus. Jos meillä on 20 osaketta, joiden jokaisen arvo nousee nopeudella 3 €/vuosi, niin niiden yhteisarvo nousee nopeudella 60 €/vuosi.

Esimerkki. $D(2x^3-4x^5)=D(2x^3)-D(4x^5)=2\cdot D(x^3)-4\cdot D(x^5)$

$$=2\cdot 3x^2-4\cdot 5x^4=6x^2-20x^4$$

Tällaiset derivoinnit voi myöhemmin hyvin tehdä ilman välivaiheita.

Esimerkki. $D(3x^2-4x+5)=3\cdot 2x-4\cdot 1+0=6x-4$

Huomautus. Tuloa ei saa derivoida tekijöittäin, vaan tulon derivointisääntö on huomattavasti mutkikkaampi. Seuraavassa esitetäänkin tulon derivointisääntö sitä geometrisesti havainnollistaen.

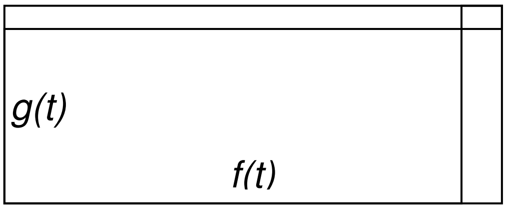
Lause. Tulon derivaatta on

ensimmäisen tekijän derivaatta kertaa jälkimmäinen tekijä
$+$ ensimmäinen tekijä kertaa jälkimmäisen derivaatta

eli

$$D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = (Df(x))\cdot g(x) + f(x)\cdot (Dg(x))$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Havainnollistus. Tarkastellaan suorakulmiota, jonka sivut $f(t)$ ja $g(t)$ ovat ajan funktioita. Tarkastellaan pinta-alan $A(t) = f(t)\cdot g(t)$ kasvunopeutta.



Alan hetkellinen kasvunopeus hetkellä t on

$A'(t) \overset{\text{Huom.}}{=}$ alan hetkellinen kasvunopeus oikeassa päädyssä
$+$ alan hetkellinen kasvunopeus yläreunassa

$=$ kannan $f(t)$ kasvunopeus $f'(t)$ • korkeus $g(t)$
$+$ kanta $f(t)$ • korkeuden $g(t)$ kasvunopeus $g'(t)$

Päättelyn lopputuloksena olemme saaneet kaavan

$$D\big(f(t)\cdot g(t)\big) = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$$

Edellisen päättelyn kohdassa $\overset{\text{Huom.}}{=}$ voimme käyttää tarkkaa yhtäsuuruutta, sillä hetkellistä muutosnopeutta laskettaessa suorakulmion ylänurkassa oleva pienen suorakulmion kasvunopeus on merkityksetön oikean reunan ja yläreunan pinta-alojen kasvunopeuksiin verrattuna.

Esimerkki. Derivoimme tulon $x^2 \cdot x^5$ kahdella eri tavalla.

Tulon derivointisäännöllä saadaan

$$D(x^2\cdot x^5) = D(x^2)\cdot x^5 + x^2\cdot D(x^5) = 2x\cdot x^5 + x^2\cdot 5x^4 = 7x^6$$

Sama tulos saadaan suorittamalla ensin kertolasku:

$$D(x^2\cdot x^5) = D(x^7) = 7x^6$$

Huomautus. Aina kertolaskua ei voi suorittaa auki sellaiseen muotoon, jonka saisi derivoitua ilman tulon derivointisääntöä.

Esimerkki. $D(3\cdot x^2\cdot \sin x) = 3\cdot D(x^2\cdot\sin x) = 3\cdot((Dx^2)\cdot\sin x + x^2\cdot(D\sin x))$
$= 3(2x\sin x + x^2\cos x) = 6x\sin x + 3x^2\cos x$

Toisin: $D(3\cdot x^2\cdot\sin x) = D((3x^2)\cdot\sin x) = (D(3x^2)\cdot\sin x + 3x^2\cdot(D\sin x))$
$= 6x\cdot\sin x + 3x^2\cdot\cos x$

Huomautus. Tulon derivointisääntö voidaan yleistää koskemaan useampaakin tekijää.

Lause. Tulon derivaatta saadaan kertomalla vuorollaan kunkin tekijän derivaatalla kaikki muut tekijät ja laskemalla saadut tulot yhteen, esimerkiksi

$$D(f(x)g(x)h(x))$$
$$= \underline{f'(x)}g(x)h(x) + f(x)\underline{g'(x)}h(x) + f(x)g(x)\underline{h'(x)} \overset{\text{lyhyesti}}{=} \underline{f'}gh + f\underline{g'}h + fg\underline{h'}$$

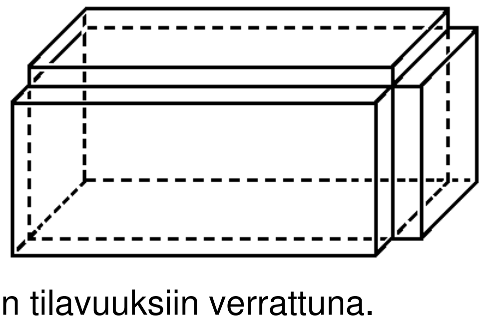
$$D(f(x)\,g(x)\,h(x)\,i(x))$$
$$= \underline{f'(x)}g(x)h(x)i(x) + f(x)\underline{g'(x)}h(x)i(x) + f(x)g(x)\underline{h'(x)}i(x) + f(x)g(x)h(x)\underline{i'(x)}$$
$$= \underline{f'}ghi + f\underline{g'}hi + fg\underline{h'}i + fgh\underline{i'}$$

Huomautus. Edellä on alleviivaamalla korostettu kulloinkin derivoitu tekijä.

Huomautus. Kolmen tekijän tulon derivointisääntöä voi havainnollistaa ajattelemalla suorakulmaisen särmiön tilavuuden kasvunopeutta, kun särmien pituudet kasvavat ajan mukana.

Särmiön tilavuuden hetkellinen muutosnopeus
$\overset{\text{Huom.}}{=}$ särmiön tilavuuden kasvunopeus oikeassa päädyssä
$+$ särmiön tilavuuden kasvunopeus etupäädyssä
$+$ särmiön tilavuuden kasvunopeus yläreunassa.

Tilavuuden kasvunopeus missä tahansa päädyssä on puolestaan päädyn pinta-ala (eli kahden särmän senhetkisen pituuden tulo) kerrottuna kolmannen särmän kasvunopeudella.



Edellisen päättelyn kohdassa $\overset{\text{Huom.}}{=}$ voimme käyttää tarkkaa yhtäsuuruutta, sillä särmiön tilavuuden hetkellistä muutosnopeutta laskettaessa viereisestäkin kuvasta poisjätetyt särmiön kolmen särmän kohdalla olevat kapeat suorakulmaiset särmiöt ja yhdessä nurkassa oleva pieni suorakulmio ovat merkityksettömät kolmeen tahkoon liittyvien levyjen tilavuuksiin verrattuna.

Esimerkki. $D(x^3 \cdot e^x \cdot \sin x) = \underline{3x^2} \cdot e^x \cdot \sin x + x^3 \cdot \underline{e^x} \cdot \sin x + x^3 \cdot e^x \cdot \underline{\cos x}$

Lause. Osamäärän derivaatta =
(osoittajan derivaatta kertaa nimittäjä miinus
osoittaja kertaa nimittäjän derivaatta)
jaettuna nimittäjän neliöllä

eli

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Huomautus. Jos derivoitavan osamäärän osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia, niin yo lauseen mukaan osoittajan kasvaminen ja nimittäjän pieneneminen kasvattavat osamäärä, koska $f'(x)$ on kaavassa plusmerkkisenä ja $g'(x)$ miinusmerkkisenä.

Esimerkki. $D\tan x = D\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{(D\sin x)\cdot\cos x - \sin x \cdot (D\cos x)}{(\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

Ketjusääntö. Yhdistetyn funktion derivaatta =
ulkofunktion derivaatta (sisäfunktion määrittämässä pisteessä)
kertaa sisäfunktion derivaatta

eli

$$D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esimerkki. $D(\underbrace{\sin}_{\text{uf}}(\underbrace{3x}_{\text{sf}})) = \underbrace{\cos(3x)}_{\text{ufd}} \cdot \underbrace{3}_{\text{sfd}} = 3\cos(3x)$

$D((\underbrace{x^2 + x}_{\text{sf}})^{\underbrace{5}_{\text{uf}}}) = \underbrace{5(x^2 + x)^4}_{\text{ufd}} \cdot (\underbrace{2x + 1}_{\text{sfd}})$

$D(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

$D\big(\ln(\sin x)\big) = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \dfrac{1}{\tan x}$

$D\sqrt[3]{x^2 \cdot \sin(2x)} = D\Big((x^2 \cdot \sin(2x))^{\frac{1}{3}}\Big) = \dfrac{1}{3}(x^2 \cdot \sin(2x))^{\frac{1}{3} - 1} \cdot D(x^2 \cdot \sin(2x))$

$= \dfrac{1}{3}\big(x^2 \cdot \sin(2x)\big)^{-\frac{2}{3}} \cdot \big(2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cdot \cos(2x) \cdot 2\big)$

Esimerkki. $$\underbrace{D\ln}_{\text{uf}}(\underbrace{x^2\cdot\sin x}_{\text{sf}}) = \underbrace{\frac{1}{x^2\cdot\sin x}}_{\text{ufd}}\cdot\underbrace{D(x^2\cdot\sin x)}_{\text{sfd}}$$

$$= \frac{1}{x^2\cdot\sin x}\cdot(\underbrace{2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x}_{\text{saatu tulon derivointisäännöllä}})$$

tai helpommin logaritmisääntöjä käyttäen

$$D\ln(x^2\cdot\sin x) = D(2\ln x + \ln\sin x) = 2D\ln x + D(\ln\sin x) = 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

Seuraavassa on vielä yhteenveto tärkeimpien yhdistettyjen funktioiden derivoinnista:

$$D\sin(f(x)) = \cos(f(x))\cdot f'(x)$$
$$D\cos(f(x)) = -\sin(f(x))\cdot f'(x)$$
$$De^{f(x)} = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$
$$D\ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$
$$D\big((f(x))^n\big) = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$$

Huomautus. Ketjusääntöä voidaan soveltaa useammankin kertaiseen yhdistettyyn funktioon.

Esimerkki. Seuraavassa derivoidaan kolminkertaiset yhdistetyt funktiot:

$$D(\sin^3(5x)) = D\Big((\underbrace{\sin(}_{\text{väli-funktio}}\underbrace{5x}_{\text{sisin funktio}})\underbrace{)^3}_{\text{uloin funktio}}\Big) = \underbrace{3\cdot(\sin(5x))^2}_{\text{uloimman funktion derivaatta}}\cdot\underbrace{\cos(5x)}_{\text{välifunktion derivaatta}}\cdot\underbrace{5}_{\text{sisimmän funktion derivaatta}}$$

$$= 15\sin^2(5x)\cos(5x)$$

$$D(e^{\sin(3x)}) = D\big(\underbrace{\exp(}_{\text{uloin funktio}}\underbrace{\sin(}_{\text{väli-funktio}}\underbrace{3x}_{\text{sisin funktio}}))\big) = \underbrace{\exp(\sin(3x))}_{\text{uloimman funktion derivaatta}}\cdot\underbrace{\cos(3x)}_{\text{välifunktion derivaatta}}\cdot\underbrace{3}_{\text{sisimmän funktion derivaatta}} = e^{3x}\cdot\cos(3x)\cdot 3$$

Jälkimmäisessä derivoinnissa on vielä käytetty e-kantaisesta eksponenttifunktiosta e^x merkintää $\exp(x)$, jolloin voidaan käyttää derivointisäännön $D(\sin(x)) = \cos(x)$ kaltaista sääntöä

$$D(\exp(x)) = \exp(x).$$

Harjoitustehtäviä

6.1 Derivoi seuraavat funktiot käsin muuttujan x suhteen ja tarkista laskimella. (Koska laskin saattaa muokata vastauksen toiseen muotoon kuin sinä muokkaat, niin laske tarvittaessa laskimella oman vastauksesi ja laskimen vastauksen erotus. Jos se on nolla, niin vastauksesi on oikea.)

a)	$2x^2 - x^3$	**b)**	$5e^x + 2\ln x$	**c)**	x^2e^x	**d)**	$\sin(5x)$
e)	$2x\ln x$	**f)**	$e^{3x} - 4\ln(5x)$	**g)**	$\ln(6x)$	**h)**	$e^{2x}\sin(3x)$
i)	$xe^{2x} + 1$	**j)**	$e^{3x} - \cos(2x)$	**k)**	$\sin\frac{\pi}{4}$	**l)**	$4e^{3x}\sin(2x)$
m)	$6x - 2e^2$	**n)**	$\sqrt{x^3 + 2x + 1}$	**o)**	$4xe^{3x}$	**p)**	$(x^2 + 3x)^4$
q)	$\sqrt{2}\sin x$	**r)**	$(x + \sin x)^2$	**s)**	$\sin^3 x$	**t)**	$\sqrt[3]{2x+1}$
u)	$\frac{x+2}{2x+1}$	**v)**	$\frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$	**x)**	$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3$	**y)**	$\frac{\cos(5x)}{4}$
z)	$e^3\cos x$	**å)**	$\frac{4}{\sin x}$	**ä)**	$\ln\frac{x}{x^2+1}$	**ö)**	$3\sin(\frac{\pi}{6})e^{2x}$

6.2 Derivoi käsin ja laskimella

a) $\sin^3(2x)$ **b)** $2\cdot\sqrt[3]{\cos(4x)}$ **c)** $3e^{\sin(2x)}$ **d)** $5\cos^4(3x) + 2\sin x$

6.3 Esitä sanallisesti tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion derivointia koskevat säännöt.

6.4 Derivoi säsin laskien kahdella eri tavalla:

1. Suorita ensin merkitty kerto- tai jakolasku ja derivoi vasta sitten.
2. Suorita derivointi ensin tulon tai osamäärän derivointisäännöllä ja sievennä lopuksi.

a) $x^3(2x+3)$ **b)** $\frac{x^6}{x^4}$ **c)** $x^3(x+1)^2$ **d)** $\frac{(x+1)^5}{(x+1)^3}$

6.5 Derivoi merkityn muuttujan suhteen sekä käsin että laskimella laskien

a) $f(t) = 2t^3 + t + 4$ **b)** $g(u) = e^{3u} - 4\sin u$ **c)** $h(v) = 4v^3e^{2v}$

d) $i(\alpha) = 4\sin^3(2\alpha)$ **e)** $j(t) = 4e^{-2t}\sin(3t)$ **f)** $k(s) = (s^2+1)^{10}$

g) $m(\lambda) = 2\lambda^3e^{-4\lambda}\sin(5\lambda)$ **h)** $n(\theta) = 2\sqrt[3]{e^{5\theta}\cos(6\theta)}$

7. KORKEAMMAT DERIVAATAT

Jos funktion $y = y(x)$ derivaattafunktio derivoidaan uudelleen, saadaan ns. **toisen kertaluvun derivaatta**, jota voidaan merkitä esimerkiksi seuraavilla tavoilla

$$y'',\ y''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2y(x)}{dx^2},\ D^2y,\ D^2y(x),\ \ddot{y},\ \ddot{y}(x),\ \ldots$$

Uusilla derivoinneilla saadaan vieläkin korkeampia derivaattoja kuten kolmas, neljäs, … Näistä käytetään esimerkiksi merkintöjä

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = D^3y(x),\ \ y'''' = y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = D^4y(x),\ \ldots$$

Esimerkki. Jos $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, niin

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + 8x + 5 \\ y'' &= 6x + 8 \\ y''' &= 6 \\ y^{(4)} &= y^{(5)} = \ldots = 0 \end{aligned}$$

Huomautus. Edellä olleita derivaattoja voi laskea esimerkiksi sopivaa lausekemallia käyttäen TI-laskimen komennolla

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + 4x^2 + 5x + 6\right)\ \boxed{\hookleftarrow}\ \ 6x + 8$$

tai yksirivisellä syötteellä

$$d(\underbrace{x\text{^}3 + 4x\text{^}2 + 5x + 6}_{\text{lauseke}},\ \underbrace{x}_{\text{muuttuja}},\ \underbrace{3}_{\text{kertaluku}})\ \boxed{\hookleftarrow}\ \ 6,$$

missä d on valikoista löytyvä derivaattaoperaattori, jonka viimeisenä parametrina on derivaatan kertalukua osoittava luku.

Esimerkki. Jos $y = \sin x$, niin sen derivaatat toistuvat neljän jaksoissa: $\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x, -\sin x, \ldots$ Yleisesti

$$D^n \sin x = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } n = 4k \\ \cos x, & \text{kun } n = 4k+1 \\ -\sin x, & \text{kun } n = 4k+2 \\ -\cos x, & \text{kun } n = 4k+3 \end{cases},\ \text{ missä } k = 0,1,2,\ldots$$

Laskinsyötteestä $d(\sin x, x, 21)$ saadaan tulos $\cos x$, sillä $21 = 4 \cdot 5 + 1$.

Huomautus. $y^{(0)}(x) = y(x)$

Huomautus. TI-laskimessa voi käyttää myös negatiivista derivaatan kertaluvun n arvoa. Se edustaa "antiderivointia", jolloin operaation kohteena olevaa funktioita ei derivoidakaan, vaan haetaan funktiota, jonka $|n|$. derivaatta on operaation kohteena oleva funktio. Ensimmäisen kertaluvun antiderivaatta vastaa itse asiassa myöhemmin käsiteltävää integraalifunktiota.

Harjoitustehtäviä

7.1 Laske käsin ja laskimella seuraavien funktioiden kolmas derivaatta:

v) $f(x)=\sin(2x)$, $g(x)=x^4+x^3$, $h(x)=\dfrac{1}{x}$, $i(x)=\sqrt{x}$, $j(x)=\sum_{k=0}^{4} k\cdot x^k$

a) $f(x)=e^{x^2} \overset{\text{selvemmin}}{=} e^{(x^2)}$, $g(x)=x\cdot\sin(2x)$, $h(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $i(x)=\sqrt[3]{x^2}$

7.2 Laske (tai päättele) ilman laskinta ja laske sitten laskimella

v1) funktion $f(x)=\cos(2x)$ viides derivaatta

v2) funktion $g(x)=x\cdot e^{2x}$ neljäs derivaatta

v3) $h^{(4)}(x)$ ja $h^{(4)}(0)$, kun $h(x)=x\cdot\sin x$. Huomaa, että merkintä $h^{(4)}(0)$ tarkoittaa funktion $h(x)$ neljännen derivaatan arvoa kohdassa $x=0$.

a) funktion $f(t)=\sin(2t)$ kymmenes derivaatta

b) funktion $g(x)=x^{40}+x^{39}+x^{38}+\ldots+x^2+x+1$ 40. derivaatta

c) $h^{(4)}(x)$ ja $h^{(4)}(0)$, kun $h(x)=x\cdot e^{-x}$.

8. OSITTAISDERIVAATAT

Määritelmä. Kahden muuttujan funktion $z = z(x, y)$ **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen määritellään x-suuntaisessa siirtymässä lasketun erotusosamäärän raja-arvona, kun $\Delta x \to 0$ ja toinen muuttuja y on vakio:

$$z'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}.$$

Vastaavasti funktion z osittaisderivaatta muuttujan y suhteen on

$$z'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}.$$

Huomautus. Kahden tai useammankin muuttujan funktion osittaisderivaatat lasketaan tutuin derivointisäännöin aina tietyn muuttujan suhteen **pitäen muut muuttujat vakioina**.

Esimerkki. Jos funktio $z = 4x^3y^2$ derivoidaan x:n suhteen pitäen toinen muuttuja y vakiona, niin saadaan eri tavoin merkittävissä oleva funktion z osittaisderivaatta muuttujan x suhteen (alla lukuohjeita)

$$\underbrace{z'_x}_{\substack{z \text{ pilkku} \\ x\text{:n suhteen}}} = \underbrace{z_y}_{\substack{\text{zetan derivaatta} \\ y\text{:n suhteen}}} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{\text{doo } z \text{ doo } x} = \underbrace{D_x z}_{\substack{\text{Derivaatta } x\text{:n} \\ \text{suhteen zetasta}}} = \underbrace{D_x(4x^3y^2)}_{\substack{\text{Derivaatta } x\text{:n suhteen} \\ \text{lausekkeesta } 4x^3y^2}} = 4 \cdot 3x^2 \cdot y^2 = 12x^2y.$$

Vastaavasti tekijä $4x^3$ on vakiotekijä derivoitaessa z muuttujan y suhteen:

$$z'_y = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y z = D_y(4x^3y^2) = 4x^3 \cdot 2y = 8x^3y.$$

TI-laskimessa ei ole omaa lausekemallia osittaisderivaatan laskemiseksi, mutta pienestä "kauneusvirheestä" välittämättä osittaisderivaatan voi hyvin laskea käyttäen tavallisen derivaatan lausekemallia. Niinpä esimerkiksi

$$\frac{d}{dy}(4x^3y^2) \;\boxed{\hookleftarrow}\; 8x^3y \;.$$

Osittaisderivaatan yhteydessä on vain perinteellisesti käytetty d-kirjaimen asemasta doo-kirjainta ∂ korostamaan sitä, että derivoitava funktio on usean muuttujan funktio, vaikkakin se derivoidaan vain tietyn muuttujan suhteen. Syötteen voi myös kirjoittaa tuttuun tapaan yksirivisenä käyttäen apuna derivaattaoperaattoria d seuraavasti

$$d(4\,x\text{^}3\,y\text{^}2, y) \;\boxed{\hookleftarrow}\; 8x^3y$$

Huomautus. Osittaisderivaatat kuvaavat funktion paikallista (hetkellistä) muutosnopeutta sen muuttujan suunnassa (suhteen), jonka suhteen derivaatta on laskettu.

Esimerkki. Jos löylyhuoneen lämpötila Celsiusasteina on

$$t = t(x, y, z) = 10 + x^2 z + 2y^2 z + 4z^3 \ ,$$

kun $0 \le x, y, z \le 2.5$ (yksikkönä metri), niin kyseisillä arvoilla

$$t'_x = 2xz \ , \ t'_y = 4yz \ , \ t'_z = x^2 + 2y^2 + 12z^2 .$$

Koska $t'_z(0, 1, 2) = 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 2^2 = 50$, niin edellisen huomautuksen mukaan lämpötilan paikallinen muutosnopeus pisteessä (0,1,2) positiivisen z-akselin suuntaan edettäessä on 50 Celsiusastetta metriä kohden.

Lyhyessä z-akselin suuntaisessa siirtymässä pisteestä (0, 1, 2) pisteeseen (0, 1, 2.01) esimerkin lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus onkin

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t(0,1,2.01) - t(0,1,2)}{2.01 - 2}$$

$$= \frac{(10 + 0^2 \cdot 2.01 + 2 \cdot 1^2 \cdot 2.01 + 4 \cdot 2.01^3) - (10 + 0^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 \cdot 2 + 4 \cdot 2^3)}{0.01} = 50.2404 \approx 50$$

Lämpötilan paikallisen muutosnopeuden raja-arvoksi samassa pisteessä (0,1,2) positiivisen z-akselin suuntaan edettäessä saadaan 50 TI-komennoilla

$$\text{Define } t(x,y,z) = 10 + x^2 z + 2y^2 z + 4z^3 \ : \ \lim_{\Delta z \to 0^+} \frac{t(0,1,2+\Delta z) - t(0,1,2)}{\Delta z} \ \boxed{\hookleftarrow} \ 50$$

Suoritetut lisätarkastelut tukevat huomautustamme, jonka mukaan osittaisderivaatta t'_z kuvaa funktion t paikallista muutosnopeutta z-akselin suunnassa.

Huomautus. Funktion kasvunopeus haluttuun koordinaattiakselien väliseen suuntaan voidaan laskea ns. **suunnatun derivaatan** avulla, jota ei kuitenkaan käsitellä tässä opuksessa.

Huomautus. Osittaisderivaatta voidaan derivoida uudelleen joko saman tai jonkin toisen muuttujan suhteen. Esimerkiksi funktion $z = f(x, y)$ osittaisderivaatasta $z'_x = f'_x(x, y)$ saadaan kaksi toisen kertaluvun osittaisderivaattaa. Toinen saadaan derivoimalla z'_x muuttujan x suhteen ja toinen derivoimalla z'_x muuttujan y suhteen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \overset{\text{merk.}}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = z_{xx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \overset{\text{merk.}}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = z_{xy}$$

Samoin osittaisderivaatasta z'_y saadaan toisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \overset{\text{merk.}}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = z_{yx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \overset{\text{merk.}}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = z_{yy}$$

Huomaa erityisesti, että osittaisderivaatan kaikissa merkintätavoissa on funktion tunnusta lähinnä aina se muuttuja, jonka suhteen ensin derivoidaan.

Esimerkki. Jos $T = x^2y^3z^4$, niin

$$T'_x = 2xy^3z^4 \quad , \quad T'_y = 3x^2y^2z^4 \quad , \quad T'_z = 4x^2y^3z^3$$
$$T''_{xx} = 2y^3z^4 \quad , \quad T''_{yx} = 6xy^2z^4 \quad , \quad T''_{zx} = 8xy^3z^3$$
$$T''_{xy} = 6xy^2z^4 \quad , \quad T''_{yy} = 6x^2yz^4 \quad , \quad T''_{zy} = 12x^2y^2z^3$$
$$T''_{xz} = 8xy^3z^3 \quad , \quad T''_{yz} = 12x^2y^2z^3 \quad , \quad T''_{zz} = 12x^2y^3z^2$$

Huomautus. Edellisessä esimerkissä ns. ”sekaderivaatta” on derivoimisjärjestyksestä riippumaton. Tulos on yleisestikin voimassa kaikille käytännössä vastaantuleville funktioille. Niinpä esimerkiksi

$$T''''_{xxyz} = T''''_{xxzy} = T''''_{xyxz} = T''''_{xyzx} = T''''_{xzyx} = T''''_{yxxz} = T''''_{yzxx} = \ldots$$

ts. kaikki ne neljännen kertaluvun osittaisderivaatat, jotka on saatu samasta funktiosta T suorittamalla kaksi derivointia muuttujan x suhteen ja yksi derivointi sekä muuttujan y että muuttujan z suhteen, ovat keskenään yhtä suuria riippumatta derivointien suoritusjärjestyksestä.

Harjoitustehtäviä

8.1 Laske funktion $z = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2$ kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.
Mitä voit sanoa korkeammista osittaisderivaatoista?

8.2 Minkä akselin suunnassa funktio $T = 2x^2y^3z^4$ kasvaa paikallisesti nopeimmin pisteessä **v)** (5, 4, 3) **a)** (1, 2, 3) ?

8.3 Tarkastellaan funktiota $w = x^2y^3z + 3x + 2y + z$. Arvioi sopivaa osittaisderivaattaa käyttäen:
v) Kuinka paljon pisteestä $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ on siirryttävä positiivisen x-akselin suuntaan, jotta funktio kasvaisi määrän $\Delta w = 2.8 \cdot 10^{-3}$? Ratkaise myös siirtymän tarkempi arvo sopivasta yhtälöstä.
a) Kuinka paljon funktio w muuttuu siirryttäessä pisteestä $(x, y, z) = (4, 3, 2)$ positiivisen x-akselin suuntaan määrä $\Delta x = 1.2 \cdot 10^{-13}$?
b) Kuinka paljon pisteestä $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ on siirryttävä positiivisen y-akselin suuntaan, jotta funktio kasvaisi määrän $\Delta w = 2.1 \cdot 10^{-14}$?

8.4 Tarkastellaan ajan ja paikan funktiota $P(t, x, y, z) = t^3xy^3z + tx^2y$.
Totea laskemalla, että $P(1, 2, 3, 4) = 228$.
v) Laske $P'_t(1, 2, 3, 4)$ ja arvioi se hetki t, jolloin $P(t, 2, 3, 4) = 250$.
a) Laske $P'_x(1, 2, 3, 4)$ ja arvioi se kohta x, missä $P(1, x, 3, 4) = 240$.
b) Laske $P'_y(1, 2, 3, 4)$ ja arvioi se kohta y, missä $P(1, 2, y, 4) = 220$.

9. DERIVAATAN SOVELLUKSIA

Kaikki ne hetkellistä (tai paikallista) muutosnopeutta kuvaavat suureet, jotka saadaan keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona välin pituuden lähestyessä nollaa, saadaan yksinkertaisemmin määritettyä derivoimalla, sillä derivaattahan on määritelty juuri tällaiseksi raja-arvoksi.

9.1 Fysikaalisia sovelluksia

Nopeus on aseman derivaatta $v = \frac{dx}{dt}$ ja $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ja samalla aseman toinen derivaatta

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ja} \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Teho on tehdyn työn derivaatta $P = \frac{dW}{dt}$.

Sähkövirta on siirtyneen varauksen derivaatta $i = \frac{dq}{dt}$.

Tilavuusvirta on siirtyneen nestetilavuuden derivaatta $q = \dot{V} = \frac{dV}{dt}$.

Huomautus. Annetun fysikaalisen suureen toinen derivaatta edustaa alkuperäisen suureen ensimmäisen derivaatan (eli alkuperäisen suureen muuttumisnopeuden) muuttumisnopeutta (eli alkuperäisen suureen jonkinlaista kiihtyvyyttä).

Esimerkki. Tutki virranvoimakkuuden muuttumista, jos johtimen poikkipinnan läpi aikavälillä $[0, t]$ siirtynyt varaus on

$$q = q(t) = 2500(1 - e^{-t/500}), \text{ kun } t > 0.$$

Virranvoimakkuus saadaan siirtyneen varauksen derivaattana

$$i = i(t) = \frac{dq}{dt} = 2500(0 - e^{-t/500} \cdot \frac{-1}{500}) = 5e^{-t/500}.$$

Silloin virran muuttumisnopeus

$$\frac{di}{dt} = 5e^{-t/500} \cdot \frac{-1}{500} = -\frac{e^{-t/500}}{100} < 0$$

kaikilla kyseeseen tulevilla t:n arvoilla ts. virta on aluksi suurimmillaan ja pienenee sitten jatkuvasti.

Esimerkki. Jos kappaleen asema on ajan funktiona

$$x = x(t) = 3t^2,$$

niin kappaleen nopeus on

$$v = v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t$$

ja kiihtyvyys

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6.$$

Kyseinen kappale liikkuu siis vakiokiihtyvyydellä.

Esimerkki. Tiedetään, että poliisia karkuun juokseva rosvo lisää nopeuttaan, jos ja vain jos poliisi saavuttaa häntä, ja rosvo hidastaa vauhtiaan voimia säästääkseen, jos ja vain jos poliisi on jäämässä jälkeen. Lisäksi tiedetään, että rosvon asema on ajan funktiona

$$x = x(t) = 6t + 2\cos(0.05t) \text{ , kun } t \geq 0.$$

a) Määritä rosvon nopeus hetkellä $t = 50$.

b) Saavuttaako poliisi rosvoa hetkellä $t = 50$?

c) Milloin rosvo ja poliisi ensi kertaa juoksevat yhtä nopeasti?

a) Koska

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 6 + 2(-\sin(0.05t)\cdot 0.05) = 6 - 0.1\sin(0.05t),$$

niin radiaanimoodissa

$$v(50) = 6 - 0.1\cdot\sin(0.05\cdot 50) = 5.94.$$

b) Koska

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 - 0.1\cos(0.05t)\cdot 0.05 = -0.005\cos(0.05t),$$

niin

$$a(50) = 0 - 0.005\cos(0.05\cdot 50) = 0.004 > 0,$$

joten rosvo lisää vauhtiaan ja poliisi on saavuttamassa häntä.

c) Rosvo ja poliisi juoksevat yhtä nopeasti

$\Leftrightarrow$ poliisi ei saavuta rosvoa eikä jää jälkeen

$\Leftrightarrow$ rosvo ei lisää eikä vähennä vauhtiaan

$\Leftrightarrow$ rosvon kiihtyvyys $= 0$

$\Leftrightarrow$ $-0.005\cos(0.05t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $0.05t = \pi/2 + n\cdot\pi$

$\Leftrightarrow$ $t = (10 + 20n)\pi$

Niinpä rosvo ja poliisi juoksevat ensi kertaa yhtä nopeasti, kun $n = 0$, jolloin

$$t = 10\pi = 31.4$$

Esimerkki. Määritä kappaleen vauhti hetkellä $t=3$, jos kappaleen paikkavektori $\bar{r}=\bar{r}(t)=[t^3, 3t^2, 4t]$.

Kappaleen nopeusvektori on paikkavektorin derivaatta $\bar{v}(t)=\dfrac{d\bar{r}(t)}{dt}=[3t^2, 6t, 4]$.

Hetkellä $t=3$ nopeusvektori on $\bar{v}(3)=[3\cdot 3^2, 6\cdot 3, 4]=[27, 18, 4]$ ja tällöin kappaleen vauhti saadaan nopeuden "pituutena" ts. $v(3)=\sqrt{27^2+18^2+4^2}\approx 32.7$.

Joissakin apuvälineissä vektorin pituus lasketaan itseisarvofunktiolla abs, mutta TI-laskimessa on käytettävä normifunktiota norm. Sopivassa TI-laskimen syötteessä voi hyödyntää with-operaattoria seuraavasti

$$\mathrm{norm}\left(\frac{d}{dt}\left(\left[t^3, 3t^2, 4t\right]\right)\right)\Bigg|\ t=3 \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 32.7$$

9.2 Käyrän tangentti ja normaali

Koska käyrän $y=f(x)$ pisteeseen (x_0, y_0) asetetun tangentin kulmakerroin on $f'(x_0)$, niin kyseisen tangentin yhtälö on

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Koska käyrän normaali on kohtisuorassa samaan pisteeseen asetettua tangenttia vastaan, niin normaalin ja tangentin kulmakertoimien tulo on -1. Käyrän $y=f(x)$ pisteeseen (x_0, y_0) asetetun normaalin kulmakerroin on siis $-1/f'(x_0)$ ja normaalin yhtälö on

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Esimerkki. Määritetään paraabelin $y=3x^2$ pisteeseen (1, 3) asetetun tangentin ja normaalin yhtälöt.

Koska $y'(x)=6x$, niin tangentin ja normaalin kulmakertoimet ovat

$$k_{\text{tan}}=y'(1)=6 \qquad \text{ja} \qquad k_{\text{norm}}=\frac{-1}{k_{\text{tan}}}=-\frac{1}{6}.$$

Pisteeseen (1,3) asetetun tangentin yhtälö on siis

$$y-3=6\cdot(x-1) \overset{\text{Sievennettynä}}{\Leftrightarrow} y=6x-3$$

ja normaalin yhtälö on

$$y-3=-\frac{1}{6}\cdot(x-1) \overset{\text{Sievennettynä}}{\Leftrightarrow} y=-\frac{x}{6}+\frac{19}{6}.$$

Esimerkki. Määritetään pisteestä (1,0) paraabelille $y = 3x^2$ piirretyn **a)** tangentin ja **b)** normaalin yhtälö.

a) Koska paraabelin mielivaltaiseen pisteeseen $(x_0, 3x_0^2)$ asetetun tangentin kulmakerroin on $y'(x_0) = 6x_0$, niin kyseisen tangentin yhtälö on

$$y - 3x_0^2 = 6x_0(x - x_0) \ .$$

Jotta tangentti kulkisi pisteen (1,0) kautta pitää olla

$$0 - 3x_0^2 = 6x_0(1 - x_0) \,.$$

Tästä vaillinaisesta toisen asteen yhtälöstä saadaan (vaikkapa laskimella)

$$x_0 = 0 \quad \text{tai} \quad x_0 = 2 \ ,$$

joten sopivia tangentteja onkin kaksi ja niiden sievennetyt yhtälöt ovat

$$y = 0 \quad \text{ja} \quad y = 12x - 12 \ .$$

b) Koska paraabelin mielivaltaiseen pisteeseen $(x_0, 3x_0^2)$ asetetun normaalin kulmakerroin on $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = -\dfrac{1}{6x_0}$, niin kyseisen normaalin yhtälö on

$$y - 3x_0^2 = -\frac{1}{6x_0}(x - x_0) \ .$$

Jotta normaali kulkisi pisteen (1,0) kautta pitää olla

$$0 - 3x_0^2 = -\frac{1}{6x_0}(1 - x_0) \,.$$

Tämän (kolmannen asteen yhtälöksi sievenevän) yhtälön ainoa reaalijuuri $x_0 = 1/3$ löydetään mukavimmin laskimella. Normaalin yhtälöksi saadaan sitten sijoittamalla ja sieventämällä

$$y = -0.5x + 0.5$$

Harjoitustehtäviä

9.1 Määritä kappaleen nopeus ja kiihtyvyys hetkellä t, kun

v) x-akselilla liikkuvan kappaleen asema on

$$x = x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot b \cdot t^3$$

a) pystysuorassa heittoliikkeessä kappaleen korkeusasema on

$$h = h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

missä $x_0, v_0, a_0, b, h_0, v_0$ ja g ovat vakioita.

9.2 Määritä koneen teho hetkellä $t = 7$, jos koneen aikavälillä $[0, t]$ tekemä työ on **v)** $W = W(t) = 2000t - 1000\sin(t/10)$

a) $W = W(t) = 500t - 400\sin(t/20)$

9.3 Määritä kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektorit, kun sen paikkavektori on

v) $\bar{r} = \bar{r}(t) = [2t ,\ 3t^2 ,\ 4t^3]$ **a)** $\bar{r} = \bar{r}(t) = [4 - e^{-2t} ,\ 5e^{-t}\sin(6t) ,\ 7\sqrt{2}]$.

9.4 Olkoon astiassa olevan nesteen tilavuus

v) $V = V(t) = \begin{cases} 900t - 3t^3 \text{, kun } 0 \le t \le 10\sqrt{3} \\ 0 \text{, muulloin} \end{cases}$

a) $V = V(t) = \begin{cases} 800t - 2t^3 \text{, kun } 0 \le t \le 20 \\ 0 \text{, muulloin} \end{cases}$.

Määritä astiassa olevan nesteen tilavuus hetkillä $t = 5$, 10 ja 15. Laske samoina hetkinä myös tilavuusvirran arvot ja arvioi niitä käyttäen astiassa olevan nesteen tilavuus hetkillä $t = 5.3$, 10.2 ja 15.1 olettaen, että tilavuusvirta ei muutu lyhyenä aikana. Suorita laskusi ylitarkasti.

9.5 Laske virranvoimakkuus hetkellä $t > 0$, jos johtimen läpi aikavälillä $[0, t]$ kulkenut varaus on $q = q(t) = 5 - 2e^{-3t} - 3e^{-2t}$. Osoita, että virranvoimakkuus vähenee aina, kun $t > 0$.

9.6 Määritä käyrän $y = 6\sin(2x)$ pisteeseen $(\pi/12, 3)$ asetetun tangentin ja normaalin yhtälöt. Piirrä lopuksi laskimella kuva kaikista näistä viivoista.

9.7 Määritä **v)** pisteestä (6, 1) paraabelille $y = x^2$

a) pisteestä (2, 5) käyrälle $y = 2x^3$

asetettujen tangenttien ja normaalien kulmakertoimet.

9.8 Ratkaise edellä ollut rosvon pakenemista koskeva monisteen esimerkki siinä tapauksessa, jossa rosvon asema on

v) $x = x(t) = 7t - 2\cos(0.1t)$ **a)** $x = x(t) = 6t + \sin(0.15t + 10)$.

10. KUVAAJAN TUTKIMINEN

10.1 Funktion kasvaminen ja väheneminen

Määritelmiä. Sanomme, että funktio $f(x)$ on **kasvava** jollakin välillä, jos tämän välin kaikille pisteille x_1 ja x_2 on voimassa

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2).$$

Vastaavasti **vähenevä** funktio toteuttaa ehdon

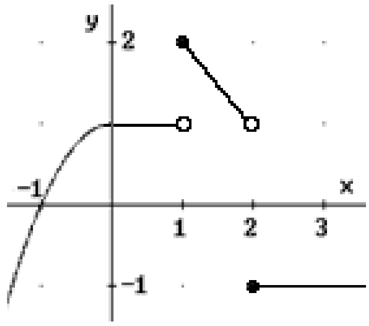
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2).$$

Funktiota sanotaan **aidosti kasvavaksi** tai **aidosti väheneväksi**, jos on voimassa vahvempi ehto

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{tai} \qquad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2),$$

missä funktion arvo ei voi säilyä vakiona millään osavälilläkään.

Esimerkki. Funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+1\ , \text{ kun } x<0 \\ 1\ , \quad \text{kun } 0 \le x < 1 \\ 3-x, \text{ kun } 1 \le x < 2 \\ -1\ , \quad \text{kun } x \ge 2 \end{cases}$ on

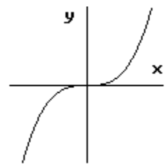


- kasvava väleillä $]-\infty,1]$ ja $[2,\infty[$
- aidosti kasvava välillä $]-\infty,0]$
- vähenevä väleillä $[0,1[$ ja $[1,\infty[$
- aidosti vähenevä välillä $[1,2]$.

Koska derivaatta kuvaa funktion paikallista kasvunopeutta, niin on voimassa

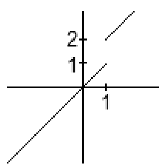
Lause. Funktio $f(x)$ on tarkasteluvälillä
- kasvava, jos $f'(x) \ge 0$ tällä välillä
- vähenevä, jos $f'(x) \le 0$ tällä välillä
- aidosti kasvava, jos $f'(x) > 0$ tällä välillä
- aidosti vähenevä, jos $f'(x) < 0$ tällä välillä

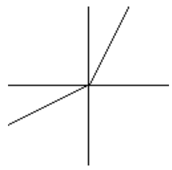
Huomautus. Funktio voi olla jollakin välillä aidosti kasvava (tai aidosti vähenevä), vaikka tällä välillä olisi erillisiä yksittäisiä pisteitä, joissa



- derivaatta on nolla (kuvaajalla on ns. terassipiste, esimerkkinä funktio $f(x) = x^3$)
- derivaatta ei ole olemassa (kuvaaja katkeaa tai siinä on kärki, esim. funktiot

$$g(x) = \begin{cases} x\,, \text{ jos } x \le 1 \\ x+1 \text{ muulloin} \end{cases} \text{ ja } \; h(x) = \begin{cases} x/2\,, \text{ jos } x \le 0 \\ 2x \text{ muulloin} \end{cases} \;)$$



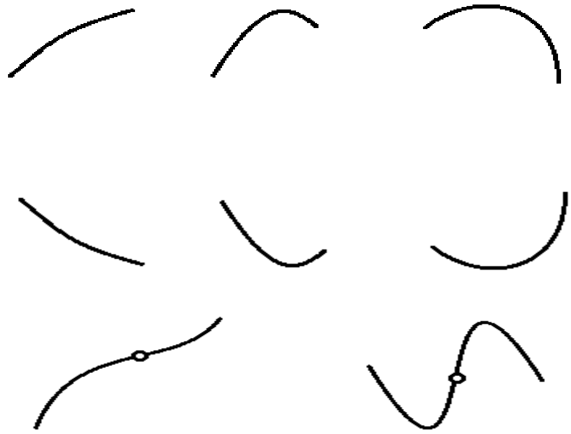


10.2 Kuperuus ja käännepisteet

Määritelmiä. Funktiota sanotaan **ylöspäin kuperaksi** jollakin välillä, jos funktion kuvaaja kyseisellä välillä ”kaartuu alaspäin”.

Alaspäin kuperan funktion kuvaaja ”kaartuu ylöspäin”.

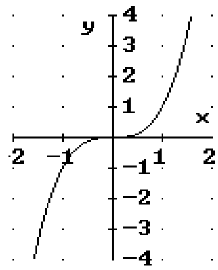
Pistettä, jossa funktion kuperuuden suunta muuttuu, sanotaan funktion **käännepisteeksi**.



Esimerkki. Viereisen kuvan mukainen funktio $f(x)=x^3$ on

- ylöspäin kupera välillä $]-\infty, 0]$
- alaspäin kupera välillä $[0, \infty[$.

Kuvan funktiolla on käännepiste origossa.



Lause. Funktio $f(x)$ on ylöspäin kupera, kun $f''(x)<0$.
Funktio $f(x)$ on alaspäin kupera, kun $f''(x)>0$.

Perustelu. Jos $f''(x)<0$, niin oikealle siirryttäessä derivaatta $f'(x)$ (ja samalla käyrän tangentin kulmakerroin) vähenee, jolloin funktion kuvaaja ”kaartuu alaspäin” eli kuvaaja on ylöspäin kupera.

Jos $f''(x)>0$, niin oikealle siirryttäessä derivaatta $f'(x)$ (ja samalla käyrän tangentin kulmakerroin) kasvaa, jolloin funktion kuvaaja ”kaartuu ylöspäin” eli funktio on alaspäin kupera.

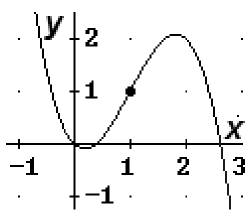
Lause. Funktion $f(x)$ käännepisteet löydetään niiden arvojen joukosta, joissa

$$f''(x)=0 \text{ tai } f''(x) \text{ ei ole olemassa.}$$

Esimerkki. Käyrän $y=-x^3+3x^2-x$ käännepisteessä

$$y''=-6x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1.$$

Koska toinen derivaatta muuttaa merkkinsä, niin kyseessä on todella käännepiste $(1, 1)$.



10.3 Paikalliset ääriarvot

Määritelmä. Piste x_0 on funktion $f(x)$

- (**paikallinen) maksimikohta**, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 sisältävä avoin väli, jolla funktio $f(x)$ ei saa suurempaa arvoa kuin $f(x_0)$.
- (**paikallinen) minimikohta**, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 sisältävä avoin väli, jolla funktio $f(x)$ ei saa pienempää arvoa kuin $f(x_0)$.

(Paikallisia) maksimi- ja minimikohtia sanotaan yhteisnimellä **(paikallisiksi) ääriarvokohdiksi**.

Funktion arvoja paikallisissa ääriarvokohdissa sanotaan niiden laadusta riippuen **(paikallisiksi) maksimi- ja minimiarvoiksi** tai tarkemmin erittelemättä (paikallisiksi) **ääriarvoiksi**.

Määritelmä. Funktion **suurin (pienin) arvo** tarkoittaa funktion saamista arvoista suurinta (pienintä), jos sellainen (tai sellaisia) on olemassa.

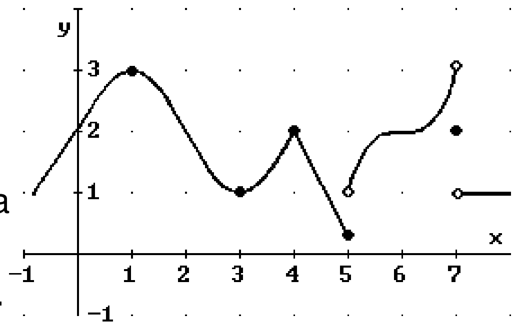
Esimerkki. Funktion $f(x) = \sin x$ suurin arvo on 1 ja pienin arvo -1, jotka molemmat sinifunktio saa äärettömän monta kertaa.

Funktiolla $f(x) = x^2$ on pienin arvo 0, mutta ei suurinta arvoa, sillä jokaista funktion saamaa arvoa kohden löytyy vieläkin suurempia funktion arvoja.

Puoliavoimella välillä]1,2] funktion $f(x) = x^2$ suurin arvo on 4, mutta pienintä arvoa ei ole, sillä ykkönen ei ole tämän funktion arvo ko välillä ja jokaista funktion saamaa arvoa kohden löytyy vieläkin pienempiä tämän funktion arvoja.

Vakiofunktion $f(x) \equiv 1$ suurin ja pienin arvo on 1, jotka funktio saa äärettömän monta kertaa eikä funktio saakaan mitään muita arvoja.

Esimerkki. Kuvan funktiolla on paikalliset ääriarvot kohdissa $x = 1$ ja 3, joissa funktion derivaatta on 0, sekä kohdissa $x = 4$ ja 5, joissa derivaatta ei ole edes olemassa. Funktiolla ei kuitenkaan ole lokaalia ääriarvoa kohdissa $x = 6$ ja 7, vaikka niissäkin derivaatta on nolla tai derivaatta ei ole olemassa.



Edellisen esimerkin havainto voidaan ilmeisesti yleistää seuraavaan muotoon:

Lause. Funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvot löydetään niiden arvojen x joukosta, joissa $f'(x) = 0$ tai $f'(x)$ ei ole olemassa.

Määritelmä. Niitä pisteitä, joissa funktion derivaatta on nolla, sanotaan funktion **kriittisiksi pisteiksi**. Niitä pisteitä, joissa funktiolla ei ole derivaattaa, sanotaan funktion **singulaaripisteiksi**.

Varmuus ääriarvon olemassaolosta ja laadusta kriittisessä pisteessä saadaan seuraavilla lauseilla.

Lause. Jos $f'(x_0) = 0$ ja kohtaa x_0 ohitettaessa derivaatta $f'(x)$ muuttaa merkkinsä
- positiivisesta negatiiviseksi, niin x_0 on funktion paikallinen maksimikohta
- negatiivisesta positiiviseksi, niin x_0 on funktion paikallinen minimikohta.

Jos derivaatta ei muuta merkkiään, niin x_0 ei ole paikallinen ääriarvokohta.

Lause. Jos $f'(x_0) = 0$ ja
- $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on funktion maksimikohta
- $f''(x_0) > 0$, niin x_0 on funktion minimikohta
- $f''(x_0) = 0$, niin kysymys ääriarvon olemassaolosta ja laadusta jää tällä kriteerillä selvittämättä.

Ääriarvon olemassaoloa ja laatua singulaaripisteessä voidaan selvittää tarkastelemalla funktion arvoa kyseisessä pisteessä ja sen ympäristössä.

Esimerkki. Etsitään funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ paikalliset ääriarvot.

Mahdollisia ääriarvokohtia ovat ne, joissa funktion derivaatta on nolla (tai ei olisi olemassa, mikä ei nyt kuitenkaan tule kyseeseen):

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 1 \\ 0 \text{ (kaksinkertainen juuri)} \end{cases}.$$

Koska $f''(x) = 36x^2 - 24x$, niin $f''(1) = 12 > 0$, joten kohdassa $x = 1$ on paikallinen minimikohta.

Koska $f''(0) = 0$, niin ääriarvon olemassaoloa ja laatua kohdassa $x = 0$ ei voida selvittää funktion toisen derivaatan avulla.

Ensimmäisen derivaatan $f'(x) = 12x^2(x-1)$ merkkiä voidaan tutkia tekijöiden merkkien avulla viereisen taulukon mukaisesti. Taulukon avulla nähdään, että kohdassa $x = 0$ ei ole ääriarvoa vaan terassipiste.

		0		1	
12	+		+		+
x^2	+	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	↘		↘		↗

Kohdassa $x = 1$ on paikallinen minimikohta kuten jo toisen derivaatan avulla nähtiin.

Huomautus. Koska n. asteen polynomin derivaatta on astetta $n-1$ oleva polynomi, niin algebran peruslauseen mukaan derivaattapolynomilla on enintään $n-1$ erisuurta reaalista nollakohtaa. Näin ollen n. asteen polynomilla voi olla enintään $n-1$ paikallista ääriarvoa.

Ajattelemalla paritonta astetta olevan polynomin pääpiirteistä kulkua (joko vasemmalta alhaalta oikealle ylös tai vasemmalta ylhäältä oikealle alas riippuen johtavan termin merkistä) on selvää, että paritonta astetta olevalla polynomilla on 0, 2, 4, … tai $n-1$ paikallista ääriarvoa.

Vastaavasti parillista astetta olevalla polynomilla (joka kulkee joko vasemmalta ylhäältä oikealle ylös tai vasemmalta alhaalta oikealle alas) on 1, 3, 5, … tai $n-1$ paikallista ääriarvoa.

10.4 Asymtootit

Funktion kuvaajan piirtämistä voi usein helpottaa käyttäen apuna helpommin piirrettäviä viivoja eli ns. asymptootteja.

Määritelmä. Käyrän **asymptootti** tarkoittaa sellaista tutkittavaa käyrää yksinkertaisempaa käyrää, jota tutkittava käyrä rajatta lähestyy, kun ainakin toinen muuttujista x ja y lähestyy plus- tai miinusääretöntä.

Kahden polynomin osamäärää sanotaan **rationaaliseksi murtofunktioksi** (tai rationaalifunktioksi). Sen asymptootit löydetään seuraavalla lauseella.

Lause. Supistetussa muodossa olevan rationaalisen murtofunktion $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit löydetään kahdessa vaiheessa seuraavasti:

1) Nimittäjän jokaista nollakohtaa x_i vastaa pystyasymptootti $x=x_i$.

2) Suorittamalla jakolasku $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ saadaan vaillinaisen osamäärän lausekkeesta $R(x)$ murtofunktion asymptootti $y=R(x)$.

Rationaalifunktion kohdan 2) mukaisen asymptootin luonne selviää seuraavasta huomautuksesta ilman jakolaskun yksityiskohtaistakin suorittamista:

Huomautus. Olkoon rationaalisen murtofunktion

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_m x^m + ... + p_1 x + p_0}{q_n x^n + ... + q_1 x + q_0}$$

osoittajan aste m ja nimittäjän aste n.

Jos osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä (ts. $m < n$), niin funktiolla on asymptoottina x-akseli.

Jos osoittajan aste = nimittäjän aste (ts. $m = n$), niin funktiolla on asymptoottina vaakasuora suora, jonka yhtälö on

$$y = \frac{p_m}{q_n} = \text{johtavien kertoimien suhde}.$$

Jos osoittajan aste = nimittäjän aste plus 1 (ts. $m = n + 1$), niin asymptoottina on vino suora, jonka kulmakerroin

$$k = \frac{p_m}{q_n} = \text{johtavien kertoimien suhde}.$$

Jos osoittajan aste on suurempi kuin nimittäjän aste plus 1 (ts. $m > n + 1$), niin käyräviivaisena asymptoottina on astetta $m - n$ oleva polynomi, jonka johtavan termin kerroin on

$$\frac{p_m}{q_n} = \text{johtavien kertoimien suhde}.$$

Esimerkki. Piirretään funktion $y = \dfrac{2}{x-1}$ kuvaajaa hyödyntäen muutamaa varsin helposti todettavaa ominaisuutta.

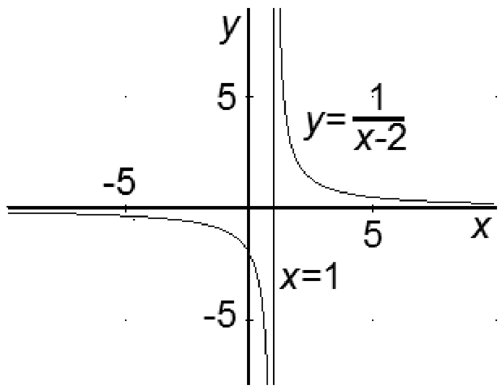
Rationaalifunktion nimittäjän nollakohtaa $x = 1$ vastaa pystyasymptootti.

Koska $y' = D\left(2(x-1)^{-1}\right) = 2 \cdot (-1)(x-1)^{-2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ aina, kun $x \neq 1$, niin funktio on vähenevä molemmilla osaväleillä $(-\infty, 1)$ ja $(1, \infty)$.

Koska murtolausekkeen osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä, niin murtofunktion asymptoottina on x-akseli.

Lasketaan vielä pari funktion arvoa $y(0) = -2$ ja $y(2) = 2$.

Funktion kuvaaja onkin nyt helppo piirtää asymptoottiensa, vähenevyyden ja laskettujen pisteiden avulla varsin tarkasti.



Esimerkki. Rationaalisen murtofunktion $y=\dfrac{2x^2+3x+4}{x+2}$ asymptootit löydetään 2 vaiheessa:

1) Nimittäjän nollakohtaa vastaa pystyasymptootti $x=-2$.

2) Muut asymptootit saadaan suorittamalla jakolasku vaikkapa jollakin seuraavista tavoista

- laskimen propFrac- tai expand-komennolla

$$\text{prorFrac}\left(\frac{2x^2+3x+4}{x+2}\right) \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad \frac{6}{x+2}+2\cdot x-1$$

- jakokulmaa käyttäen
- määräämättömien kertoimien menetelmällä
- osoittajaa ensin vaiheittain muokkaamalla seuraavasti

$$y=\frac{2x^2+3x+4}{x+2}=\frac{(2x^2+4x)+(-x-2)+6}{x+2}=2x-1+\frac{6}{x+2}$$

Koska jakojäännökseen liittyvä murtolauseke $\to 0$, kun $x\to\pm\infty$, niin alkuperäinen rationaalinen murtofunktio lähestyy suoraa $y=2x-1$, kun $x\to\pm\infty$.

Funktion kuvaajan piirtämiseksi tutkimme vielä funktion paikalliset ääriarvot. Merkitsemällä funktion derivaatta nollaksi

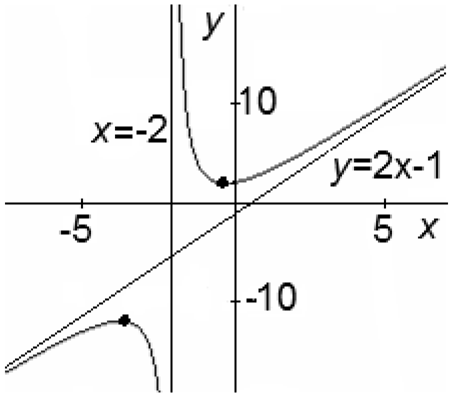
$$y'=\frac{(4x+3)\cdot(x+2)-(2x^2+3x+4)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+2}{(x+2)^2}=0$$

saadaan mahdolliset ääriarvokohdat $x=-2\pm\sqrt{3}\approx\begin{cases}-0.27\\-3.73\end{cases}$.

Koska derivaatan y' merkki käyttäytyy kuten y':n osoittajassa olevan toisen asteen polynomin (kuvaajana ylöspäin aukeava paraabeli) merkki, niin saamme alla vasemmalla olevan kaavion.

Ääriarvojen ja asymptoottien avulla murtofunktion $y=\dfrac{2x^2+3x+4}{x+2}$ kuvaaja on helppo hahmotella.

	$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	
y'	+		−	−		+
y	↗		↘	↘		↗
	Maksimi -11.93		Ei määr.		Minimi 1.93	



Harjoitustehtäviä

10.1 Määritä funktion **v)** $y = 3x^5 - 5x^3$ **a)** $y = -3x^4 - 4x^3$
ääriarvo- ja käännepisteet.

10.2 Piirrä ilman laskinta funktion **v)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **a)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
kuvaaja määrittämällä ensin kuvaajan ääriarvopisteet, kuperuussuunta ja asymptootit. Tutki kummalta puolelta käyrä lähestyy asymptoottejaan. Tarkista saamasi tulokset lopuksi laskimen piirtämästä kuvasta.

10.3 Määritä käsin laskien seuraavien käyrien asymptootit ja tarkista tuloksesi piirtämällä laskimella sekä funktion kuvaaja että löytämäsi asymptootit.

v1) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x}$ **v2)** $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 16}$ **v3)** $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$

a) $y = \dfrac{2}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

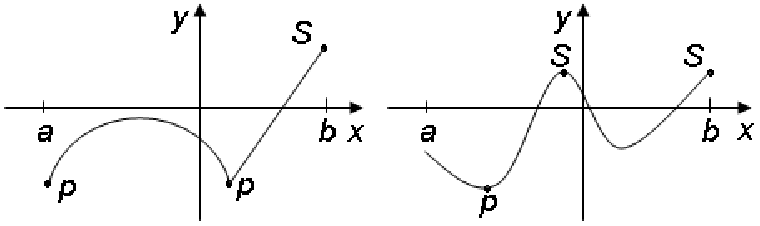
d) $y = \dfrac{2x+3}{5x}$ **e)** $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{4x^2 + 5x + 6}{2x}$

10.4 Määritä funktion $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ asymptootit. Huomaa, että laskimen kuvan mukaan käyrällä on vain yksi pystyasymptootti. Miksi sinä olet (mahdollisesti) saanut kaksi pystyasymptoottia? Kumpi on oikeassa?

11. ÄÄRIARVOJEN SOVELLUKSIA

Alla olevien kuvien mukaan on ilmeisesti voimassa

Lause. Suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa ääriarvokohdassa.

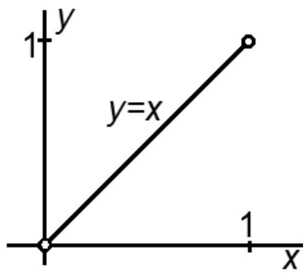


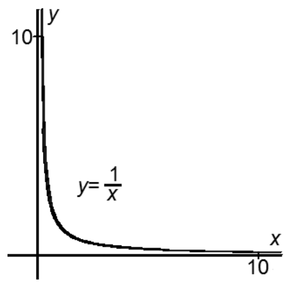
Huomaa, että funktion suurin arvo S ja pienin arvo p tietyllä suljetulla välillä voidaan saada välin useammassakin pisteessä.

Huomautus. Avoimella välillä jatkuva funktio ei välttämättä saa tällä välillä suurinta ja/tai pienintä arvoa.

Esimerkiksi funktiolla $f(x)=x$ ei ole avoimella välillä $]0,1[$ suurinta eikä pienintä arvoa.

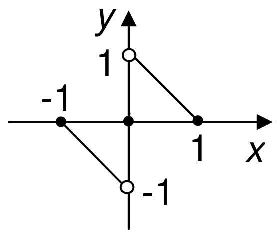
Myöskään funktiolla $f(x)=1/x$ ei ole suurinta eikä pienintä arvoa välillä $]0,\infty[$.





Huomautus. Suljetulla välillä epäjatkuva funktio ei välttämättä saa tällä välillä suurinta ja/tai pienintä arvoa.

Esimerkiksi funktiolla $f(x)=\begin{cases}-x-1\text{ , kun } -1\le x<0\\ 0\text{ ,} \quad \text{kun } x=0\\ 1-x\text{ , kun } 0<x\le 1\end{cases}$



ei ole välillä [-1,1] suurinta eikä pienintä arvoa.

Huomautus. Jos on tutkittava jatkuvan funktion suurinta ja pienintä arvoa avoimella välillä, niin paikallisten ääriarvojen lisäksi on tutkittava funktion toispuoleiset raja-arvot välin päätepisteissä.

Huomautus. Jos on tutkittava epäjatkuvan funktion suurinta tai pienintä arvoa jollakin välillä, niin mahdollisten päätepisteiden ja kriittisten pisteiden lisäksi on tutkittava funktion mahdolliset arvot ja mahdolliset (toispuoleiset) raja-arvot singulaaripisteissä (eli niissä pisteissä, joissa funktiolla ei ole derivaattaa).

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

Koska tarkasteltava funktio on polynomi, niin se on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Riittää tutkia funktion arvot

1) välin päätepisteissä

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 9(-2) = 22$$
$$f(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 - 9\cdot 2 = 2$$

2) välillä olevissa mahdollisissa ääriarvokohdissa

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \iff \begin{cases} x = -3 & \text{(ei osu tutkittavalle välille)} \\ x = 1 & f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 = -5 \end{cases}$$

Kolmesta ehdokkaasta 22, 2 ja -5 suurin on 22 ja pienin -5 ja nämä ovat etsityt suurin ja pienin arvo.

Huomaa, että tämäntyyppisessä tehtävässä ei tarvitse varmistua ääriarvon olemassaolosta ja laadusta derivaatan merkinmuutosta tutkimalla, vaan päätepistearvojen lisäksi riittää tutkia kaikkien mahdollisten ääriarvojen suuruudet. Jos jossakin kriittisessä pisteessä ei olisikaan ääriarvoa, niin suurin ja pienin arvo löytyisivät joko päätepisteestä tai jostakin toisesta kriittisestä pisteestä.

Esimerkki. Määritä suoran ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus, kun lieriön korkeuden h ja ympärysmitan $2\pi r$ summa on 3 metriä.

Side-ehtoa $h + 2\pi r = 3$ eli $h = 3 - 2\pi r$ käyttäen on haettava tilavuuden

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2(3 - 2\pi r) = 3\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$$

suurin arvo välillä $0 \le r \le \dfrac{3}{2\pi}$. Koska tilavuuden arvo välin päätepisteissä on nolla, niin suurin arvo saadaan välillä olevassa ääriarvokohdassa:

$$V' = 6\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0 \quad \iff \quad r = 0 \text{ (ei välillä) tai } r = \frac{1}{\pi}.$$

Suurin tilavuus on siis

$$V\left(\frac{1}{\pi}\right) = 3\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 - 2\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\right)^3 = \frac{1}{\pi} \text{ kuutiometriä}$$

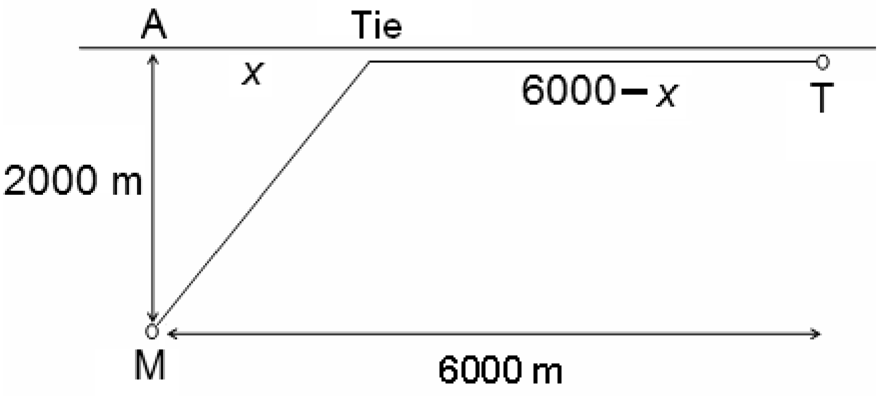
Säteen arvon ja vastaavan tilavuuden löytää TI-laskimen komennoilla

Define $V = \pi r^2(3 - 2\pi r)$: solve$(d(V,r) = 0, r)$ ↵ $r = 0$ tai $r = \dfrac{1}{\pi}$

$V \Big| r = \dfrac{1}{V}$ ↵ $\dfrac{1}{\pi}$

Ratkaisun löytää myös analysoimalla laskimella edellä johdettua tilavuusfunktion $V = 3\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$ kuvaajaa.

Esimerkki. Määritä edullisin tapa sähkölinjan vetämiseksi metsän keskellä olevalta muuntajalta M tehtaalle T, kun kaapelin vetäminen metsään maksaa 100 €/m ja tien varteen 50 €/m. Muuntaja on 2000 m itä-länsi-suuntaisen tien eteläpuolella ja tien lähimmästä pisteestä A on vielä 6000 metriä tehtaalle.



Merkitään $x =$ kuvan mukainen ”sivusuuntainen siirtymä” metsässä, jolloin kokonaiskustannus

$$k = k_{\text{metsä}} + k_{\text{tie}} = 100 \cdot s_{\text{metsä}} + 50 \cdot s_{\text{tie}} = 100\sqrt{2000^2 + x^2} + 50(6000 - x) \ .$$

Mahdollisessa ääriarvokohdassa kustannusfunktion derivaatta $k'(x) = 0$. Koska derivoimalla päädyttäisiin juuriyhtälöön, niin ikävien mekaanisten laskusuoritusten välttämiseksi etsimme (mahdollisen) paikallisen ääriarvokohdan ja sitä vastaavan kokonaiskustannuksen laskimella:

Define $k = 100\sqrt{2000^2 + x^2} + 50(6000 - x)$

solve($d(k, x) = 0$, x) ↵ $x = 1154.7$

$k \mid x = 1154.7$ ↵ 473205

Kokonaiskustannukset tarkasteluvälin $0 \leq x \leq 6000$ päätepisteissä ovat

$k \mid x = 0$ ↵ 500000

$k \mid x = 6000$ ↵ 632456

Valitaan kaapelin linja kokonaiskustannuksiltaan halvimman reitin mukaan.

Vastaus: Edullisin tapa on edetä metsässä tien pisteeseen, joka on 1155 metrin päässä tien lähimmästä pisteestä A.

Huomautus. Tämäntyyppisessä tehtävässä kustannusfunktion $k(x)$ piirtäminen laskimella ja kuvaajan kriittinen tarkastelu yhdessä laskimen minimi-toiminnon kanssa antanee usein tilanteesta puhtaasti laskennollista ratkaisua havainnollisemman käsityksen, sillä kuvasta voi myös välittömästi arvioida, kuinka nopeasti kustannukset muuttuvat ”sivusuuntaisen siirtymän” x muuttuessa.

Esimerkki. Neljän 2 metriä pitkän riu'un varaan halutaan rakentaa säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen teltta siten, että teltan tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä pohjaneliön sivu *s*.

Kaksi vastakkaista riukua muodostavat pohjaneliön lävistäjän kanssa tasakylkisen kolmion, jonka kanta on pohjaneliön lävistäjä $s\sqrt{2}$ ja korkeus $h=\sqrt{2^2-\left(s\sqrt{2}/2\right)^2}$. (Piirrä kuva!) Teltan tilavuus on

$$V=\frac{1}{3}s^2h=\frac{1}{3}s^2\cdot\sqrt{4-0.5s^2}\,.$$

On etsittävä tilavuuden suurin arvo välillä $0\le s\le 2\sqrt{2}$.

Käsin laskettaessa ääriarvokohdan määrittämisessä tarvittavaa derivointia ja derivaatan nollakohdan etsimistä voi helpottaa siirtämällä tilavuuden lausekkeessa tekijän s^2 juurimerkin alle ja maksimoimalla neliöjuuren alle muodostuvan lausekkeen

$$y=4s^4-0.5s^6\,.$$

Välin päätepisteissä saamme $y(0)=y(2\sqrt{2})=0$.
Mahdollisessa ääriarvokohdassa

$$y'=16s^3-3s^5=0 \quad\Leftrightarrow\quad s=0 \text{ tai } s=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}\approx\pm 2.31.$$

Näin ollen on selvää, että pohjaneliön sivuun 2.31 m liittyvän teltan tilavuus on suurin mahdollinen.

Jos maksimoitavaa lauseketta ei huomaisi helpottaa, vaan merkitsisi tilavuuden *V* derivaatan nollaksi, niin saisi ikävämmän näköisen derivaatan ja yhtälön

$$\frac{2}{3}s\cdot\sqrt{4-0.5s^2}-\frac{s^3}{6\sqrt{4-0.5s^2}}=0\,,$$

jolla on tietenkin samat juuret $s=0$ tai $s=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ kuin edelläkin.

Laskinta käytettäessä voi tietenkin tarkastella tilavuuden *V* alkuperäistä lauseketta seuraavasti:

Define $V=\frac{1}{3}\cdot s^2\sqrt{4-0.5s^2}$

solve($d(V,s)=0,s$) ↵ $s=0$ tai $s=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx\pm 2.31$

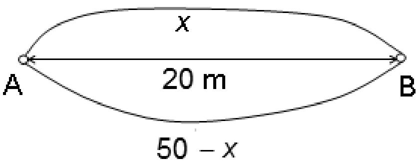
$V\,\big|\; s=2.31$ ↵ 2.05

$V\,\big|\; s=0$ ↵ 0

$V\,\big|\; s=2\sqrt{2}$ ↵ 0

Suurin tilavuus saadaan siis, kun pohjaneliön sivu on 2.31 metriä.

Esimerkki. Tarkastellaan 50 metriä pitkää johdinlankaa, jonka resistanssi metriä kohden on 0.02 yksikkönä Ω/m. Miten johdinlanka on katkaistava kahteen osaan x ja $50-x$, jotta niillä voitaisiin yhdistää 20 metrin etäisyydellä olevat kohteet A ja B siten, että rinnan kytkettyjen johtimien kokonaisresistanssi olisi mahdollisimman pieni? Mahdollista myöhempää käyttöä varten johtimesta ei saa katkaista tässä tilanteessa tarpeetonta 10 metrin pätkää pois.



Johdinosien resistanssit ovat $0.02x$ ja $0.02(50-x)$. Koska vastusten rinnan kytkennässä $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, niin nyt on etsittävä resistanssin

$$R = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1} = \frac{0.02x\cdot(1-0.02x)}{(1-0.02x)+0.02x} = 0.02x - 0.0004x^2$$

pienin arvo välillä $20 \le x \le 30$.

Päätepistearvot ovat $R(20) = R(30) = 0.24$.

Mahdollisessa ääriarvokohdassa $R' = 0.02 - 0.0008x = 0 \Leftrightarrow x = 25$, $R(25) = 0.25$

Resistanssin on siis pienimmillään, kun osien pituudet ovat 20 ja 30 metriä.

Harjoitustehtäviä

11.1 Määritä funktion **v)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ **a)** $g(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2,2]$.

11.2 Määritä ylhäältä avoimen suoran ympyrälieriön muotoisen litran mitan pohjaympyrän säde ja korkeus siten, että
v) mitan pohjan ja reunan kokonaisala on pienin mahdollinen
a) mittaan tarvittavan sauman pituus (eli pohjaympyrän piirin ja sivuviivan yhteispituus) on pienin mahdollinen.

11.3 x-akselilla nopeudella 5 liikkuva kappale on kohdassa $x = -57$ samalla hetkellä kuin y-akselilla nopeudella **v)** 13 **a)** –3 (huomaa suunta!) liikkuva kappale on kohdassa $y = -76$. Määritä kappaleiden pienin etäisyys.

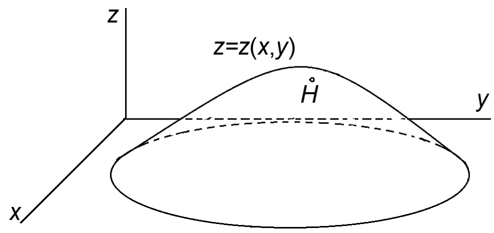
11.4 Tasasivuisen puolisuunnikkaan kolme sivua ovat viiden metrin pituisia. Määritä puolisuunnikkaan suurin mahdollinen ala.

11.5 Kuuden 2 metriä pitkän riu'un varaan halutaan rakentaa säännöllisen kuusisivuisen pyramidin muotoinen teltta siten, että teltan tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä pohjana olevan kuusikulmion sivu s.

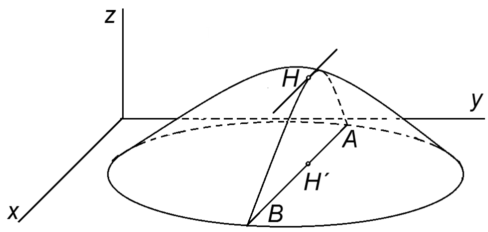
11.6 R-säteinen ympyränmuotoinen kartonki on leikattava kahdeksi sektoriksi, jotka taitetaan ympyräkartion muotoisiksi "tötteröiksi". Määritä kunnon laskinta tehokkaasti hyödyntäen sektoreiden keskuskulmat siten, että
v) tötteröiden yhteistilavuus on mahdollisimman suuri
a) suuremman tötterön tilavuus on mahdollisimman suuri
b) tötteröiden tilavuuksien erotus on mahdollisimman suuri.

12. USEAN MUUTTUJAN FUNKTION ÄÄRIARVOISTA

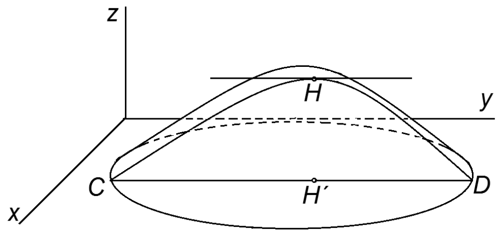
Tarkoituksena on ensin selvittää yksinkertaista testiä kuvan pinnan korkeutta esittävän kahden muuttujan funktion $z = z(x, y)$ maksimipisteen H löytämiseksi.



Jos pintaa leikataan H:n kautta kulkevalla xz-tason suuntaisella tasolla, niin edettäessä leikkausviivaa AHB pitkin positiivisen x-akselin suuntaan pinnalla joudutaan ensin nousemaan, kunnes H:n kohdalla leikkausviiva on vaakasuora ja sen jälkeen viiva laskeutuu. Koska korkeus z ei ääriarvokohdassa muutu x-suuntaan edettäessä, niin tällöin osittaisderivaatta $z'_x = 0$.

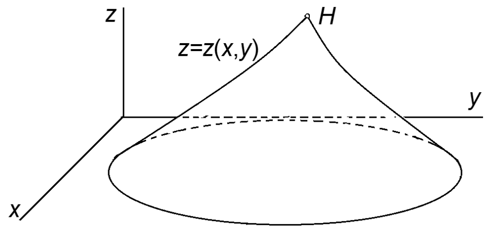


Vastaavasti yz-tason suuntaisella leikkausviivalla CHD on ääriarvokohdassa vaakasuora kohta, joten myös osittaisderivaatta $z'_y = 0$.

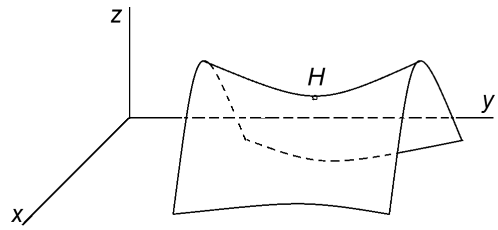


Johtopäätös. Edellisen tarkastelun perusteella on ilmeistä, että kahden (ja myös useamman) muuttujan funktion paikallisessa ääriarvokohdassa

- osittaisderivaatat ovat joko nollia (jos tutkittava suure muuttuu ”tasaisen kiltisti” ääriarvokohdan läheisyydessä)
- tai osittaisderivaatat eivät ole olemassa (jos tutkittavan suureen käyttäytyminen muuttuu viereisen kuvan mukaisesti äkillisesti ääriarvokohdassa).



On huomattava, että kaikissa em. ehdot täyttävissä pisteissä ei aina ole paikallista ääriarvoa. Kyseessä voi olla vaikkapa alimman kuvan mukainen satulapinta, jonka satulapisteessä H on reittiviivan paikallinen maksimi edettäessä pinnalla x-akselin suuntaan, mutta reittiviivan paikallinen minimi edettäessä pinnalla y-akselin suuntaan.



Sopimus. Tässä esityksessä sivuutetaan ääriarvon olemassaolon ja laadun tutkiminen matemaattisten kriteerien avulla, sillä monissa tavallisimmissa käytännön tehtävissä ääriarvon olemassaolo ja laatu ovat ilmeiset.

Pintojen yhtälöistä. Yksi paikkakoordinaatteja *x, y* ja *z* koskeva yhtälö esittää yleensä jotakin kolmiulotteisen avaruuden pintaa. Paikkakoordinaatteja *x, y* ja *z* koskeva yhtälöpari puolestaan edustaa ko. yhtälöiden esittämien pintojen yhteisiä pisteitä, jotka tavallisesti muodostavat jonkin avaruudessa olevan viivan.

Niinpä esimerkiksi yksi muotoa $z = ax^2 + ay^2 + cx + dy + f$ oleva yhtälö esittää sopivan paraabelin pyörähtäessä akselinsa ympäri syntyvää

- ylöspäin aukeavaa pyörähdysparaboloidia, jos $a > 0$
- alaspäin aukeavaa pyörähdysparaboloidia, jos $a < 0$.

Jos em. pyörähdysparaboloidia venytetään/kutistetaan *x*- tai *y*-akselin suunnassa, niin uuden pinnan yhtälöksi tulee muotoa $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + f$ oleva yhtälö, missä *a* ja *b* ovat samanmerkkisiä merkin riippuessa paraboloidin aukeamissuunnasta.

Esimerkki. Määritä alas aukeavan paraboloidin $z = -x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1$ huippu ja huipun kautta kulkeva *yz*-tason suuntainen tasoleikkaus.

Koska huipussa osittaisderivaatat ovat nollia, niin

$$\begin{cases} z'_x = -2x - 6 = 0 \\ z'_y = -4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \therefore \text{ Huippu on } H = (-3, 1, \overbrace{12}^{\text{Saatu } z\text{:n lausekkeesta}})$$

Kysyttyä tasoleikkausta edustaa yhtälöpari

$$\begin{cases} z = -x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1 \\ x = -3 \end{cases} \overset{\text{Sijoita } x}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\begin{cases} z = -2y^2 + 4y + 10 \\ x = -3 \end{cases}}} \overset{\text{Neliöi käsin tai laskimella}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\begin{cases} z = -2(y-1)^2 + 12 \\ x = -3 \end{cases}}}$$

Esimerkki. Tutkitaan pinnan $z = -x^2 + 3y^2 + 4x - 18y + 24$ ääriarvokohtia.

Koska tarkasteltava funktio on kaikkialla derivoituva, niin paikallinen ääriarvo voi olla vain sellaisissa kohdissa, joissa osittaisderivaatat ovat nollia:

$$\begin{cases} z'_x = -2x + 4 = 0 \\ z'_y = 6y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

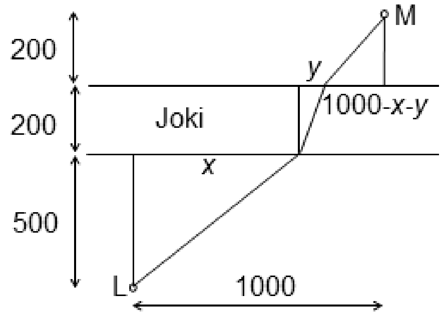
Ainoa mahdollinen ääriarvokohta on siis $(x,y) = (2,3)$, missä $z = 1$.

Jos pintaa leikataan ko. kohdan kautta kulkevalla *yz*-tason suuntaisella tasolla $x = 2$**,** niin leikkausviivalla $z = 3y^2 - 18y + 24$ eli leikkausviiva on ylöspäin aukeava paraabeli. Jos taas pintaa leikataan ko. kohdan kautta kulkevalla *xz*-tason suuntaisella tasolla $y = 1$**,** niin leikkausviivalla $z = -x^2 + 4x + 9$ eli leikkausviiva on alaspäin aukeava paraabeli.

Koska pinnalla on ainoan mahdollisen ääriarvokohdan välittömässä läheisyydessä sekä siinä saatuja arvoja suurempia että pienempiä arvoja, niin ko. kohta ei voi olla ääriarvokohta eikä funktiolla ole siis yhtään ääriarvokohtaa.

Tarkasteltava pinta on itse asiassa eräs satulapinta, jollaista on hahmoteltu edellisen sivun alimmassa kuvassa.

Esimerkki. Määritä kilpailijalle nopein reitti lähtöpisteestä L maaliin M, kun kilpailijan juoksunopeus joen eteläpuolella on 5 m/s ja pohjoispuolella 4 m/s sekä uintinopeus joella 1 m/s. Kuvan alareunaan ja vasempaan reunaan on merkitty etäisyyksiä metreinä.



Merkitään "sivusuuntaista siirtymää" joen eteläpuolella x:llä ja joella y:llä, jolloin "sivusuuntainen siirtymä" joen pohjoispuolella on $1000 - x - y$.

Kokonaisajaksi saadaan

$$t = t_{\text{eteläpuolella}} + t_{\text{joella}} + t_{\text{pohjoispuolella}}$$

$$= \sqrt{500^2 + x^2}/5 + \sqrt{200^2 + y^2}/1 + \sqrt{200^2 + (1000 - x - y)^2}/4$$

Laskimen komennoilla

Define $t = \sqrt{500^2 + x^2}\ /\ 5 + \sqrt{200^2 + y^2}\ /\ 1 + \ldots$

solve($d(t, x) = 0$ and $d(t, y) = 0$, $\{x, y\}$)

saadaan $x = 783{,}2 \approx 783$ ja $y = 34.2 \approx 34$, jotka ilmeisesti ovat edullisimpaan reittiin liittyvät "sivusuuntaiset siirtymät" metreinä joen eteläpuolella ja joella.

Esimerkki. Mihin pisteeseen (x, y) muuntaja tulisi sijoittaa kustannusten minimoimiseksi, kun muuntajalta on vedettävä kolmeen kohteeseen A, B ja C erihintaiset kaapelit seuraavan taulukon mukaisesti:

Kohde	A	B	C
Sijainti	(0,0)	(200,0)	(100,300)
Kaapelin hinta €/m	1000	1200	1500

Kokonaiskustannukset ovat

$$k = k_A + k_B + k_C = 1000d_A + 1200d_B + 1500d_C$$

$$= 1000\sqrt{x^2 + y^2} + 1200\sqrt{(x - 200)^2 + y^2} + 1500\sqrt{(x - 100)^2 + (y - 300)^2}$$

Kustannusfunktion paikallista ääriarvoa voi hakea komennoilla

Define $k=1000\sqrt{x^2+y^2}+1200\sqrt{(x-200)^2+y^2}+1500\sqrt{(x-100)^2+(y-300)^2}$

solve($d(k, x) = 0$ and $d(k, y) = 0, \{x, y\}$)

Laskimen TI-89 CX CAS muisti loppuu kuitenkin jonkin ajan kuluttua kesken ja laskin ilmoittaakin, että ratkaisua ei olisi.

Esimerkiksi Derive-ohjelmalla voi ns. Newtonin tangenttimenetelmää käyttäen kuitenkin löytää saman yhtälöryhmän ratkaisun

$$x \approx 110.0165910, \quad y \approx 91.87191786\ ,$$

joten muuntaja kannattaa sijoittaa pisteeseen (110, 92).

Esimerkki. Tehtävänä on määrittää 10 kuutiometrin suuruisen suorakulmaisen särmiön muotoisen kontin mitat *x*, *y* ja *z* siten, että materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet, kun

- alapohjan *xy* materiaali maksaa 30 €/m^2
- etutahkon *yz* materiaali maksaa 20 €/m^2
- muiden neljän tahkon materiaali maksaa 10 €/m^2

Side-ehto $V = xyz = 10 \Leftrightarrow z = \dfrac{10}{xy}$ huomioiden laatikon materiaalikustannukset ovat

$$k = 30xy + 20yz + 10(xy + yz + 2xz) = 40xy + 30yz + 20xz$$
$$= 40xy + 30y \cdot \frac{10}{xy} + 20x \cdot \frac{10}{xy} = 40xy + 300x^{-1} + 200y^{-1}$$

Paikallisessa ääriarvokohdassa osittaisderivaatat $= 0$, ts.

$$\begin{cases} k'_x = 40y - 300x^{-2} = 0 \\ k'_y = 40x - 200y^{-2} = 0 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \sqrt[3]{90}/2 \approx 2.24 \\ y = \sqrt[3]{90}/3 \approx 1.49 \end{cases}$$

Side-ehdon mukaan $z = \dfrac{10}{xy} = \dfrac{2\sqrt[3]{90}}{3} \approx 2.99$.

Koska tehtävällä on ilmeisesti ratkaisu ja tämä on ainoa mahdollisuus, niin olemme löytäneet kontin edullisimmat mitat

$$x \approx 2.24,\ y \approx 1.49 \text{ ja } z \approx 2.99 \text{ metriä.}$$

Ääriarvokohdan löytää helposti seuraavilla laskimen komennoilla:

Define $k = 40x \cdot y + 300/x + 200/y$
solve($d(k,x) = 0$ and $d(k,y) = 0, \{x,y\}$)

Harjoitustehtäviä

12.1 Mikä on nopein reitti pisteestä $(0,-10)$ pisteeseen $(80,20)$, jos nopeus *x*-akselin alapuolella on 3 ja yläpuolella 5 sekä *x*-akselilla
v1) 6 **v2)** 4 **a)** 10 **b)** 5.

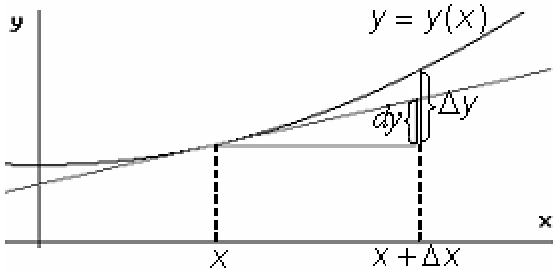
12.2 Mikä on edullisin reitti kaapelin vetämiseksi pisteestä (0,–20m) pisteeseen (100m, 30m), jos kaapeli maksaa 30 €/m *x*-akselin alapuolella, 10 €/m *x*-akselilla ja 20 €/m *x*-akselin yläpuolella?

12.3 Määritä kustannuksiltaan edullisimman päältä avoimen 20 kuutiometrin suuruisen kontin mitat, kun kontin alapohja *xy* maksaa 50 €/m^2, päätytahkot *xz* maksavat 40 €/m^2 ja sivutahkot *yz* maksavat 20 €/m^2

13. DIFFERENTIAALI

”Kiltisti käyttäytyvän” funktion $y = y(x)$ todellista muutosta Δy lyhyessä siirtymässä kohdasta x kohtaan $x+\Delta x$ voidaan kuvan mukaisesti arvioida funktion kuvaajalle piirretyn tangentin muutoksen avulla seuraavasti:

Funktion todellinen muutos $\Delta y \approx$ tangentin muutos $dy = y'(x)\cdot \Delta x$



Koska jatkossa tangentin muutosta käytetään toistuvasti apuna funktion muutoksen arvioinnissa, niin sillä on oma nimensä differentiaali seuraavasti:

Määritelmä. Funktion $y(x)$ **differentiaali** dy välillä $[x, x+\Delta x]$ on

$$dy = y'(x)\cdot \Delta x.$$

”Kiltisti käyttäytyville” funktioille on lyhyillä väleillä voimassa seuraava tulos:

Funktion $y(x)$ todellinen muutos Δy välillä $[x, x+\Delta x]$
$\approx$ funktion $y(x)$ differentiaali dy välillä $[x, x+\Delta x]$
$= y'(x)\cdot \Delta x$.

Esimerkki. Lasketaan funktion $y = x^2$ todellinen muutos Δy ja differentiaali dy, kun x muuttuu

a) arvosta 3 arvoon 3.1 b) arvosta 4 arvoon 3.9 c) arvosta -1 arvoon 2.

Seuraavissa laskuissa tarvitaan funktion y derivaattaa $y'(x) = 2x$.

a) $\left.\begin{aligned} \Delta y &= y(3.1) - y(3) = 3.1^2 - 3^2 = 0.61 \\ dy &= y'(3)\cdot\Delta x = (2\cdot 3)\cdot(3.1-3) = 0.6 \end{aligned}\right\}$ Lyhyessä siirtymässä $\Delta y \approx dy$

b) $\left.\begin{aligned} \Delta y &= y(3.9) - y(4) = 3.9^2 - 4^2 = -0.79 \\ dy &= y'(4)\cdot\Delta x = (2\cdot 4)\cdot(3.9-4) = -0.8 \end{aligned}\right\}$ Lyhyessä siirtymässä $\Delta y \approx dy$

Huomaa, että muutokset laskettiin merkkeineen järjestyksessä

Muutos = uusi arvo – alkuperäinen arvo

c) $\left.\begin{aligned} \Delta y &= y(2) - y(-1) = 2^2 - (-1)^2 = 3 \\ dy &= y'(-1)\cdot\Delta x = (2\cdot(-1))\cdot(2-(-1)) = -6 \end{aligned}\right\}$ Siirtymä ei ollut lyhyt!

Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta:
Differentiaali- ja integraalilaskenta
Ojalain laskuopit
76

Huomautus. Matematiikassa muutos lasketaan aina merkkeineen siten, että

Suureen muutos = suureen uusi arvo – suureen alkuperäinen arvo

Huomautus. Koska $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$, niin

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y \approx y(x) + dy = y(x) + y'(x)\cdot \Delta x$$

mikäli funktio on ”kiltti” ja $\Delta x \approx 0$.

Esimerkki. Arvioi $\sqrt{16.1}$ ja $\sqrt{24.8}$ käyttäen apuna funktiota $y(x)=\sqrt{x}$ ja sen differentiaalia $dy = y'(x)\cdot\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x$.

$$\sqrt{16.1} = y(16.1) \approx y(16) + y'(16)\cdot 0.1 = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot 0.1 = 4 + 0.0125 = 4.0125$$

$$\sqrt{24.8} = y(24.8) \approx y(25) + y'(25)\cdot(-0.2) = \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot(-0.2) = 5 - 0.02 = 4.98$$

Vertaa $\sqrt{16.1} = 4.01248...$ ja $\sqrt{24.8} \approx 4.979959...$

Esimerkki. Lasketaan seuraavien funktioiden differentiaalit

a) $y(x) = x^3$

$dy = y'(x)\cdot\Delta x = 3x^2\cdot\Delta x$ eli toisin merkittynä $d(x^3) = 3x^2\cdot\Delta x$

b) $A(r) = \pi r^2$

$dA = A'(r)\cdot\Delta r = 2\pi r\cdot\Delta r$ eli toisin merkittynä $d(\pi r^2) = 2\pi r\cdot\Delta r$

Vertaa: Ympyrän alan muutos = ympyrärenkaan ala

c) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dV = V'(r)\cdot\Delta r = 4\pi r^2\cdot\Delta r$ eli toisin merkittynä $d(\frac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi r^2\cdot\Delta r$

Vertaa: Pallon tilavuuden muutos = pallonkuoren tilavuus

Esimerkki. Lasketaan seuraavat differentiaalit kaavalla $dy(x) = y'(x)\cdot\Delta x$

a) $d(\sin x) = \cos x\cdot\Delta x$

b) $d(x^5) = 5x^4\cdot\Delta x$

c) Vapaan muuttujan x differentiaali $dx = d(x) = 1\cdot\Delta x = \Delta x$

= vapaan muuttujan todellinen muutos Δx

Huomautus. Koska vapaalle muuttujalle on voimassa tarkka yhtäsuuruus $\Delta x = dx$, niin edellisissä differentioimiskaavoissa vapaan muuttujan x todellinen muutos Δx voidaan korvata yhtä suurella differentiaalilla *dx.*

Esimerkki. $d(x^4) = 4x^3 \cdot \Delta x = 4x^3 \cdot dx$, $\quad d(\pi r^2) = 2\pi r \cdot \Delta r = 2\pi r \cdot dr$

Huomautus. Riippuvalle muuttujalle y ei yleensä ole voimassa tarkka yhtäsuuruus $\Delta y = dy$, vaan ainoastaan likimääräisyys $\Delta y \approx dy$.

Tekniikassa differentiaalia käytetään yleisesti virheen arvioimiseksi seuraavan esimerkin tapaan.

Esimerkki. Laske kuution tilavuus $V = s^3$ virherajoineen, kun särmän pituus $s = 12.3 \pm 0.3$.

Mittaustulokseen 12.3 liittyväksi laskennalliseksi tilavuudeksi saadaan

$$V = 12.3^3 = 1860.87.$$

Virheelliseen mittaustulokseen perustuvaan laskennalliseen arvoon sisältyy tietenkin virhe, jota voidaan pitää muutoksena, joka johtuu todellisen särmän muuttumisesta virheelliseksi. Täten tilavuuden virhettä (kuten mitä tahansa ”kiltin” funktion vähäistä muutosta) voidaan arvioida differentiaalin avulla, ts.

$$\text{Tilavuuden virhe } \Delta V \approx \text{ tilavuuden differentiaali } dV$$

$$= V'(s_{\text{tarkka}}) \cdot \Delta s \approx V'(s_{\text{mitattu}}) \cdot \Delta s = 3s^2 \cdot \Delta s$$

Koska emme yleensä tunne virheen tarkkaa arvoa (joka esimerkissämme voi olla mitä tahansa väliltä $-0.3 \le \Delta s \le 0.3$), niin määritämme seuraavassa tilavuuden virheen itseisarvon ylärajan käyttäen apuna särmän virheen itseisarvon ylärajaa $|\Delta s| \le 0.3$:

$$|\Delta V| \approx |V'(s) \cdot \Delta s| = 3s^2 \cdot |\Delta s| \le 3 \cdot 12.3^2 \cdot 0.3 = 136.16$$

Siis $\quad V = 1860.87 \pm 136.16 = 1900 \pm 200$

Sopimus. Tällä kurssilla tulos virherajoineen esitetään seuraavan sopimuksen mukaisesti:

1. **Virheraja esitetään yhden merkitsevän numeron tarkkuudella pyöristäen aina ylöspäin.**
2. **Suureen laskennallinen arvo katkaistaan desimaalipilkkuun nähden samalta kohtaa kuin virherajakin, mutta pyöristetään aina normaalisääntöjen mukaan lähimpään numeroon.**

Esimerkki. Pyöristetään seuraavat lasketut tulokset virherajoineen sopimuksemme mukaisella tavalla:

$$A = 12.34 \pm 0.2|3 = 12.3 \pm 0.3$$
$$B = 45.67 \pm 6|.54 = 46 \pm 7$$
$$C = 45.67 \pm 6|.78 = 46 \pm 8$$
$$D = 12345 \pm 1|23 = 12300 \pm 200$$

Huomaa, että suureen C virherajaksi ei riitä ± 7, sillä laskennallisen keskikohdan 45.67 katkaisuvirhe 0.33 kasvattaa alkuperäisen virherajan 6.78 yli 7:n, joten ylöspäin pyöristetyksi virherajaksi tulee 8:

Huomautus. Joskus käytetään ns. **15-sääntöä**, jolloin sellaiset virherajat, joiden ensimmäiset merkitsevät numerot ovat 10, 11, 12, 13 tai 14, pyöristetään ylöspäin kahden numeron tarkkuuteen, jolloin esimerkiksi

$$D = 12345 \pm 12|3 = \underline{\underline{12350 \pm 130}}$$

Esimerkki. Kuinka kauan kestää 1230 kilometrin matkan kulkeminen autolla, kun nopeus $v = (95 \pm 5)$ km/h.

Laskennalliseksi ajaksi saadaan $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{1230 \text{ km}}{95 \text{ km/h}} = 12.947 \text{ h}$.

Koska $t = t(v) = \dfrac{s}{v} = s \cdot v^{-1}$, niin

$$\Delta t \approx dt = t'(v) \cdot \Delta v = s \cdot (-1) \cdot v^{-2} \cdot \Delta v$$

$$|\Delta t| \approx \frac{s}{v^2} \cdot |\Delta v| \leq \frac{1230 \text{ km}}{(95 \text{ km/h})^2} \cdot 5 \text{ km/h} = 0.681 \text{ h}$$

$$\therefore \; t = (12.9|47 \pm 0.6|81) \text{ h} = \underline{\underline{(12.9 \pm 0.8) \text{ h}}}$$

Esimerkki. Laske $S = S(x) = \sin(3x)$ virherajoineen, kun $x = (56 \pm 1)°$.

Suureen S laskennallinen arvo on $S = \sin(3 \cdot 56°) = \sin(168°) = 0.20791$.

Suureen S virhettä voidaan arvioida differentiaalin avulla

$$\Delta S \approx dS = S'(x) \cdot \Delta x = \underbrace{\cos(3x)}_{\text{ufd}} \cdot \underbrace{3}_{sfd} \cdot \Delta x$$

$$|\Delta S| \approx |\cos(3x) \cdot 3 \cdot \Delta x| \leq \underbrace{|\cos(3 \cdot 56°)|}_{\substack{\text{Huomaa} \\ \text{itseisarvomerkit!}}} \cdot 3 \cdot 1° = 0.97815 \cdot 3 \cdot \underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\substack{\text{Huomaa} \\ \text{asteen arvo!}}} = 0.05122$$

$$\therefore \; S = 0.20|791 \pm 0.05|122 = \underline{\underline{0.21 \pm 0.06}}$$

Harjoitustehtäviä

13.1 Määritä funktion **v)** $y = 3x^2 + 4x$ **a)** $y = x^3 - 4x$
todellinen muutos Δy ja differentiaali *dy*, kun *x* muuttuu
i) arvosta 2 arvoon 2.3 ii) arvosta 3 arvoon 2.9 ii) arvosta –2 arvoon 1.

13.2 Arvioi ilman laskinta **v)** $\sqrt[3]{8.2}$ ja **a)** $\sqrt[5]{31.7}$ käyttäen apuna vastaavasti funktioita $y(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $y(x) = \sqrt[5]{x}$ differentiaaleineen. Huomaa, että $\sqrt[3]{8} = 2$ ja $\sqrt[5]{32} = 2$. Tarkista tuloksesi laskimella.

13.3 Arvioi differentiaalia käyttäen pallon tilavuuden muutosta, kun pallon säde muuttuu arvosta 4 metriä arvoon **v)** 4.2 metriä **a)** 3.9 metriä.
Laske myös tilavuuden todellinen muutos.

13.4 Esitä seuraavat laskennalliset tulokset virherajoineen sopimuksemme mukaisessa muodossa:

$A = (1234 \pm 21)\,\mathrm{m}^2$ $\quad$ $v = (4567 \pm 678)\,\mathrm{m/s}$

$I = (0.302 \pm 0.012)\,\mathrm{A}$ $\quad$ $U = (234 \pm 17)\,\mathrm{V}$

13.5 Laske pallon pinta-ala virherajoineen differentiaalia käyttäen, kun
v) $r = (5.43 \pm 0.02)\,\mathrm{m}$ **a)** $r = (43 \pm 2)\mathrm{mm}$

13.6 Laske 10000 metrin kulkemiseen kuluva aika virherajoineen differentiaalia käyttäen, kun nopeus on
v) $v = (17 \pm 2)$ m/s **a)** $v = (234 \pm 5)$ m/s

13.7 Laske **v)** $y = \sin x$ **a)** $v = \cos(2x)$
virherajoineen differentiaalia käyttäen, kun $x = (123 \pm 2)°$

13.8 Laske terävä kulma α virherajoineen differentiaalia käyttäen, kun
v) $\sin\alpha = 0.765 \pm 0.002$ **a)** $\cos\alpha = 0.543 \pm 0.001$

13.9 Tässä tehtävässä et saa käyttää laskimen solve-komentoa. Etsi yhtälön

$$x^5 + 2x^3 = 110000$$

likimääräinen ratkaisu, kun tiedetään, että $10^5 + 2 \cdot 10^3 = 102000$.
Opastus: Käytä likiarvokaavasta $y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) \cdot \Delta x$ ratkaistua lauseketta Δx:lle.

14. KOKONAISDIFFERENTIAALI

Argumenttien vähäisistä muutoksista johtuvaa usean muuttujan funktion todellista muutosta voidaan arvioida käyttäen apuna **kokonaisdifferentiaalia, joka huomioi kunkin muuttujan vaikutuksen differentiaalin kaltaisella termillä**.

Tarkastelemme ensin kahden muuttujan funktion $z = z(x, y)$ todellista muutosta siirryttäessä pisteestä (x, y) pisteeseen $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Suoritamme siirtymän kahdessa vaiheessa: ensin x-akselin suuntainen siirtymä pisteestä (x, y) välipisteeseen $(x+\Delta x, y)$ ja sitten y-akselin suuntainen siirtymä välipisteestä lopulliseen pisteeseen $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Todelliselle muutokselle saadaan arvio

$$\begin{aligned}\Delta z &= z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y)\\ &= \big(z(x+\Delta x, y) - z(x, y)\big) + \big(z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y)\big)\\ &\approx z'_x(x, y)\cdot\Delta x + z'_y(x+\Delta x, y)\cdot\Delta y\\ &\approx z'_x(x, y)\cdot\Delta x + z'_y(x, y)\cdot\Delta y \overset{\text{määritellään}}{=} z\text{:n kokonaisdifferentiaali } dz\end{aligned}$$

Vastaavasti kolmen muuttujan funktion $u = u(x, y, z)$ todellinen muutos Δu vähäisessä siirtymässä pisteestä (x,y,z) uuteen pisteeseen $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ on

$$\begin{aligned}\text{Todellinen muutos } \Delta u &\approx u\text{:n kokonaisdifferentiaali } du\\ &= u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z\end{aligned}$$

Esimerkki. Lasketaan lämpötilan $T(x, y, z) = xy^2z^3$ todellinen muutos ja kokonaisdifferentiaali siirryttäessä pisteestä $(x,y,z) = (4, 5, 6)$ pisteeseen (4.1, 5.2, 5.9).

Todellinen muutos $\Delta T = T(4.1, 5.2, 5.9) - T(4, 5, 6) = 22769.1 - 21600 = 1169.1$.

Kokonaisdifferentiaali on

$$\begin{aligned}dT = T'_x\cdot\Delta x + T'_y\cdot\Delta y + T'_z\cdot\Delta z &= y^2z^3\cdot\Delta x + 2xyz^3\cdot\Delta y + 3xy^2z^2\cdot\Delta z\\ &= 5^2\cdot 6^3\cdot 0.1 + 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6^3\cdot 0.2 + 3\cdot 4\cdot 5^2\cdot 6^2\cdot(-0.1) = 1188\ .\end{aligned}$$

Tässä esimerkissä $\Delta T \approx dT$, kuten saattoi odottaakin.

Esimerkki. Laske kuution muotoisen kappaleen tiheys virherajoineen, kun kappaleen massa $m=(3450\pm 20)$ kg ja kuution särmä $s=(0.876\pm 0.002)$ m.

Tiheydeksi saadaan $\rho=5132.2$ kg/m^3, kun mittaustulokset sijoitetaan kaavaan

$$\rho=\rho(m,s)=\frac{m}{V}=\frac{m}{s^3}=ms^{-3} .$$

Tiheyden virhettä voidaan arvioida käyttäen apuna kokonaisdifferentiaalia

$$\Delta\rho \approx d\rho = \rho'_m \cdot \Delta m + \rho'_s \cdot \Delta s = s^{-3}\cdot\Delta m - 3ms^{-4}\cdot\Delta s$$

Ottamalla molemmat virhelähteet samaan suuntaan vaikuttavina ja itseisarvoltaan maksimaalisina saadaan tiheyden virheen itseisarvolle yläraja

$$\begin{aligned}|\Delta\rho| &\approx \left|s^{-3}\cdot\Delta m - 3ms^{-4}\cdot\Delta s\right| \le \left|s^{-3}\cdot\Delta m\right| + \left|3ms^{-4}\cdot\Delta s\right| \\ &\le 0.876^{-3}\cdot 20 + 3\cdot 3450\cdot 0.876^{-4}\cdot 0.002 = 64.9 .\end{aligned}$$

Lopulta

$$\rho = (5132.2\pm 64.9)\ \text{kg/m}^3 = \underline{\underline{(5130\pm 70)\ \text{kg/m}^3}} .$$

Tarvittavat laskut voi suorittaa TI-laskimella vaikkapa seuraavasti

$$\text{Define } \rho = \frac{m}{s^3}$$

$$\rho \,\Big|\, m = 3450 \text{ and } s = 0.876 \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 5132.2$$

Tiheyden virheen itseisarvon ylärajaksi saadaan 64.9 laskinlausekkeesta

$$\left|\frac{d}{dm}(\rho)\right|\Delta m + \left|\frac{d}{ds}(\rho)\right|\Delta s \underbrace{\Big|}_{\text{with-operaattori}} m=3450 \text{ and } s=0.876 \text{ and } \Delta m=20 \text{ and } \Delta s=0.002$$

Edellistä laskinsyötettä koskevia huomautuksia.

1. With-operaattoria edeltävään lausekkeeseen voi muuttujanimien Δm ja Δs paikalle laskimeen tietenkin kirjoittaa niiden arvot 20 ja 0.002, jolloin syötteestä tulee huomattavasti lyhyempi, mutta samalla epähavainnollisempi.

2. Muuttujien m ja s todellisten virheiden **merkinnät Δm ja Δs kannattaa korvata** TI-laskimessa helpommin kirjoitettavilla merkinnöillä *dm* ja *ds.*

3. Jos kuitenkin haluaisit käyttää TI-laskimessa merkintöjä Δm ja Δs, niin Δ-symboli olisi haettava laskimen symbolivalikosta kreikkalaisten kirjaimien Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, … joukosta. Vaikka ennen kirjaimen valintaa painaisit vielä $\boxed{\Uparrow\text{shift}}$-näppäintä saadaksesi symbolin näkyviin isona deltana Δ, niin se muuttujanimen kirjaimena kuitenkin jatkossa tulostuisi pikku-deltana δ.
TI-laskimen symbolivalikossa on kyllä muitakin kolmion näköisiä merkkejä, joilla on kuitenkin omat matemaattiset merkityksensä eikä niitä siksi voi käyttää muuttujanimen kirjaimena.

Esimerkki. Laske kolmion ala $A = 0.5bc\sin(\alpha)$ virherajoineen, kun $b = 2.0 \pm 0.1$, $c = 3.0 \pm 0.2$ ja $\alpha = (98 \pm 3)°$

TI-laskinta tehokkaasti hyödyntäen radiaanimoodissa saadaan komennoilla

$$\text{Define } A = 0.5b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

$$A \,\Big|\, b = 2 \text{ and } c = 3 \text{ and } \alpha = 98° \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 2.9708$$

Seuraava virherajan pitkä lauseke on kirjoitettava yhdelle riville

$$\left|\frac{d}{db}(A)\right|\Delta b + \left|\frac{d}{dc}(A)\right|\Delta c + \left|\frac{d}{d\alpha}(A)\right|\Delta\alpha \;\Big|\; b = 2 \text{ and } c = 3 \text{ and}$$

$$\alpha = 98° \text{ and } \Delta b = 0.1 \text{ and } \Delta c = 0.2 \text{ and } \Delta\alpha = 3° \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 0.3685$$

Yhteenvetona edellisistä tuloksista kolmion alalle saadaan lopulta arvio

$$A = 2.9708 \pm 0.3685 = 3.0 \pm 0.4 \ .$$

Virherajan laskemisessa tarvittavaa pitkää syötettä voi tietenkin havainnollisuuden kustannuksella lyhentää kirjoittamalla muuttujien virherajat suoraan lausekkeeseen kuten jo edellisessä esimerkissä todettiin.
Huomaa myös edellisen sivun ohje koskien Δ-symbolin käyttöä laskimessa TI-nspire CX CAS.

Vanhalla numeerisella funktiolaskimella laskemista varten virheraja määritettäisiin seuraavasti:

$$\begin{aligned}\Delta A \approx dA &= A'_b \cdot db + A'_c \cdot dc + A'_\alpha \cdot d\alpha \\ &= 0.5c\sin\alpha \cdot db + 0.5b\sin\alpha \cdot dc + 0.5bc\cos\alpha \cdot d\alpha\end{aligned}$$

josta edelleen

$$\begin{aligned}|\,\Delta A\,| &\le |0.5c\sin\alpha \cdot db| + |0.5b\sin\alpha \cdot dc| + |0.5bc\cos\alpha \cdot d\alpha| \\ &\le 0.5 \cdot 3 \cdot \sin 98° \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 2 \cdot \sin 98° \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot |\cos 98°| \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{180} \\ &= 0.3685\end{aligned}$$

Huomaa, että tylpän kulman kosini $\cos 98°$ on negatiivinen ja sen itseisarvo on laskettava vastalukuna $-\cos 98°$, sillä vanha funktiolaskin ei ehkä tunne itseisarvofunktiota. Kulman virheraja on myös itse muutettava radiaaneiksi muotoon $3 \cdot \pi/180$, koska vanhassa funktiolaskimessa ei ole mahdollisuutta käyttää asteen tunnusta ° ja kulmamoodin valinta vaikuttaa vain siihen, että trigonometristen funktioiden **sisällä** olevat argumentit tulkitaan annetuiksi asteina.

Kolmion alalle saadaan vanhaakin laskinta käyttäen lopulta sama arvio

$$A = 2.9708 \pm 0.3685 = 3.0 \pm 0.4 \ .$$

Harjoitustehtäviä

14.1 Laske lämpötilan $T = T(x,y,z) = 2x^2y + 3y^2z^3$ todellinen muutos ja kokonaisdifferentiaali siirryttäessä

v) pisteestä $(x,y,z) = (3,2,1)$ pisteeseen (2.9, 2.2, 1.1)

a) pisteestä $(x,y,z) = (3,4,5)$ pisteeseen (3.1, 3.8, 5.2).

14.2 Määritä kolmion alan $A = 0.5ab\sin\gamma$ todellinen muutos ja kokonaisdifferentiaali, kun

v) sivu a kasvaa arvosta 4 arvoon 4.1, sivu b kasvaa arvosta 5 arvoon 5.2 ja kulma γ vähenee arvosta $97°$ arvoon $96°$

a) sivu a vähenee arvosta 6 arvoon 5.8, sivu b vähenee arvosta 3 arvoon 2.9 ja kulma γ kasvaa arvosta $97°$ arvoon $98°$.

14.3 Määritä virta $I = \frac{U}{R}$ virherajoineen kokonaisdifferentiaalia käyttäen, kun

v) $U = (230 \pm 5)\mathrm{V}$ ja $R = (150 \pm 10)\Omega$

a) $U = (1.2 \pm 0.1)\mathrm{V}$ ja $R = (2.1 \pm 0.2)\Omega$

14.4 Määritä teho $P = \frac{U^2}{R}$ virherajoineen kokonaisdifferentiaalia käyttäen, kun

v) $U = (230 \pm 5)\mathrm{V}$ ja $R = (150 \pm 10)\Omega$

a) $U = (1.2 \pm 0.1)\mathrm{V}$ ja $R = (2.1 \pm 0.2)\Omega$

14.5 Laske suoran ympyrälieriön tiheys virherajoineen, kun lieriön pohjan säde, korkeus ja massa ovat

v) $r = (2.1 \pm 0.1)\mathrm{m}$, $h = (3.4 \pm 0.2)\mathrm{m}$, $m = (93000 \pm 1000)\mathrm{kg}$

a) $r = (3.2 \pm 0.2)\mathrm{m}$, $h = (2.4 \pm 0.1)\mathrm{m}$, $m = (270000 \pm 10000)\mathrm{kg}$.

14.6 Määritä kolmion ala virherajoineen kokonaisdifferentiaalia käyttäen, kun

v) $a = 12.3 \pm 0.1$, $b = 23.4 \pm 0.2$ ja $\gamma = (123 \pm 1)°$

a) $a = 321 \pm 2$, $b = 432 \pm 3$ ja $\gamma = (135 \pm 2)°$.

b) $b = 2.3 \pm 0.1$, $c = 3.4 \pm 0.2$ ja $\alpha = (123 \pm 4)°$.

14.7 Määritä kolmion ala Heronin kaavalla $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p puolipiiri) virherajoineen laskinta hyödyntäen, kun

v) $a = 3.0 \pm 0.1$, $b = 4.0 \pm 0.2$ ja $c = 5.0 \pm 0.3$

a) $a = 50 \pm 2$, $b = 60 \pm 3$ ja $c = 70 \pm 4$.

14.8 Määritä suorakulmaisen kolmion terävä kulma α virherajoineen, kun

v) kolmion kateetti $a = 3.00 \pm 0.01$ ja hypotenuusa $c = 5.00 \pm 0.02$

a) kolmion kateetti $a = 321 \pm 3$ ja hypotenuusa $c = 654 \pm 4$

15. DERIVOINTIMENETELMIÄ

15.1 Parametrimuotoisen funktion derivointi

Esimerkki. Yhtälöt $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ määrittelevät *y*:n muuttujan *x* funktioksi. Näin määräytyvän funktion derivaatta $\dfrac{dy}{dx}$ arvoa $t = 2$ vastaavassa kohdassa $x = 8$ voidaan nyt määrittää kahdellakin eri tavalla.

Tapa 1. Eliminoidaan parametri $t = x^{1/3}$, jolloin saadaan

$$y = x^{2/3} + 1$$

$$y'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$y'(8) = \frac{2}{3} \cdot 8^{-1/3} = \frac{1}{3}$$

Huomaa, että parametrin eliminointi ei kuitenkaan aina onnistu!

Tapa 2. Derivoidaan molemmat yhtälöt *x*:n suhteen ottaen huomioon, että *t* ja *y* riippuvat muuttujasta *x*:

$$\begin{cases} 1 = 3t^2 \cdot \dfrac{dt}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{3t^2} \\ \dfrac{dy}{dx} = 2t \cdot \dfrac{dt}{dx} \end{cases}$$

Sijoittamalla $\dfrac{dt}{dx}$ alempaan yhtälöön saadaan

$$\frac{dy}{dx} = 2t \cdot \frac{1}{3t^2} = \frac{2}{3t} \overset{\text{kohdassa } t=2}{=} \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

Huomautus. Parametriesityksen $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ määrittelemälle funktiolle $y = y(x)$ voidaan yo tavalla 2 johtaa helposti muistettava ja luonnollisen tuntuinen kaava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} .$$

Esimerkki. Edellinen esimerkki voidaan nyt laskea seuraavastikin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t} \overset{\text{Sijoita } t=2}{=} \frac{1}{3}$$

15.2 Ratkaisemattoman funktion derivointi

Yhtälön $F(x,y)=0$ määrittelemä funktio $y=y(x)$ voidaan toisinaan derivoida ehkä useillakin eri tavoilla:

Tapa 1. Joskus voidaan siirtyä ratkaistuun muotoon, joka derivoidaan normaaleilla derivointisäännöillä.

Tapa 2. Derivoidaan yhtälön $F(x,y)=0$ molemmat puolet muuttujan x suhteen ottaen huomioon, että y riippuu muuttujasta x. Saadusta yhtälöstä ratkaistaan lopuksi derivaattafunktio y' muuttujien x ja y lausekkeena.

Tapa 3. Käytetään kaavaa $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, joka voidaan todistaa tavalla 2.

Tapa 4. Derivoinnin voi suorittaa kehittyneillä apuvälineillä.

Esimerkki. Seuraavassa lasketaan yhtälön $x^3+y^3=9$ määrittelemän funktion $y=y(x)$ derivaatan arvo kohdassa $x=2$ kaikilla edellä mainituilla tavoilla.

Tapa 1. Lähtöyhtälöstä voidaan ratkaista $y=y(x)$, joka sitten derivoidaan:

$$y(x)=\sqrt[3]{9-x^3}=(9-x^3)^{1/3}$$

$$y'(x)=\frac{1}{3}(9-x^3)^{-2/3}(-3x^2)$$, josta sijoittamalla $y'(2)=-4$

Tapa 2. Derivoidaan lähtöyhtälö muuttujan x suhteen muistaen, että $y=y(x)$:

$$x^3+\big(y(x)\big)^3=9$$

$$3x^2+3\big(y(x)\big)^2\cdot y'(x)=0$$

Saadusta yhtälöstä ratkaistaan $y'(x)$ ja siihen sijoitetaan x:lle arvo 2 sekä y:lle se arvo, joka y:llä on alkuperäisen yhtälön mukaan x:n ollessa 2 :

$$y'(x)=-\frac{3x^2}{3\big(y(x)\big)^2}$$ | Kun $x=2$, niin $2^3+y^3=9 \quad \Leftrightarrow \quad y=1$

$$y'(2)=-4$$

Tapa 3. Koska $x^3+y^3=9 \Leftrightarrow F(x,y)=x^3+y^3-9=0$, niin $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{3x^2}{3y^2}$.

Tästä saadaan laskettua $y'(2)$ aivan kuten tavassa 2.

Tapa 4. TI-laskimella saadaan rakenteen

impDif(yhtälö, vapaa muuttuja, riippuva muuttuja, [derivaatan kertaluku])

mukaisella komennolla $\text{impDif}(x^3+y^3=9, x, y)$ derivaatalle sama derivaatan yleinen lauseke $-x^2/y^2$ kuin on edelläkin saatu tavoilla 2 ja 3.

15.3 Logaritminen derivointi

Tulomuotoisen lausekkeen **käsin tapahtuvaa** derivointia ja differentiointia voi usein helpottaa ottamalla lausekkeesta ensin luonnollisen logaritmin seuraavan esimerkin tapaan. Laskinta hyödynnettäessä logaritmista derivointia tai differentiointia ei kannata edes yrittää käyttää.

Esimerkki. Derivoi $y(x)=\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+4)^{1/2}}$.

Ottamalla kummaltakin puolelta luonnollinen logaritmi saadaan

$$\ln(y(x))=2\ln(x+1)+3\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4).$$

Derivoidaan yhtälön molemmat puolet muuttujan x suhteen ottaen huomioon, että y riippuu x:stä, jolloin saadaan

$$\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)=2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\qquad\Big|\cdot y(x)$$

$$y'(x)=y(x)\cdot\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)=\frac{(x+1)^2(x+2)^3}{\sqrt{x+4}}\cdot\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)$$

Esimerkki. Laske $u=\dfrac{x^2y^3}{z^4}$ virherajoineen, kun $\begin{cases}x=22.2\pm0.2\\ y=33.3\pm0.3\\ z=44.4\pm0.4\end{cases}$.

Mittaustuloksista saadaan $u=\dfrac{22.2^2\cdot33.3^3}{44.4^4}=4.6828$.

Alkuperäisestä yhtälöstä saadaan logaritmin otolla

$$\ln u=2\ln x+3\ln y-4\ln z\ .$$

Muodostetaan molempien puolten (kokonais)differentiaalit, jotka merkitään yhtä suuriksi

$$\frac{1}{u}\Delta u=2\frac{1}{x}\Delta x+3\frac{1}{y}\Delta y-4\frac{1}{z}\Delta z.$$

Ottamalla itseisarvo ja käyttäen kolmioepäyhtälöä tästä saadaan edelleen

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right|=\left|2\frac{\Delta x}{x}+3\frac{\Delta y}{y}-4\frac{\Delta z}{z}\right|\le\left|2\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|3\frac{\Delta y}{y}\right|+\left|4\frac{\Delta z}{z}\right|$$

$$\le 2\cdot\frac{0.2}{22.2}+3\cdot\frac{0.3}{33.3}+4\cdot\frac{0.4}{44.4}=0.08108\qquad\Big|\cdot u$$

$$|\Delta u|\le u\cdot0.08108=4.6828\cdot0.08108=0.3797$$

Lopulta

$$u=4.6828\pm0.3797=4.7\pm0.4$$

Harjoitustehtäviä

15.1 Yhtälö **v)** $3x^2+1-e^y=0$ **a)** $3x^2+1-\ln y=0$ määrittelee y:n muuttujan x funktioksi $y=y(x)$. Määritä $y'(x)$ mahdollisimman monella eri tavalla sekä käsin laskien että laskinta tehokkaasti hyödyntäen.

15.2 Määritä käyrän **v)** $(x-2)y^3+xy=3x$ **a)** $(x-2)y^2+xy^3=54$ kohdassa $x=2$ olevaan pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö sekä käsin laskien että laskinta tehokkaasti hyödyntäen.

15.3 Määritä käyrän **v)** $\begin{cases} x=e^t \\ y=t^2+2t+1 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} x=t^3+5t \\ y=t^2+2t+1 \end{cases}$

arvoa $t=0$ vastaavaan pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö sekä käsin laskien että laskinta tehokkaasti hyödyntäen.

15.4 Määritä sekä käsin laskien että laskimella $y'(1)$, kun

v) $y(x)=\dfrac{(2x+1)^3(4x+1)^5}{(6x+1)^7}$ **a)** $y(x)=\dfrac{x^3(2x-1)^4}{(3x-2)^5}$

15.5 Määritä logaritmista differentiointia käyttäen

v) $T=2\pi\cdot\dfrac{x^3\cdot e^{y/7}}{\sqrt[3]{z}}$ virherajoineen, kun $x=99\pm1$, $y=7.7\pm0.1$ ja

$z=55\pm2$

a) heilurin heilahdusaika $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ virherajoineen, kun

$l=(1.234\pm0.001)\,\mathrm{m}$ ja $g=(9.8070\pm0.0005)\,\mathrm{m/s^2}$

16. MÄÄRÄÄMÄTÖN INTEGRAALI

Määritelmä. Funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ **integraalifunktio,** jos
$$F'(x) = f(x).$$

Esimerkki. Funktion $f(x) = x^2$ integraalifunktio on esimerkiksi $F(x) = \frac{x^3}{3}$, sillä $F'(x) = x^2 = f(x)$.

Funktiolla $f(x)$ on muitakin integraalifunktioita kuten $\frac{x^3}{3} + 4$ ja $\frac{x^3}{3} - 5.2$.

On selvää, että kaikki muotoa $\frac{x^3}{3} + C$ olevat funktiot ovat $f(x)$:n integraalifunktioita, kun C on mielivaltainen vakio.

Seuraavan lauseen mukaan funktiolla $f(x)$ ei ole muita integraalifunktioita.

Lause. Jos $F(x)$ on jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio, niin tarkalleen kaikki funktion $f(x)$ integraalifunktiot ovat $F(x) + C$, kun C käy läpi kaikki reaaliluvut.

Määritelmä. Funktion $f(x)$ **määräämätön integraali** $\int f(x)dx$ tarkoittaa funktion $f(x)$ kaikkien integraalifunktioiden joukkoa, toisin sanoen jos $F(x)$ on jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio, niin
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
missä $C \in \mathbb{R}$.

Merkintä $\int f(x)dx$ luetaan "(määräämätön) integraali äf äx dee äx".

Esimerkki. Integroidaan $\sin x$ (eli etsitään sen määräämätön integraali):
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$
sillä $D(-\cos x) = -(-\sin x) =$ integroitavana oleva funktio $\sin x$.

Vastaavasti voidaan todeta, että $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, sillä $D\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2$

Seuraavaksi käymme läpi perusfunktioiden integroimissäännöt, jotka kannattaa opetella ulkoa, vaikkakin ne on aina helppo tarkistaa derivoimalla.

Lause.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ , kun } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Todistus. Edellä esitetyt perusfunktioiden integroimissäännöt voi todistaa derivoimalla määräämättömälle integraalille annetun lausekkeen ja toteamalla, että sen derivaatta on integroitavana ollut funktio.

Esimerkki. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$

Esimerkki. $\int 1 \; dx = \begin{cases} x + C \quad \text{(keksimällä)} \\ \int x^0 \; dx = \frac{x^1}{1} + C = x + C \end{cases}$

Huomaa, että integraali $\int 1\, dx$ lyhennetään usein muotoon $\int dx$, mutta ei kuitenkaan laskimissa, sillä niissä integroitava funktio on merkittävä näkyviin.

Lause. Summan integraali on integraalien summa ts.

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx .$$

Monikerran integraali on integraalin monikerta ts.

$$\int k \cdot f(x) \; dx = k \cdot \int f(x)\, dx .$$

Todistus. Oikean puolen derivaatta = vasemman puolen integroitava funktio.

Esimerkki. $\int (6x^2 + 4x + 3) dx = \int 6x^2 dx + \int 4x^1 dx + \int 3 \cdot 1 dx$

$= 6\int x^2 dx + 4\int x^1 dx + 3\int 1 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + C$

$= 2x^3 + 2x^2 + 3x + C$

Rutiinin kasvaessa osan esimerkin välivaiheista voi jättää pois.

Huomautus. Derivointisäännöistä poiketen tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion integroimiseksi ei ole yleisiä sääntöjä.

Monet tulot, osamäärät ja yhdistetyt funktiot voidaan kyllä integroida tapauskohtaisilla menettelytavoilla, mutta on hyvinkin yksinkertaisia lausekkeita, joiden integraaleja ei voi lausua alkeisfunktioiden avulla.

Esimerkki. Tulo $(x-1)(x+1)$ voidaan derivoida joko ensin aukikertomalla ja lopuksi derivoimalla tai tulon derivointisääntöä käyttäen.

Koska ei ole yleistä "tulon integroimissääntöä", niin tulo $(x-1)(x+1)$ voidaan integroida vain suorittamalla ensin kertolasku:

$$\int (x-1)(x+1)\,dx = \int (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Esimerkki. Koska ei ole osamäärän integroimissääntöä, niin seuraava integraali on laskettava suorittamalla ensin jakolasku:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int (x+1+\frac{1}{x})\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C.$$

Esimerkki. Funktio $e^{(x^2)}$ voidaan derivoida ketjusäännöllä: $D(e^{(x^2)}) = e^{(x^2)} \cdot 2x$.

Voidaan osoittaa, että ei ole olemassa sellaista alkeisfunktiota, jonka derivaatta olisi $e^{(x^2)}$. Koska kaikki tällä kurssilla esiintyvät funktiot ovat alkeisfunktioita, niin emme me eikä myöskään TI-laskin voi laskea integraalia $\int e^{(x^2)}\,dx$.

Esimerkin alussa olleen derivoinnin perusteella hankalamman näköinen integraali $\int e^{(x^2)} \cdot 2x\,dx$ on esitettävissä alkeisfunktioiden avulla muodossa $e^{(x^2)} + C$.

Huomautus. Seuraavan lauseen avulla voidaan integroida sellaiset yhdistetyt funktiot, joissa sisäfunktiona on integroimismuuttuja vakiolla kerrottuna. Lause voidaan todeta oikeaksi derivoimalla oikean puolen lausekkeet.

Lause. Jos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, niin

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax) + C.$$

Erityisesti

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax) + C$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + C$$

Huomautus. Jos integroivassa funktiossa on muuttujan x paikalla sisäfunktio ax, niin integraalissakin on x:n paikalla ax ja lisäksi integraalifunktio tarvitsee "korjauskertoimen" $\frac{1}{a}$, joka kumoaa sisäfunktion derivaataksi tulevan a:n .

Esimerkki. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\cdot e^{3x} + C$

$$\int \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cdot\cos(5x) + C$$

$$\int \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx) + C$$

Huomautus. Edellisen esimerkin mukaiset ilman apuvälineitä suoritetut integroinnit kannattaa aina tarkistaa derivoimalla vastaus.

Huomautus. Edellinen lause yleistyy myös niihin tilanteisiin, missä sisäfunktiona on ax:n asemasta muotoa $ax+b$ oleva lauseke:

Lause. Jos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, niin

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C\ .$$

Erityisesti

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C\text{ , kun } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b| + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b} + C$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b) + C$$

Esimerkki. $\int (7x+2)^3\,dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4} + C$

$$\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\cdot\ln|4x-3| + C$$

$$\int e^{3x+6}dx = \frac{1}{3}\cdot e^{3x+6} + C$$

$$\int \sin(5x-7)\,dx = -\frac{1}{5}\cdot\cos(5x-7) + C$$

Esimerkki. $\int \cos(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\cdot \sin(kx+b)+C$

$$\int \left(2e^{3t+4}+5\cos(6t+7)\right)dt = 2\int e^{3t+4}dt + 5\int \cos(6t+7)\,dt$$
$$= \frac{2}{3}e^{3t+4}+\frac{5}{6}\sin(6t+7)+C$$

Huomautus. Jos integroitavana on yhdistetty funktio $f(s(x))$ kerrottuna sisäfunktion $s(x)$ derivaatalla $s'(x)$, niin voi käyttää seuraavaa lausetta. Lauseen ja vastaavat esimerkit voi todeta oikeiksi derivoimalla saadun vastauksen.

Lause. Jos $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, niin

$$\int f(s(x))\cdot s'(x)\,dx = F(s(x))+C.$$

Erityisesti

$$\int (s(x))^n \cdot s'(x)\,dx = \frac{(s(x))^{n+1}}{n+1}+C \text{ , kun } n \neq -1$$
$$\int \frac{s'(x)}{s(x)}\,dx = \ln|s(x)|+C$$
$$\int e^{s(x)}\cdot s'(x)\,dx = e^{s(x)}+C$$
$$\int \sin(s(x))\cdot s'(x)\,dx = -\cos(s(x))+C$$
$$\int \cos(s(x))\cdot s'(x)\,dx = \sin(s(x))+C$$

Esimerkki. $\int \sin(\underbrace{x^2}_{\text{sf}})\cdot \underbrace{2x}_{\text{sfd}}\,dx = -\cos(x^2)+C$ | sf ≙ sisäfuntio, sfd ≙ sisäfunktion derivaatta

$$\int \cos(x^3)\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(\underbrace{x^3}_{\text{sf}})\cdot \underbrace{3x^2}_{\text{sfd}}\,dx = \frac{1}{3}\sin(x^3)+C$$

$$\int e^{(3x^2)}\cdot x\,dx = \frac{1}{6}\int e^{\overbrace{(3x^2)}^{\text{sf}}}\cdot \underbrace{6x}_{\text{sfd}}\,dx = \frac{1}{6}e^{(3x^2)}+C$$

$$\int 5(x^4+1)^6\cdot x^3\,dx = \frac{5}{4}\int (\underbrace{x^4+1}_{\text{sf}})^6\cdot \underbrace{4x^3}_{\text{sfd}}\,dx = \frac{5}{4}\cdot\frac{(x^4+1)^7}{7}+C$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2}^{\text{sfd}}}{\underbrace{x^3+1}_{\text{sf}}}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$$

Huomautus. Integraalin $\int f(x)\,dx$ (ilman integroimisvakiota) voi laskea käyttäen esimerkiksi TI-laskimen sopivaa lausekemallia.

Harjoitustehtäviä

16.1 Laske sekä käsin että laskimella seuraavat integraalit. Tarkista tuloksesi derivoimalla käsin!

a) $\int x^2 dx$	**b)** $\int \sqrt{x}\, dx$	**c)** $\int \frac{1}{x^3} dx$
d) $\int \sqrt[3]{t}\, dt$	**e)** $\int dt$	**f)** $\int \frac{dt}{t}$
g) $\int e^{3y} dy$	**h)** $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$	**i)** $\int \sin(2x)\, dx$
j) $\int (2t^2+3t+4) dt$	**k)** $\int (2t+3)^2 dt$	**l)** $\int \frac{2x+3}{x} dx$
m) $\int \frac{5t^4+3}{2t} dt$	**n)** $\int \sqrt{5x+2}\, dx$	**o)** $\int \left(3x-\frac{2}{x}\right)^2 dx$
p) $\int (3x+2t)^2 dx$	**q)** $\int e^{5t-2} dt$	**r)** $\int \sin(3x+t) dx$
s) $\int (x+1)(x+2)\, dx$	**t)** $\int x^2 \cdot \sin(x^3) dx$	**u)** $\int 5xe^{x^2+1}\, dx$
v) $\int \sin x \cdot e^{\cos x}\, dx$	**x)** $\int \cos x \cdot (\sin x+1)^{10} dx$	
y) $\int \frac{t^2}{t^3+2} dt$	**z)** $\int \frac{t}{(t^2+1)^{10}} dt$	

16.2 Kaavoja $D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ja $D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

käyttäen todista, että (positiivisilla a:n arvoilla)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

16.3 Tutki derivoimalla, mikä seuraavista vaihtoehdoista on oikea**:**

$$\int t \cdot \cos t\, dt = \begin{cases} 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) + C \\ \frac{t^2}{2} \cdot \sin t + C \\ \cos t + t \cdot \sin t + C \end{cases}$$

17. MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

Määrättyä integraalia (ja muita ”summaintegraaleja” kuten viiva-, pinta- ja tilavuusintegraaleja) voidaan käyttää sellaisten suureiden arvon laskemiseen, joiden arvo on osiensa summa.

Monet fysiikan ja tekniikan suureet ovat tällaisia: pinta-ala, tilavuus, massa, kuljettu matka, tehty työ, matkan kulkemiseen kuluva aika, hitausmomentti, siirtyneen varauksen määrä, …

Toisenlaisia suureita ovat esimerkiksi ilo (jaettu ilo on kaksinkertainen ilo) ja kristallimaljakon arvo (ehjän maljakon arvo on suurempi kuin sirpaleiden arvojen summa).

Määrättyä integraalia käytetään apuna silloin, kun summattava suure on jakautunut tietyn janan varrelle.

Viiva-, pinta- ja tilavuusintegraalia käytetään puolestaan silloin kun summattava suure on jakautunut jollekin kaarevalle reitille tai jollekin pinnalle tai jonkin kolmiulotteisen kappaleen sisään.

Määrätyn integraalin havainnollinen määritelmä: Olkoon $a < b$.

Määrätty integraali $\int\limits_{x=a}^{b} f(x)\,dx$ on äärettömän monen, äärettömän pienen, tulomuotoisen termin $f(x)\cdot dx$ summa väliltä $a \le x \le b$, kun differentiaalit dx peittävät kyseisen välin tarkalleen kertaalleen.

Jos em integraalissa on (poikkeuksellisesti) $a > b$, niin differentiaalit dx ovat negatiivisia, koska silloin x muuttuu suuremmasta pienempään päin.

Määrätyn integraalin laskusääntö: Kaikilla rajojen a ja b arvoilla

$$\int\limits_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \Big|_{x=a}^{b} F(x) = F(b) - F(a)$$

missä $F(x)$ on funktion $f(x)$ jokin integraalifunktio.

Huomautus. Edellinen laskusääntö luetaan ääneen vaikkapa seuraavasti:
”(Määrätty) integraali äx käy aasta beehen äf äx dee äx
on yhtä suuri kuin sijoitus äx käy aasta beehen iso äf äx
on yhtä suuri kuin iso äf ylärajalla bee miinus iso äf alarajalla aa.”

Huomautus. Määrätty integraali ja sijoitus merkitään kirjallisuudessa ja laskimissa lyhyemmin $\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x)$ **,** sillä jo integraalin differentiaalista dx käy ilmi se muuttuja x, jonka suhteen integrointi ja sijoitus suoritetaan.
Tässä opuksessa käytetään kuitenkin poikkeuksellisesti pidempää merkintää, joka muistuttaa selvemmin summamerkintää.

Esimerkki. $\int\limits_{x=2}^{4} x^2\,dx = \Big|_{x=2}^{4} \frac{x^3}{3} = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{56}{3}$

Saman saa täydentämällä TI-laskimen sopivan lausekemallin muotoon $\int_2^4 x^2 dx$.

Huomautus. Määrätyn integraalin lopullisen arvoon ei saa ”varmuuden vuoksi” lisätä mitään integroimisvakiota. Jos käytät integroimisvakiota integraalifunktiossa ennen kuin lasket integraalifunktion erotuksen ylä- ja alarajoilla, niin käyttämäsi vakio kuitenkin häviää ja siksi sitä ei yleensä edes merkitä välivaiheissa näkyviin määrättyä integraalia laskettaessa:

$$\int\limits_{x=2}^{4} x^2\,dx = \Big|_{x=2}^{4} \left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \left(\frac{4^3}{3} + \cancel{C}\right) - \left(\frac{2^3}{3} + \cancel{C}\right) = \frac{56}{3}.$$

Lause.

$$\int\limits_{x=a}^{b} \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int\limits_{x=a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{x=a}^{b} g(x)dx$$

$$\int\limits_{x=a}^{b} k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int\limits_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{x=a}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_{x=b}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{x=a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{x=c}^{b} f(x)\,dx$$

Huomautus. Lauseen kolmannessa kohdassa esitetyn integroimisrajojen vaihdon yhteydessä jompikumpi integraaleista lasketaan pienemmästä suurempaan päin ja toinen suuremmasta pienempään päin, jolloin x:n differentiaalit dx ovat erimerkkisiä ja aiheuttavat kaavassa esiintyvän merkkimuutoksen.

Lauseen viimeisessä kohdassa apupiste c valitaan usein sellaiseksi välin $[a, b]$ sisäpisteeksi, jossa integroitava funktio muuttuu, mutta piste c voi olla myös alkuperäisen integroimisvälin ulkopuolellakin, jolloin ”ylimenevä” osa lasketaan kahteen kertaan, mutta eri suuntiin, jolloin sen vaikutus nollautuu.

Esimerkki. $\int\limits_{x=-2}^{3} |2x|\,dx = \int\limits_{x=-2}^{0} |2x|\,dx + \int\limits_{x=0}^{3} |2x|\,dx = \int\limits_{x=-2}^{0} -2x\,dx + \int\limits_{x=0}^{3} 2x\,dx$

$= -\Big|_{x=-2}^{0} x^2 + \Big|_{0}^{3} x^2 = -(0^2-(-2)^2)+(3^2-0^2) = 13$

Esimerkki. $\int\limits_{x=1}^{2} 3x^2\,dx = \Big|_{x=1}^{2} x^3 = 2^3 - 1^3 = 7$

Saman voi laskea myös työläämmin ylimääräisen "mutkan kautta" :

$\int\limits_{x=1}^{2} 3x^2\,dx = \int\limits_{x=1}^{3} 3x^2\,dx + \int\limits_{x=3}^{2} 3x^2\,dx = \Big|_{x=1}^{3} x^3 + \Big|_{x=3}^{2} x^3 = \cancel{3^3} - 1^3 + 2^3 - \cancel{3^3} = 7$

Harjoitustehtäviä

17.1 Laske käsin ja laskimella

a) $\int\limits_{x=1}^{2} 6x^2\,dx$ b) $\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \sin(2x)\,dx$ c) $\int\limits_{t=2}^{5} \frac{dt}{t}$

d) $\int\limits_{x=0}^{1} xe^{(x^2)}\,dx$ e) $\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \sin(\varphi)\,dx$ f) $\int\limits_{x=1}^{2} (x+2)(x-1)\,dx$

17.2 Laske käsin ja laskimella **v)** $\int\limits_{x=-\pi/3}^{\pi} |\sin x|\,dx$ **a)** $\int\limits_{x=-3}^{2} |x^3|\,dx$ **.**

Kohtaa v laskin ei pysty laskemaan tarkassa tilassa ilman apuasi.

17.3 Oletetaan, että $\int\limits_{x=-1}^{2} f(x)\,dx = 7$. Laske seuraavista lausekkeista ne, jotka pystyt laskemaan vaikkapa edellä esitettyä lausetta käyttäen:

v1) $\int\limits_{x=-1}^{2} f(5\cdot x)\,dx$ **v2)** $\int\limits_{x=-1}^{2} 5\cdot f(x)\,dx$ **v3)** $\int\limits_{x=-1}^{2} (f(x)+5)\,dx$

v4) $\int\limits_{x=-1}^{2} f(x+5)\,dx$ **v5)** $\left(\int\limits_{x=-1}^{2} f(x)\,dx\right)^3$ **v6)** $\int\limits_{x=2}^{-1} \big(f(x)-1\big)\,dx$

a) $\int\limits_{x=-1}^{2} 2\cdot f(x)\,dx$ **b)** $\int\limits_{x=-1}^{2} (f(x)+2)\,dx$ **c)** $\int\limits_{x=-1}^{2} \big(f(x)\big)^2\,dx$

d) $\int\limits_{x=2}^{-1} f(x)\,dx$ **e)** $\int\limits_{x=-1}^{2} -f(x)\,dx$ **f)** $\int\limits_{1}^{1} f(x)\,dx$

18. INTEGROIMISMENETELMIÄ

18.1 Osittaisintegrointi

Koska

$$D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

niin $f(x)\cdot g(x)$ on oikealla puolella olevan lausekkeen jokin integraalifunktio eli

$$\int \big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)\,dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Näin olemme johtaneet seuraavan osittaisintegrointikaavan:

Lause. $$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Huomautus. Osittaisintegrointia kannattaa käyttää tulon $f(x)\cdot g'(x)$ integroimiseen, jos

- toinen tekijä $f(x)$ helpottuu derivoitaessa (esim. $x, x^2, x^3, \ldots, \ln x, \ldots$)
- toinen tekijä $g'(x)$ ei mutkistu integroitaessa (esim. $e^x, \sin x, \cos x$)

Huomautus. Käsin laskettaessa osittaisintegrointi kannattaa suorittaa seuraavan esimerkin mukaisen kaavion avulla.

Esimerkki.

$$\int x\cdot e^x\,dx$$
$$= x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$
$$= x\cdot e^x - e^x + C$$

$f(x) = x$	$+$	$g'(x) = e^x$
$f'(x) = 1$	$-$	$g(x) = e^x$

Määrätyn integraalin osittaisintegrointisääntö on seuraava. Käsinlaskettaessa kannattaa käyttää samaa kaaviota kuin edellisessäkin esimerkissä.

Lause. $$\int_{x=a}^{b} f(x)\cdot g'(x)\,dx = \Big/_{\!x=a}^{\,b} f(x)\cdot g(x) - \int_{x=a}^{b} f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

18.2 Sijoitusmenetelmä

Integraalin $\int f(x)\,dx$ laskeminen helpottuu joskus, jos integraaliin tehdään sopiva $f(x)$:n muodosta riippuva sijoitus

$$x = g(t).$$

Sijoitusta tehtäessä on huomattava, että dx käyttäytyy kuten differentiaali ts.

$$dx = g'(t)\,dt$$

Jos kyseessä on määräämätön integraali, niin integraalin laskemisen jälkeen on palattava takaisin alkuperäisen muuttujan x käyttöön.
Jos kyseessä on määrätty integraali, niin integroimisrajat on muutettava uutta muuttujaa vastaaviksi.

Esimerkki. Olkoon $a > 0$. Lasketaan integraali

$\int\limits_{x=0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\; dx$ Sijoitetaan: $x = a \cdot \sin t$, $dx = a \cdot \cos t\; dt$
Kun $x : 0 \to a$, niin $t : 0 \to \pi/2$
$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cdot \cos t$
Huomaa juurilausekkeen helpottuminen!

$$= \int\limits_{t=0}^{\pi/2} (a \cdot \cos t)(a \cdot \cos t\; dt) \overset{\substack{\cos(2t)= \\ 2\cos^2 t\text{-}1}}{=} \int\limits_{t=0}^{\pi/2} a^2 \frac{\cos(2t)+1}{2}\, dt = \frac{a^2}{2} \Big|_{t=0}^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin(2t) + t) = \frac{\pi a^2}{4}$$

Huomautus. Jos integroitavana on yhdistetty funktio kerrottuna (vakiotekijää paitsi) sisäfunktion derivaatalla, niin lauseen $\int f(s(x)) \cdot s'(x)\,dx = F(s(x)) + C$ käytön asemasta kannatanee selvyyden vuoksi suosia sijoitusta $t = s(x)$, jolloin $dt = s'(x)\,dx$ ja integraali muuttuu yksinkertaisempaan muotoon seuraavasti:

Esimerkki. $\int \sin^4(2t) \cdot \cos(2t)dt = \int \big(\underbrace{\sin(2t)}_{\text{sisäfunktio}}\big)^4 \cdot \underbrace{\cos(2t)}_{\substack{\text{vakiotekijää} \\ \text{paitsi sfd}}} dt$ | Sij. $z = \sin(2t)$
$dz = 2\cos(2t)dt$

$$= \int z^4 \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{10} z^5 + C = \frac{\sin^5(2t)}{10} + C$$

Harjoitustehtäviä

18.1 Laske käsin osittaisintegrointia tai sijoitusta käyttäen. Tarkista laskimella!

a) $\int x \cdot \sin x\, dx$ **b)** $\int\limits_{t=0}^{\pi} t^2 \cdot e^t\, dt$ **c)** $\int x^2 \cdot e^{(x^3)}\, dx$ **d)** $\int\limits_{t=0}^{1} \sqrt{4 - t^2}\; dt$

19. MÄÄRÄTYN INTEGRAALIN SOVELLUKSIA

Kun määrätyn integraalin avulla lasketaan jonkin summautuvan suureen arvo osiensa summana, niin kyseinen suure jaetaan esimerkiksi

- äärettömän moneen äärettömän lyhyeen pätkään tai
- äärettömän moneen äärettömän kapeaan kaistaleeseen tai
- äärettömän moneen äärettömän ohueen kuoreen

siten, että sopivaa aika- tai paikka-akselia pitkin kuljettaessa kuljetaan jokaisen summattavan alkion läpi tarkalleen kertaalleen.

19.1 Fysikaalisia sovelluksia

Esimerkki. Lasketaan kappaleen aikavälillä $1 \le t \le 5$ kulkema matka, kun kappaleen nopeus on $v = v(t) = 4 + 2t$.

Jaetaan tutkittava aikaväli äärettömän moneen äärettömän lyhyeen osa-aika-väliin. Äärettömän lyhyenä osa-aikavälinä $[t, t+dt]$ kappaleen nopeus on (likimain) vakio $= v(t)$, joten kappale kulkee tänä lyhyenä osa-aikana tasaisella nopeudella osamatkan

$$ds = v(t) \cdot dt\ .$$

Koska kappaleen koko aikavälillä $1 \le t \le 5$ kulkema matka saadaan laskemalla yhteen kaikki äärettömän monta äärettömän pientä tulomuotoista osamatkaa $v(t) \cdot dt$ aikaväliltä $1 \le t \le 5$, niin koko matka saadaan määrätyn integraalin havainnollisen määritelmän mukaisena ∫ummana eli määrättynä integraalina:

$$s = \int_{t=1}^{5} v(t)\,dt = \int_{t=1}^{5} (4+2t)\,dt = \Big|_{t=1}^{5} (4t + t^2) = (4 \cdot 5 + 5^2) - (4 \cdot 1 + 1^2) = 40$$

Esimerkki. Lasketaan matkan $0 \le x \le 100$ juoksemiseen kuluva aika, jos nopeus $v = v(x) = 11 - 10e^{-x/10}$.

Äärettömän lyhyellä osamatkalla $[x, x+dx]$ nopeus on vakio $= v(x)$, joten tämän osamatkan kulkemiseen kuluva osa-aika on $dt = \dfrac{dx}{v(x)}$.

Koko aika saadaan laskemalla yhteen kaikki äärettömän monta, äärettömän pientä tulomuotoista osa-aikaa $\dfrac{1}{v(x)} \cdot dx$ väliltä $0 \le x \le 100$ eli integroimalla

$$t = \int_{x=0}^{100} \frac{dx}{11 - 10e^{-x/10}} \overset{\text{Esitys laskimessa}}{=} \int_{0}^{100} \frac{1}{11 - 10e^{-x/10}}\,dx \overset{\text{Laskimella}}{\approx} 11.27\,.$$

Esimerkki. Lasketaan johtimessa aikavälillä $0 \le t \le 2$ kulkenut varaus, jos virta

$$i(t) = 5(1-e^{-t/10}).$$

Äärettömän lyhyellä aikavälillä $[t, t+dt]$ virta on (likimain) vakio $= i(t)$, joten ko. osa-aikavälillä kulkenut osavaraus on

$$dq = i(t) \cdot dt.$$

Koko varaus saadaan laskemalla yhteen kaikki äärettömän monta, äärettömän pientä tulomuotoista termiä $i(t) \cdot dt$ aikaväliltä [0, 2] eli integroimalla

$$q = \int_{t=0}^{2} i(t)dt = \int_{t=0}^{2} 5(1-e^{-t/10})dt = 5 \Big|_{t=0}^{2} (t+10e^{-t/10}) = 5\big((2+10e^{-0.2})-(0+10e^{0})\big) \approx 0.937$$

Esimerkki. Laske x-akselilla välillä $10 \le x \le 20$ olevan sauvan massa, jos sauvan pituusmassa (eli pituustiheys) on $\rho = \rho(x) = 20 - x$. Pituusmassan yksikkönä on esimerkiksi kg/m, ja pituusmassa kertoo, paljonko metri kyseistä sauvaa "painaa", jos sauva olisi koko pituudeltaan samanlaista.

Äärettömän lyhyellä osavälillä $[x, x+dx]$ sauvan pituusmassa on vakio $= \rho(x)$, joten kyseisen pätkän osamassa on $dm = \rho(x) \cdot dx$.

Koko massa saadaan ∫ummana eli määrättynä integraalina

$$m = \int_{x=10}^{20} \rho(x)\,dx = \int_{x=10}^{20} (20-x)\,dx = \Big|_{x=10}^{20} (20x - \frac{x^2}{2}) = (20 \cdot 20 - \frac{20^2}{2}) - (20 \cdot 10 - \frac{10^2}{2}) = 50$$

Lopputuloksen ymmärtää myös terveellä järjellä: koska sauvan pituus on 10 yksikköä ja pituusmassa muuttuu tarkasteluvälillä tasaisesti arvosta 10 arvoon 0, niin keskimääräinen pituustiheys on 5 yksikköä ja massa siis 50 yksikköä.

Esimerkki. Pyörimisakselista etäisyydellä r olevan massapisteen m hitausmomentti pyörimisakselin suhteen on $J = mr^2$. Johda tätä tietoa käyttäen ohuen homogeenisen sauvan (massa m, pituus L) hitausmomentti sauvan päätepisteen kautta kulkevan sauvaa vastaan kohtisuoran akselin suhteen.

Sijoitetaan sauva x-akselille välille [0, L], jolloin pyörimisakselina on y-akseli.

Äärettömän lyhyellä osavälillä $[x, x+dx]$ oleva massa-alkio on $dm = \frac{m}{L} dx$.

Koska massa-alkion etäisyys pyörimisakselista on x, niin alkion hitausmomentti akselin suhteen on

$$dJ = \text{"massa} \cdot \text{etäisyys}^2\text{"} = \frac{m}{L} x^2\, dx.$$

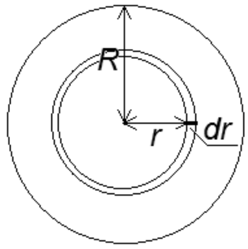
Koko hitausmomentti saadaan ∫ummana

$$J = \int_{x=0}^{L} \frac{m}{L} x^2\, dx = \frac{m}{L} \Big|_{x=0}^{L} \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2.$$

Esimerkki. Määritetään homogeenisen ympyrälevyn (säde R, massa m) hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan levyn tasoa vastaan kohtisuoran akselin suhteen.

Tarkastellaan keskipisteestä etäisyydellä $r \;...\; r+dr$ olevaa ympyrärengasta. Renkaan

- pituus on $2\pi r$
- ala $dA = 2\pi r \cdot dr$
- massa $dm = dA \cdot \rho = 2\pi r \cdot dr \cdot \dfrac{m}{\pi R^2} = \dfrac{2m}{R^2} \cdot r \cdot dr$
- hitausmomentti akselin suhteen $dJ = dm \cdot r^2 = \dfrac{2m}{R^2} r^3 dr$



Levyn hitausmomentti saadaan kaikkien renkaiden hitausmomenttien ∫ummana

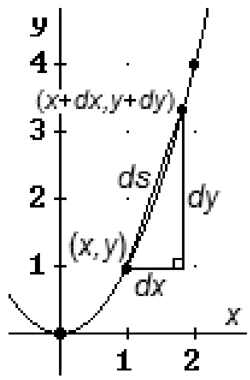
$$J = \int_{r=0}^{R} \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \Big|_{r=0}^{R} \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2$$

Esimerkki. Kuinka suuri työ tehdään, kun kondensaattori, jonka kapasitanssi on C, varataan jännitteestä U_0 jännitteeseen U_1.

Jotta kondensaattorin jännite nousisi U :sta dU:n verran on siihen vietävä varaus $dQ = C \cdot dU$. Varauksen dQ nostaminen jännitteeseen U vaatii työn $dW = U \cdot dQ = C \cdot U \cdot dU$. Koko työ, joka tehdään jännitteen nostamiseksi jännitteestä U_0 jännitteeseen U_1 saadaan ∫ummana

$$W = \int_{U=U_0}^{U_1} C\,U\,dU = \Big|_{U=U_0}^{U_1} C \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{1}{2} C U_1^2 - \frac{1}{2} C U_0^2$$

Esimerkki. Määritetään kaaren $y = x^2$ pituus pisteiden $(0, 0)$ ja $(2, 4)$ välillä.



Tarkastellaan äärettömän lyhyttä kaarialkiota pisteestä (x, y) pisteeseen $(x+dx, y+dy)$. Sen pituus ds saadaan suorakulmaisen kolmion hypotenuusana kateettien ollessa dx ja dy, joten käyttäen derivaatan määritelmää vaiheessa $(*)$ saadaan

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx \overset{(*)}{=} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx.$$

Koko kaaren pituus s saadaan ∫ummana, jossa lasketaan yhteen kaikki tällaiset kaarialkioiden pituudet väliltä $0 \le x \le 2$, ts.

$$s = \int_{x=0}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \overset{\text{laskimella}}{\approx} 4.6468$$

19.2 Pinta-alan laskeminen

Seuraavassa tarkastelemme sellaisen tasokuvion pinta-alaa, jota rajoittavat reunakäyrät ovat muotoa $y = y(x)$ tai $x = x(y)$.

Tarvittavat esitiedot:

Suorakulmion ala $=$ kanta $\cdot$ korkeus

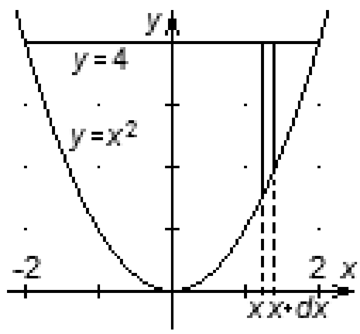
Pystyjanan pituus
$=$ janan yläpisteen y-koordinaatti
miinus janan alapisteen y-koordinaatti
$=$ päätepisteiden y-koordinaattien erotuksen itseisarvo

Vaakajanan pituus
$=$ janan oikean päätepisteen x-koordinaatti
miinus janan vasemman päätepisteen x-koordinaatti
$=$ päätepisteiden x-koordinaattien erotuksen itseisarvo

Alkuoletuksemme mukaista alaa laskettaessa tarkasteltava alue jaetaan äärettömän moneen, äärettömän kapeaan pysty- tai vaakakaistaleeseen. Kaistaleita voi pitää suorakulmioina, sillä kaistaleen päissä olevien pienten ”kolmioiden” osuus koko kaistaleen alaan verrattuna on merkityksetön.

Kaistaleen valinta kannattaa ratkaista seuraavasti:
- Käytä pystykaistaleita, jos reunakäyrät ovat muotoa $y = y(x)$
- Käytä vaakakaistaleita, jos reunakäyrät ovat muotoa $x = x(y)$
- Jos reunakäyrät ovat erimuotoisia tai lausuttavissa kummassa muodossa tahansa, niin käytettävät kaistaleet kannattaa valita siten, että kaistaleet ovat yhdentyyppisiä mikäli mahdollista

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = 4$ rajoittaman alueen ala.

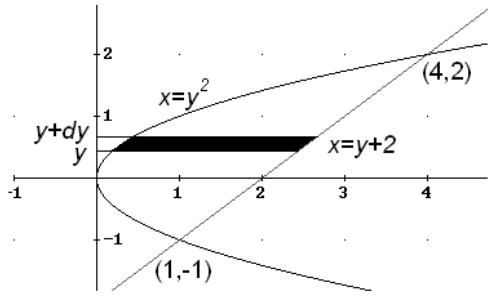


Välillä $[x, x+dx]$ olevan pystykaistaleen ala on $dA = (4 - x^2)\,dx$ ja koko ala saadaan ʃummana

$$A = \int_{x=-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}$$

Esimerkki. Määritä paraabelin $x = y^2$ ja suoran $y = x - 2$ rajoittaman alueen ala.

Edullisin tapa. Koska molemmat reunakäyrät ovat muotoa $x = x(y)$ (suoran yhtälö voidaan helposti esittää myös muodossa $x = y + 2$), niin alue kannattaa jakaa vaakakaistaleisiin. Vaakakaistaleen valintaa tukee myös se, että kaikki vaakakaistaleet ovat samaa tyyppiä: ne rajoittuvat oikealta suoraan ja vasemmalta paraabeliin.



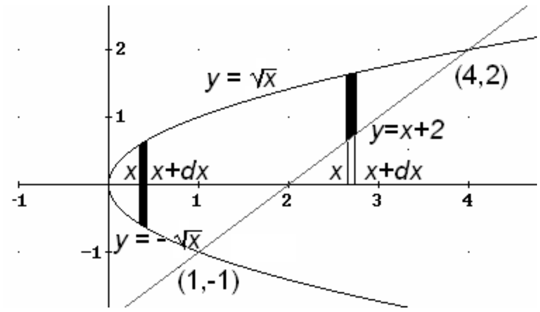
Korkeudella $y \cdots y + dy$ olevan vaakakaistaleen pituus on $(y+2) - y^2$ ja ala

$$dA = (y + 2 - y^2)\,dy$$

Koko ala saadaan ∫ummana eli määrättynä integraalina

$$A = \int_{y=-1}^{2} (y + 2 - y^2)\,dy = 4.5\,.$$

Työläämpi tapa.
Jos käytetään pystykaistaleita, niin paraabelin yhtälöstä on ratkaistava muuttuja $y = \pm\sqrt{x}$, jolloin saadaan hankalammin integroitava funktio kuin edellä. Lisäksi tarkastelualueella on kahdentyyppisiä pystykaistaleita: toiset ulottuvat paraabelilta paraabelille, toiset puolestaan suoralta paraabelille. Kahdentyyppisistä pinta-alkioista johtuen on laskettava kaksi eri integraalia:



Jos $0 \le x \le 1$, niin välillä $x \cdots x + dx$ olevan pystykaistaleen ala on

$$dA_1 = \left(\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right)dx = 2\sqrt{x}\,dx$$

ja niiden summa on

$$A_1 = \int_{x=0}^{1} 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}\ .$$

Jos $1 \le x \le 4$, niin välillä $x \cdots x + dx$ olevan pystykaistaleen ala on

$$dA_2 = \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx$$

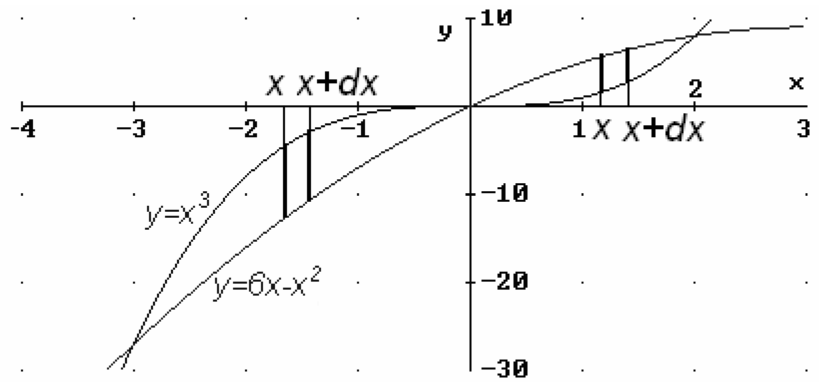
ja niiden summa on

$$A_2 = \int_{x=1}^{4} (\sqrt{x} - x + 2)\,dx = \frac{19}{6}$$

Koko alueen ala on

$$A = A_1 + A_2 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Esimerkki. Määritä käyrien $y = x^3$ ja $y = 6x - x^2$ rajoittaman kuvan mukaisen kaksoisalueen pinta-ala.



Koska reunakäyrät ovat muotoa $y = y(x)$, niin jaamme alueen dx:n levyisiin pystykaistaleisiin. Koska reunakäyrät leikkaavat toisiaan kohdissa $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 2$, niin jaamme tarkastelun kahteen vaiheeseen.

Välillä $-3 \le x \le 0$ olevien pystykaistaleiden ala on

$$dA = \text{korkeus} \cdot \text{kanta} = (x^3 - (6x - x^2)) \cdot dx .$$

Näiden kaistaleiden alojen summa on

$$A_{vasen} = \int_{x=-3}^{0} (x^3 - 6x + x^2)\, dx = 15.75 .$$

Välillä $0 \le x \le 2$ olevien pystykaistaleiden ala on

$$dA = \text{korkeus} \cdot \text{kanta} = ((6x - x^2) - x^3) \cdot dx .$$

Näiden kaistaleiden alojen summa on

$$A_{oikea} = \int_{x=0}^{2} (6x - x^2 - x^3)\, dx = 5.333 .$$

Kaksoisalueen pinta-ala on siis

$$A = A_{vasen} + A_{oikea} = 21.083 .$$

Toisin. Koska jokaisen pystykaistaleen pinta-ala voidaan esittää muodossa

$$dA = \text{korkeus} \cdot \text{kanta} = \left| x^3 - (6x - x^2) \right| \cdot dx ,$$

niin kokonaisala saadaan yhdelläkin integroinnilla

$$A = \int_{x=-3}^{2} \left| x^3 - 6x + x^2 \right| dx = 21.083 .$$

TI-laskin ei tosin pysty laskemaan tätä integraalia kerralla tarkassa tilassa, vaan laskeminen on suoritettava likiarvotilassa.

Itseisarvolausekkeen integrointi käsin edellyttää integroinnin suorittamista alueittain itseisarvojen sisällä olevan lausekkeen merkin mukaan.

19.3 Tilavuuden laskeminen

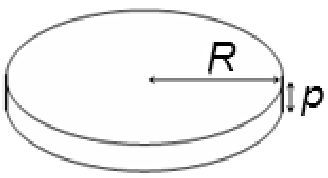
Kappaleen tilavuus lasketaan integroimalla tavallisesti siten, että kappale jaetaan tasavahvuisiin ohuisiin ”kalvoihin”, joiden tilavuus saadaan periaatteella

Ohuen kalvon tilavuus $\approx$ kalvon ala $A \bullet$ kalvon paksuus p

Pyörähdyskappaletta käsiteltäessä tavallisimmat tilavuusalkiot tilavuuksineen ovat seuraavat:

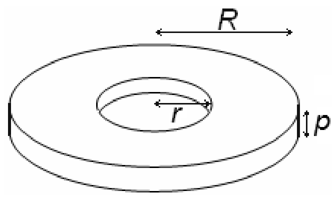
Ympyräkiekko

$V = \pi R^2 p$



Reiällinen ympyräkiekko (”reikäleipä”)

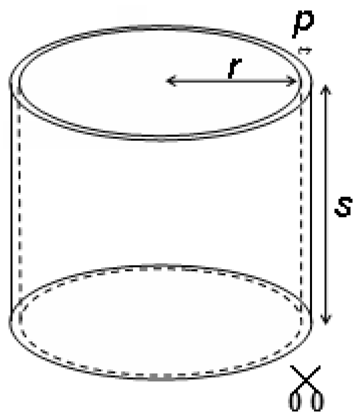
$V = \pi (R^2 - r^2) p$



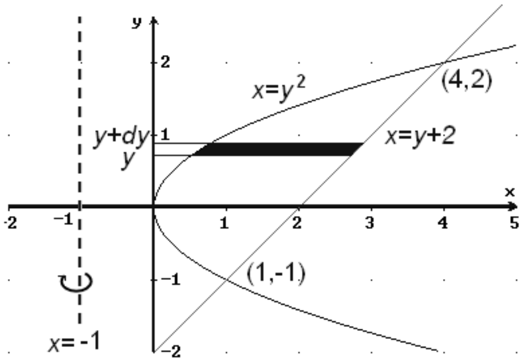
Ohut sylinterin kuori

$V = 2\pi r s p$

(Vinkki: Leikkaa sivuviivaa pitkin ja oikaise vaippa.)



Esimerkki. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy paraabelin $x = y^2$ ja suoran $y = x - 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = -1$ ympäri.



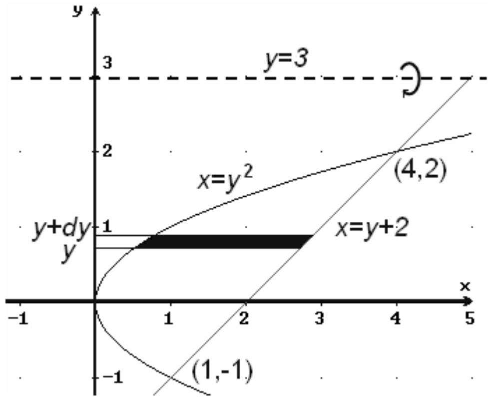
Koska reunakäyrät ovat muotoa $x = x(y)$ ja kaikki vaakakaistaleet ovat samaa tyyppiä, niin alue kannattaa jakaa vaakakaistaleisiin. Korkeudella $y \cdots y + dy$ olevan vaakakaistaleen pyörähtäessä pystysuoran suoran $x = -1$ ympäri, syntyy ”reikäleipä”, jonka paksuus on dy, ulkoreunan säde $R = (y+2) - (-1) = y + 3$ ja reiän säde $r = y^2 - (-1) = y^2 + 1$. Yhden ”reikäleivän” tilavuus on siis

$$dV = \pi (R^2 - r^2) dy = \pi ((y+3)^2 - (y^2+1)^2) dy.$$

Koko kappaleen tilavuus saadaan integroimalla

$$V = \int_{y=-1}^{2} \pi ((y+3)^2 - (y^2+1)^2) dy = \frac{117\pi}{5} \approx 73.5$$

Esimerkki. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy edellisen tehtävän paraabelin $x = y^2$ ja suoran $y = x - 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $y = 3$ ympäri.



Alue kannattaa jälleen jakaa vaakakaistaleisiin samoin perustein kuin edellisessäkin tehtävässä.

Korkeudella $y \cdots y + dy$ olevan vaakakaistaleen pyörähtäessä vaakasuoran suoran $y = 3$ ympäri, syntyy ohut sylinterinkuori, jonka

säde $r = \text{pystyjanan pituus} = 3 - y$,

sivuviivan pituus $s =$ vaakakaistaleen pituus $= (y + 2) - y^2$,

kuoren paksuus $p = \text{vaakakaistaleen paksuus } dy$.

Yhden sylinterin kuoren tilavuus on siis

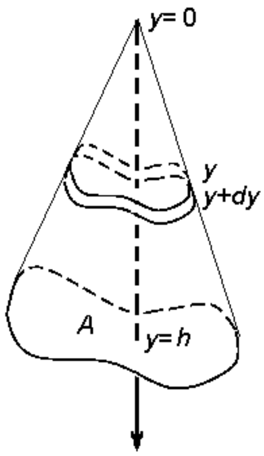
$$dV = 2\pi rs\ p = 2\pi(3 - y)(y + 2 - y^2)dy\,.$$

Koko kappaleen tilavuus saadaan laskemalla kaikkien sylinterinkuorten tilavuudet yhteen eli integroimalla

$$V = \int_{y=-1}^{2} 2\pi(3 - y)(y + 2 - y^2)dy = \frac{45\pi}{2} \approx 70.7$$

Huomautus. Muun kuin pyörähdyskappaleen tilavuus lasketaan tavalisesti ”viipaloimalla” tutkittava kappale helposti hallittaviin viipaleisiin.

Esimerkki. Määritetään kartion tilavuus, kun sen pohjan ala on A ja korkeus h.



Sijoitetaan y-akseli kuvan mukaisesti kohtisuoraan pohjaa vastaan ja jaetaan kartio pohjan suuntaisiin ohuisiin viipaleisiin. Välillä $y \cdots y + dy$ oleva viipale on yhdenmuotoinen pohjan kanssa mittakaavassa $k = \frac{y}{h}$. Koska pinta-alasuhde = mittakaavan neliö, niin viipaleen ala on $\frac{y^2}{h^2}A$ ja tilavuus $dV = \frac{y^2}{h^2}A\,dy$.

Koko kartion tilavuus saadaan integroimalla

$$V = \int_{y=0}^{h} \frac{y^2}{h^2}A\,dy = \frac{A}{h^2}\Big|_{y=0}^{h} \frac{y^3}{3} = \frac{1}{3}Ah$$

Huomautus. Tilavuusalkiona käytetään joskus myös ohutta pallonkuorta. Johdamme seuraavassa pallon tilavuuden kaavan olettaen pallon pinta-alan kaavan tunnetuksi.

Esimerkki. Määritetään R-säteisen pallon tilavuus.

Jaetaan pallo äärettömän moneen äärettömän ohueen samankeskiseen pallonkuoreen. Tarkastellaan sitä pallonkuorta, joka on etäisyydellä $r \cdots r+dr$ pallon keskipisteestä. Tämän pallonkuoren tilavuus

$$dV = \text{kuoren ala} \bullet \text{kuoren paksuus} = 4\pi r^2 \cdot dr \ .$$

Koko pallon tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta, äärettömän pientä tulomuotoista osatilavuutta $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$ väliltä $0 \le r \le R$. Tämä ∫umma saadaan määrättynä integraalina

$$V = \int_{r=0}^{R} 4\pi r^2 dr = \Big|_{r=0}^{R} 4\pi \frac{r^3}{3} = 4\pi \frac{R^3}{3} - 4\pi \frac{0^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Harjoitustehtäviä

19.1 Määritä kappaleen aikavälillä $3 \le t \le 5$ kulkema matka, jos kappaleen nopeus **v)** $v = v(t) = 4t^3$ **a)** $v = v(t) = 3t^2 + 2t$.

19.2 Määritä matkan $50 \le x \le 100$ kulkemiseen kuluva aika, jos nopeus **v)** $v = v(x) = 10 - x/20$ **a)** $v = v(x) = x/2$

19.3 Määritä y-akselilla pisteiden (0, 2) ja (0, 10) välillä olevan sauvan massa, jos sauvan pituusmassa on
v) $\rho = \rho(y) = 20 - 0.1y^2$ **a)** $\rho = \rho(y) = 1 + 2y - 0.2y^2$ (yksikkönä kg/m).

19.4 Määritä x-akselin janalla $4 \le x \le 10$ olevan ohuen sauvan hitausmomentti suoran **v)** $x = 6$ **a)** $x = 4$ **b)** $x = 7$ **c)** $y = 6$ suhteen, jos sauvan pituusmassa on $\rho = \rho(x) = 12 - x$ (yksikkönä kg/m).

19.5 Laske säiliöön aikavälillä $0 \le t \le 10$ virranneen nesteen tilavuus, jos tilavuusvirta on **v)** $q(t) = 5 - \dfrac{2}{t+1}$ **a)** $q(t) = 2 + 3t$ (yksikkönä l/s).

19.6 Kuinka suuri työ tehdään, kun hiekkaa, jonka tiheys on 2300 kg/m^3, nostetaan maan pinnan tasolta maan päälle kartion muotoiseksi kasaksi, jonka korkeus on **v)** 20 m **a)** 10 m ja pohjaympyrän säde 30 m. Käytä arvoa $g = 9.8$ m/s^2.

19.7 Laske origokeskisen R-säteisen ympyrän pinta-ala
a) pystykaistaleiden **b)** vaakakaistaleiden **c)** origokeskisten ympyrärenkaiden alojen summana.

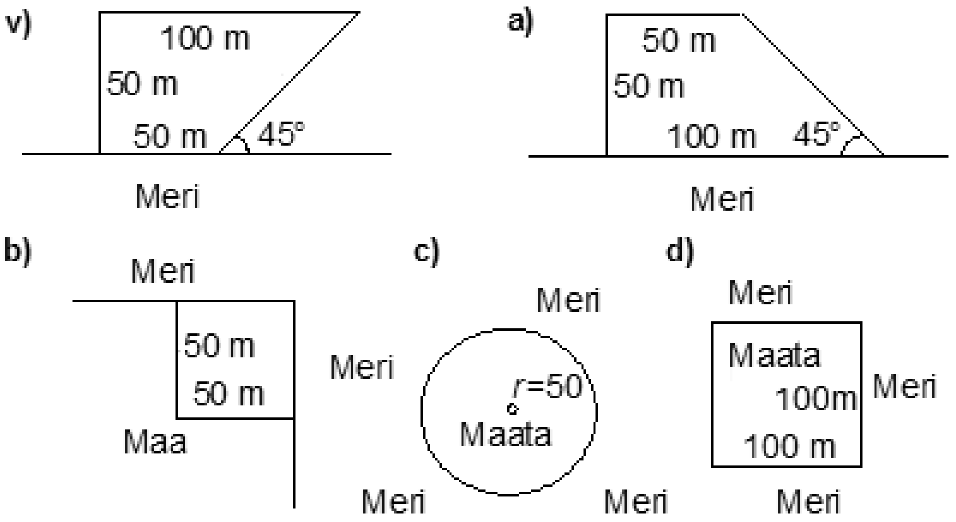
19.8 Määritä käyrien $y = x^3$ ja $y = \sin(\pi x/2)$ rajoittaman kaksoisalueen ala.

19.9 Määritä käyrän $x = y^3 + y$ ja suoran $y = x/5$ rajoittaman kaksoisalueen pinta-ala.

19.10 Määritä sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrien $y = x^3$ ja $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ rajoittaman kaksoisalueen oikeanpuoleisen osan pyörähtäessä suoran **v1)** $y = 3$ **v2)** $x = -1$ a) $y = -1$ b) $x = 2$ ympäri.

19.11 Määritä sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $x = y^3 + y$ ja suoran $y = x/5$ rajoittaman kaksoisalueen oikeanpuoleisen osan pyörähtäessä suoran **v1)** $y = 2$ **v2)** $x = -1$ **a)** $y = -1$ **b)** $x = 12$ ympäri.

19.12 Määritä rantatonttien v, a ja b sekä saaritonttien c ja d kokonaishinnat, kun maan neliöhinnaksi etäisyydellä x metriä lähimmästä rantaviivasta on sovittu $h(x) = 12e^{-x/50}$ €/m^2.
Kiinnitä erityistä huomiota edullisimman pinta-alkion valintaan.
Mieti myös, voitko laskujen vähentämiseksi jakaa jonkin tontin vaikkapa kahteen, kolmeen tai neljään samanarvoiseen osaan. Huomaa, että pelkästään tontin muoto ja koko eivät määrää sen hintaa, vaan hinta riippuu myös rantaviivan sijainnista.



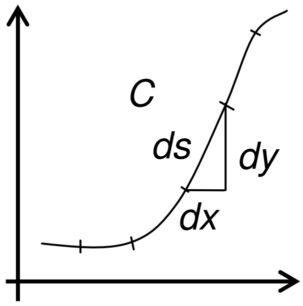
19.13 Laske välillä $0 \le x \le 5$ (m) olevan johtimen resistanssi, kun johdinlangan resistiivisyys $\rho = 0.02$ yksikkönä $\Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$ ja langan poikkipinta-ala on $A = A(x) = 3 + x$ yksikkönä mm^2.
Tiedetään, että homogeenisen johtimen resistanssi on $R = \rho L/A$, missä L on johtimen pituus. Sarjaan kytkettyjen vastusten kokonaisresistanssi saadaan vastusten resistanssien summana.

19.14 Laske ympyrälevyn ($R = 5$ m) kokonaisvaraus, kun varaustiheys etäisyydellä r keskipisteestä on $\sigma = \sigma(r) = 3 \cdot 10^{-15}$ C/m^2.

20. Viivaintegraali kaarialkion pituuden suhteen

Viivaintegraalia käytetään, kun summattava suure on jakautunut tasossa tai avaruudessa olevalle reitille *C*. Tässä luvussa tutustumme viivaintegraaliin kaarialkion pituuden suhteen.

Viivaintegraalia laskettaessa kaari jaetaan äärettömän lyhyisiin pätkiin. Otsakkeen mukaista viivaintegraalia laskettaessa tasoviivan jokaisen pätkän pituus lasketaan suorakulmaisen kolmion hypotenuusana kateettien ollessa koordinaattiakseleiden suuntaisia. Kaarialkion lauseketta muokataan lopuksi tavalla, joka riippuu siitä, missä muodossa kaaren yhtälö tunnetaan. Tasoviivan kaarialkio on muotoa



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx, \text{ jos reitti on muotoa } y = y(x) \\ \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2+1}\, dy = \sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\, dy, \text{ jos reitti on muotoa } x = x(y) \\ \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\, dt, \text{ jos parametriesitys } \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \end{cases}$$

Avaruusviivan kaarialkio saadaan suorakulmaisen särmiön lävistäjänä, jos tunnetaan reitin parametriesitys

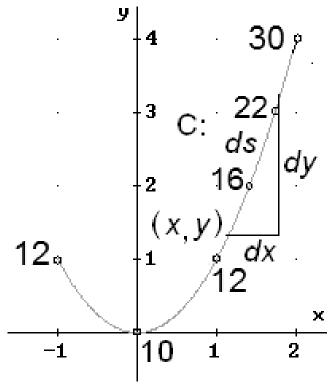
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt,$$

$$= \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt, \text{ jos reitti on } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Huomautus. Edellisissä kaavoissa neliöjuuren alta siirrettävien differentiaalien dx, dy ja dt on algebran lakien mukaisesti oltava positiivisia, ts. viivaintegraalia yo. kaavan mukaan muokattaessa saatava määrätty integraali on aina laskettava muuttujan *x*, *y* tai *t* kasvavaan suuntaan (riippumatta siitä mihin suuntaan mahdollinen liike reitillä tapahtuu, vertaa sivun 116 esimerkki mäenlaskusta).

Huomautus. Fysiikassa voiman tekemä työ lasketaan toisentyyppisellä viiva-integraalilla (ns. työintegraalilla), joka on aina laskettava voiman vaikutuksen alaisen kappaleen liikkeen suuntaan.

Esimerkki. Määritetään paraabelin $y = x^2$ kaarella $-1 \le x \le 2$ oleva varaus, jos kaaren pituusvaraus on $\rho = \rho(x,y) = 10 + x^2 + y^2$ (yksikkönä esim. pC/m).



Kaaren C joidenkin pisteiden kohdalle on merkitty viereisen taulukon mukaiset pituusvaraukset.

Piste (x,y)	Pituusvaraus $\rho(x,y)$
$(-1,1)$	12
$(0,0)$	10
$(1,1)$	12
$(\sqrt{2},2)$	16
$(\sqrt{3},3)$	22
$(2,4)$	30

Karkeasti arvioiden kaaren pituus ≈ 6 ja keskimääräinen pituusvaraus ≈ 16, joten kaaren kokonaisvaraus $q = \rho_{\text{keskim}} \cdot s \approx 16 \cdot 6 \approx 96$.

Koska lyhyen kaarialkion pituus

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx,$$

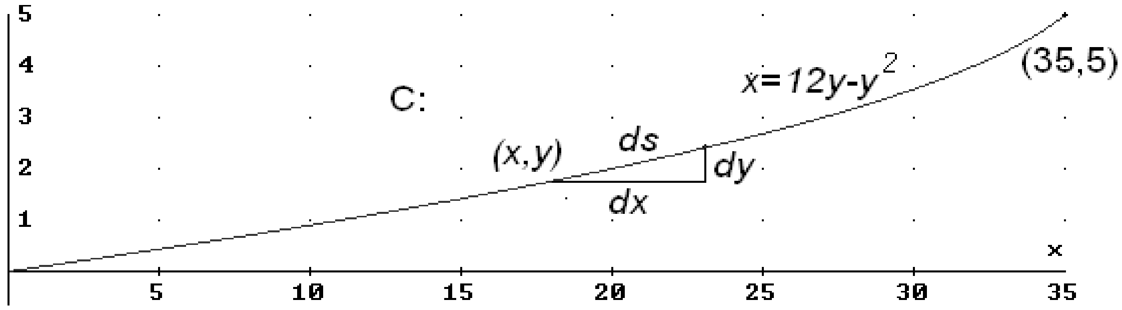
niin kohdassa (x,y) olevan kaarialkion varaus on

$$dq = \rho(x,y) \cdot ds = (10 + x^2 + \underbrace{y^2}_{=x^4 \text{ reitillä C}})\sqrt{1+4x^2}\, dx \, .$$

Koko kaaren varaus saadaan ∫ummana eli nyt viivaintegraalina yli kaaren C:

$$q = \underbrace{\int_C dq}_{\text{Lue: Viivaintegraali } dq \text{ yli kaaren C}} = \underbrace{\int_{x=-1}^{2} (10 + x^2 + x^4)\sqrt{1+4x^2}\, dx}_{\text{Tässä viivaintegraali on jo muutettu tavalliseksi määrätyksi integraaliksi}} \overset{\text{Laskimella}}{=} 93.0302$$

Esimerkki. Kuinka kauan kestää kuvan mäen laskeminen pisteestä (35,5) origoon pitkin käyrää $x = 12y - y^2$ ilman alkuvauhtia, kun ilmanvastustusta ja kitkaa ei huomioida? Painovoiman aiheuttama kiihtyvyys $g = 9.8$ (yksikkönä $\mathrm{m/s^2}$).



Määritämme ensin laskijan vauhdin $v(x, y)$ reitin pisteessä (x, y).
Kitkan ja ilmanvastuksen puuttuessa laskijan liike-energia pisteessä (x, y) on sama kuin potentiaalienergioitten erotus pisteiden (35,5) ja (x, y) välillä, joten

$$\frac{1}{2} m \cdot v(x,y)^2 = mg(5-y) \Leftrightarrow v(x,y) = \underset{(-)}{+}\sqrt{2g(5-y)}$$

Kuvan kaarialkion pituus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy = \sqrt{(12-2y)^2 + 1}\; dy$$

Kohdassa (x,y) olevan lyhyen matkan ds kulkemiseen kuluu aika

$$dt = \frac{ds}{v(x,y)} = \frac{\sqrt{(12-2y)^2+1}\; dy}{\sqrt{2g(5-y)}}$$

Koko aika saadaan laskemalla yhteen kaikki osa-ajat koko reitiltä C:

$$t = \int_C dt = \int_{y=0}^{5} \frac{\sqrt{(12-2y)^2+1}}{\sqrt{2 \cdot 9.8(5-y)}}\, dy \approx 5.51$$

Huomautus. Edellisessä esimerkissä integrointi oli suoritettava integroimismuuttujan y kasvavaan suuntaan eli nyt liikkeelle vastakkaiseen suuntaan, jotta juuren alta ulos otettu differentiaali dy olisi positiivinen integroimisvälillä. Jos integroiminen (eli summaus) suoritettaisiin integroimismuuttujan vähenevään suuntaan, niin silloin juuren alta pitäisi lauseke $(dy)^2$ siirtää ulos muodossa $-dy$.

Esimerkki. Määritä sen toruksen pinta-ala, joka syntyy origokeskisen ympyrän $\begin{cases} x = r\cos\tau \\ y = r\sin\tau \end{cases}$ kiertäessä pystysuoran suoran $x = R$ ympäri, kun $R > r$.

Jo geometrian kurssilla olemme arvioineet toruksen pinta-alaa ”katkaisemalla renkaan ja oikaisemalla sen suoraksi”, jolloin syntyy lieriöpinta, jonka pituus on ”keskimäärin” $2\pi R$ ja poikkileikkausympyrän piiri $2\pi r$. Pinta-alaksi saadaan näin arvioiden $2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$, joka on taulukkokirjoissa esitettykin toruksen alan tarkkana arvona.

Laskemme seuraavassa pinta-alan tarkasti viivaintegraalin avulla. Kohdassa (x, y) olevan kaarialkion pituus on

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau = \sqrt{(r\cdot(-\sin\tau))^2 + (r\cdot\cos\tau)^2}\, d\tau$$

$$= \sqrt{r^2\cdot(\sin^2\tau + \cos^2\tau)}\; d\tau = r\cdot d\tau \quad .$$

Kaarialkion pituuden lauseke on toisaalta ilmeinen, koska r-säteisessä ympyrässä keskuskulmaa $d\tau$ (radiaania) vastaavan kaaren pituus on $r \cdot d\tau$.

Kohdassa (x, y) olevan kaarialkion pyörähtäessä suoran x=R ympäri syntyy ”vyö”, jonka leveys on kaarialkion pituus *ds.* Vyön pituus on $(R-x)$-säteisen ympyrän piirin pituus eli $2\pi(R-x)$. Yhden vyön ala on näin ollen

$$dA = \text{pituus} \cdot \text{leveys} = 2\pi(R-x)\cdot ds \ .$$

Koko pinnan ala saadaan laskemalla kaikkien mahdollisten vöiden ∫umma:

$$A = \oint_C dA = \oint_C 2\pi(R-x)ds = \int_{\tau=0}^{2\pi} 2\pi(R - r\cos\tau)\cdot r\cdot d\tau = \int_{\tau=0}^{2\pi} 2\pi Rr\, d\tau - \int_{\tau=0}^{2\pi} 2\pi r^2 \cos\tau\, d\tau$$

$$= 2\pi Rr \int_{\tau=0}^{2\pi} 1\, d\tau - 2\pi r^2 \int_{\tau=0}^{2\pi} \cos\tau\, d\tau = 2\pi Rr \Big|_{\tau=0}^{2\pi} \tau - 2\pi r^2 \Big|_{\tau=0}^{2\pi} \sin\tau$$

$$= 2\pi Rr(2\pi - 0) - 2\pi r^2(\sin(2\pi) - \sin 0) = 4\pi^2 Rr$$

Huomautus. Ympyrä viimeisen esimerkin symbolisessa viivaintegraalissa $\oint_C dA$ kertoo, että pienet osa-alat *dA* on laskettava yhteen suljetulta reitiltä *C*.

Työintegraalien yhteydessä tällaiseen ympyrään voidaan vielä liittää nuoli $\circlearrowright$ tai $\circlearrowleft$ ilmaisemaan kumpaan suuntaan integraali on laskettava. Mutta nyt käsillä oleva viivaintegraali kaarialkion pituuden suhteen on aina laskettava integroimismuuttujan kasvavaan suuntaan.

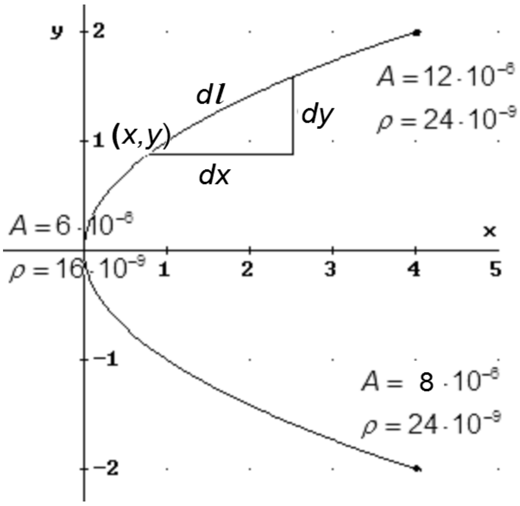
Esimerkki. Lasketaan paraabelin $x = y^2$ kaarella $-2 \le y \le 2$ olevan johdinlangan resistanssi, kun langan poikkipinta-ala kaaren pisteessä (x, y) on

$$A = A(x,y) = (6 + x + y) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$$

sekä lankamateriaalin resistiivisyys samassa pisteessä on

$$\rho = \rho(x,y) = (16 + 2x) \cdot 10^{-9}\ \Omega\mathrm{m}.$$

Kuvaan on näytteeksi laskettu johtimen poikkipinta-ala ja resistiivisyys ilman yksiköitä sekä origossa että johtimen päissä.



Kuvaan merkityn äärettömän lyhyen johdinalkion pituus on

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy = \sqrt{(2y)^2 + 1}\ dy = \sqrt{4y^2 + 1}\ dy.$$

Koska johdinalkiota voidaan pitää tasapaksuna homogeenisena johtimena, niin sen resistanssi dR saadaan kaavasta $R = \rho \cdot \dfrac{l}{A}$. Niinpä ilman yksiköitä

$$dR = \rho(x,y) \cdot \frac{dl}{A(x,y)} = (16 + 2x) \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\sqrt{4y^2+1}dy}{(6+x+y)\cdot 10^{-6}} = \frac{(16+2y^2)\sqrt{4y^2+1}}{6+y^2+y} \cdot 10^{-3}\, dy.$$

Koska lyhyet johdinpätkät ovat peräkkäin muodostaen sarjakytkennän, niin johtimen kokonaisresistanssi saadaan ∫ummana, jossa on äärettömän monta, äärettömän pientä yhteenlaskettavaa ts. kokonaisresistanssi saadaan integroimalla

$$R = \int_{y=-2}^{2} \frac{(16 + 2\cdot y^2)\sqrt{4y^2+1}}{6 + y^2 + y} \cdot 10^{-3}\, dy = 0.024065 \approx \underline{\underline{0.024\Omega}}$$

Harjoitustehtäviä

20.1 Määritä sen massan suuruus, joka on

(i) sinikäyrän $y = \sin x$ kaarella $0 \le x \le \pi$,

(ii) paraabelin $x = y^2$ kaarella $-1 \le y \le 2$,

(iii) ympyrän $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ ylemmällä puolikaarella, missä $0 \le t \le \pi$,

jos kaaren pituusmassa (yksikkönä g/m) on

v) $\rho = \rho(x,y) = 12 + x + y$ **a)** $\rho = \rho(x,y) = 6 + x^2 + 2y$

20.2 Kuinka kauan kestää liike

a) pisteestä (2, 4) pisteeseen (–1 , 1) pitkin paraabelia $y = x^2$

b) pisteestä (4, 2) pisteeseen (1, 1) pitkin paraabelia $x = y^2$

c) pitkin ympyräviivaa $\begin{cases} x = 100\cos t \\ y = 100\sin t \end{cases}$ parametrin arvoa $t = 60°$ vastaavasta pisteestä arvoa $t = 0°$ vastaavaan pisteeseen,

kun liikkeelle lähdetään ilman alkunopeutta ja painovoiman aiheuttama kiihtyvyys $g = 9.8$? Kitkaa ja ilmanvastustusta ei huomioida.

20.3 Määritä kaaren

(i) $y = x^3$, $0 \le x \le 2$ (ii) $x = y^3$, $-1 \le y \le 2$ (iii) $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

hitausmomentti suoran **v)** $x = 1$ **a)** $y = 1$ suhteen, jos kaaren pituustiheys $\rho = \rho(x, y) = 20 - x - y$. Huomaa, että massapisteen dm hitausmomentti etäisyydellä r olevan akselin suhteen on $dJ = dm \cdot r^2$

20.4 Määritä sen pyörähdyspinnan ala, joka syntyy, kun

v) paraabelin $y = x^2$ kaari $0 \le x \le 2$

a) sinikäyrän $y = \sin x$ kaari $0 \le x \le \pi$

c) paraabelin $x = y^2$ kaari $-1 \le y \le 2$

d) ympyrän $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ kaari $0 \le t \le 2\pi$

pyörähtää suoran $x = 4$ ympäri.

Huomaa, että pisteessä (x, y) olevan kaarialkion $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ pyörähtäessä suoran $x = 4$ ympäri syntyy ”vyö”, jonka leveys on ds ja pituus $2\pi(4 - x)$.

20.5 Määritä sen pinnan ala, joka syntyy kaaren $y = x^2$, $-1 \le x \le 2$, pyörähtäessä suoran **v)** $y = x - 1$ **a)** $y = x + 2$ ympäri.
Huomaa, että pisteessä (x, y) olevan kaarialkion etäisyyden pyörähdysakselista saat lauseella:

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

20.6 Laske a) kaarella $y = x^3$, $-1 \le x \le 2$, olevan

b) ympyrän $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, ympäri kiertävän

johdinlangan resistanssi, kun langan poikkipinta-ala pisteessä (x, y) on $A = A(x, y) = (20 - x^2 + y) \cdot 10^{-6}\text{m}^2$ sekä johdinmateriaalin resistiivisyys samassa pisteessä on $\rho = \rho(x, y) = (20 + 2x + 3y) \cdot 10^{-9}\Omega\text{m}$.

21. PINTAINTEGRAALI

Pintaintegraalia käytetään, kun summattava suure on jakautunut jollekin pinnalle.

Jatkossa rajoitutaan vain siihen tilanteeseen, jossa suure on jakautunut tasoalueelle. Summattava suure voisi olla jakautunut kaarevallekin pinnalle.

Pintaintegraali lasketaan **iteroituna integraalina** eli kahden sisäkkäisen määrätyn integraalin avulla.

Huomautus. Niille iteroiduille integraaleille, joita me jatkossa käytämme, ovat ominaisia seuraavat seikat

- sisemmän integraalin sisällä oleva integroitava funktio voi sisältää molempia paikkamuuttujia *x* ja *y*
- sisempi integraali integroidaan jommankumman paikkamuuttujan suhteen pitäen toinen muuttuja vakiona
- sisemmän integraalin rajat voivat riippua ulomman integraalin integroimismuuttujasta
- ulommassa integraalissa on integroitavana sisemmästä integraalista saatava lauseke, jossa ei enää ole jäljellä sisemmän integraalin integroimismuuttujaa
- ulompi integraali integroidaan toisen paikkamuuttujan suhteen kuin sisempi
- ulomman integraalin rajat ovat vakioita (eivät ainakaan sisällä paikkamuuttujia *x* ja *y,* mutta voivat sisältää esimerkiksi ajan *t*)
- iteroidun integraalin laskettu arvo on vakio (tai se ei ainakaan sisällä paikkamuuttujia *x* ja *y,* mutta voi riippua vaikkapa ajasta)

Esimerkki. Laske iteroitu integraali

$$\boldsymbol{I} = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{2x} (x+2y+3x^2y^2)\, dy \right) dx .$$

Sulkeitten sisällä oleva integraali lasketaan tavallisena määrättynä integraalina **integroimalla *y*:n suhteen ja pitäen *x* vakiona.**

$$\int_{y=x}^{2x} (x+2y+3x^2y^2)\, dy = \Big|_{y=x}^{2x} (xy + \cancel{2}\cdot\frac{y^2}{\cancel{2}} + \cancel{3}x^2\cdot\frac{y^3}{\cancel{3}})$$

$$= \underbrace{(x\cdot 2x + (2x)^2 + x^2\cdot(2x)^3)}_{\text{lauseke ylärajalla, jossa } y=2x} - \underbrace{(x\cdot x + x^2 + x^2x^3)}_{\text{lauseke alarajalla, jossa } y=x} = 7x^5 + 4x^2$$

Ulompi integraali lasketaan tavallisena määrättynä integraalina:

$$\boldsymbol{I} = \int_{x=0}^{1} \left(7x^5 + 4x^2\right) dx = \Big|_{x=0}^{1} (\frac{7}{6}x^6 + \frac{4}{3}x^3) = (\frac{7}{6}+\frac{4}{3}) - (0+0) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Huomautus. Kirjallisuudessa esimerkin iteroitu integraali esitetään yleensä ilman sisemmän integraalin ympärillä olevia sulkeita eikä rajoillakaan kerrota kyseisen integroinnin integroimismuuttujaa ts.

$$\boldsymbol{I} = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{2x} (x + 2y + 3x^2y^2)\, dy \right) dx \overset{\substack{\text{Esitetään}\\ \text{tavallisesti}\\ \text{muodossa}}}{=} \int_{0}^{1} \int_{x}^{2x} (x + 2y + 3x^2y^2)\, dy\, dx$$

Huomautus. Esimerkin iteroidun integraalin voi laskea laskimella

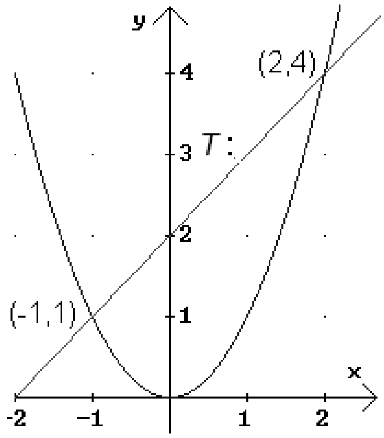
- kahdessa vaiheessa kuten edelläkin tai
- yhdellä yksirivisellä askinsyötteellä $\int(\int(x+2y+3x\text{^}2y\text{^}2, y, x, 2x), x, 0, 1)$

tai

- käyttäen sisäkkäisiä integraalipohjia seuraavasti $\int_0^1 \int_x^{2x} (x+2y+3x^2y^2)\, dy\, dx$.

Huomaa, että integraalin alareunaan ei saa laskimeen kirjoittaa integroimismuuttujan nimeä ja yhtäsuuruusmerkkiä, vaikka tässä monisteessa menetelläänkin selvyyden vuoksi poikkeuksellisesti niin. Sisemmän integraalin ympärille voi laskimeenkin halutessaan kirjoittaa selventävät sulut kuten esimerkissämmekin oli tehty.

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = x + 2$ rajoittaman alueen T massa, jos alueen neliömassa (eli massa pinta-alayksikköä kohden) on paikan funktio $\rho = \rho(x, y) = 5 + x + y$ yksikkönä esimerkiksi kg/m^2.



Alueen massa esitetään usein symbolisena pinta-integraalina

$$m = \int_T dm$$

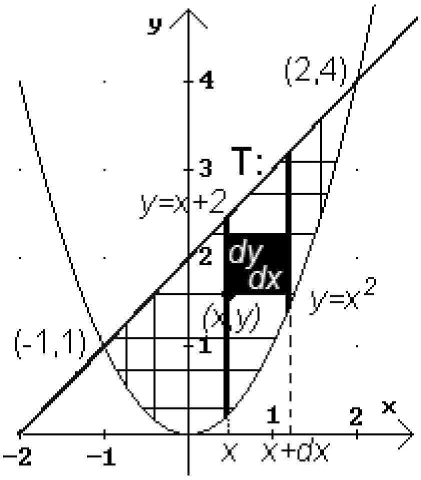
merkinnän kertoessa, että alueen T massa m saadaan laskemalla yhteen kaikki alueen T osamassat *dm.*

Osamassojen yhteenlaskeminen on nyt sikäli työlästä, että jaettiinpa alue T kapeisiin pysty- tai vaakakaistaleisiin, niin neliömassa vaihtelee tällaisen kaistaleenkin sisällä. Itse asiassa yhden kaistaleenkin massa on jo laskettava integroimalla ja lopuksi kaistaleiden massat on vielä laskettava toisella integroinnilla yhteen.

Me joudummekin jakamaan alueen T äärettömän monella pysty- ja vaakasuoralla suoralla kummassakin suunnassa äärettömän pieniin suorakulmioihin: Tarkastelemme seuraavaan kuvaan merkittyä suorakulmiota, jonka yksi kärki on pisteessä (x, y) ja tästä kärjestä alkavien sivujen pituudet ovat dx ja dy. On muistettava, että dx ja dy ovat äärettömän pieniä, vaikka havainnollisuussyistä suorakulmio onkin piirretty suurena.

Koska valittu pinta-alkio on pistemäinen (se on peitettävissä pienellä ympyrällä, mitä esimerkiksi alueen T reunaviivalta toiselle ulottuva kapeinkaan pystykaistale ei ole), niin neliömassa on vakio pinta-alkiossa. Pinta-alkion

- ala on $dA = dx\,dy$
- massa $dm = \rho(x,y)dA = (5+x+y)dx\,dy$



Välillä $x \cdots x+dx$ vahvennettujen pystyviivojen sisällä olevan pystykaistaleen massa saadaan laskemalla yhteen päällekkäin olevien pinta-alkioitten massat alkaen alueen alemman reunaviivan korkeudelta $y = x^2$ ja jatkaen aina ylemmän reunaviivan korkeudelle $y = x+2$ asti:

$$\underset{\text{välillä } x...x+\Delta x}{m_{\text{pystykaistale}}} = \int_{y=x^2}^{x+2} (5+x+y)\,dx\,dy \overset{\substack{dx \text{ on vakio koko pysty-}\\ \text{kaistaleessa, joten sen voi}\\ \text{ottaa yhteiseksi tekijäksi}}}{=} \left(\int_{y=x^2}^{x+2} (5+x+y)\,dy\right)dx$$

Koko alueen massa saadaan laskemalla yhteen kaikkien pystykaistaleiden massat alkaen vasemmanpuolimmaisesta kaistaleesta kohdassa $x=-1$ ja jatkaen oikeanpuolimmaiseen kaistaleeseen asti kohdassa $x=2$:

$$m_{\text{koko alue } T} = \int_{x=-1}^{2}\left(\int_{y=x^2}^{x+2} (5+x+y)\,dy\right)dx \overset{\text{laskimella}}{=} \frac{639}{20} = 31.95\,.$$

Huomautus. Edellisen esimerkin alkuperäistä symbolista pintaintegraalia voidaan merkitä monin eri tavoin:

$$m = \int_T dm = \iint_T dm = \int_T \rho\,dA = \int_T \rho(x,y)dA = \iint_T \rho(x,y)dA = \iint_T \rho(x,y)\,dx\,dy$$

Käyttämällä kaksinkertaista integraalimerkkiä voidaan korostaa integroimisalueen T kaksidimensionaalisuutta ja sitä, että integraali kannattanee jatkossa laskea kaksinkertaisena integraalina. Korvaamalla massa-alkion symboli dm neliömassan ja pinta-alan tulolla $\rho\,dA$ voidaan lukijalle jo valmiiksi kertoa, miten massa-alkio voidaan laskea. Symbolisessa pinta-integraalissa ei vielä kuitenkaan kerrota laskennassa tarvittavan iteroidun integraalin integroimisrajoja eikä sitä kumman muuttujan suhteen integrointi ensin suoritetaan.

Huomautus. Pintaintegraalin voi muuntaa iteroiduksi integraaliksi kahdessa eri järjestyksessä: Sisempi integraali voidaan laskea joko muuttujan x tai y suhteen ja ulompi integraali lopuksi toisen muuttujan suhteen.

Pintaintegraalin arvo on aina riippumaton integroimisjärjestyksestä, mutta tarvittava työmäärä voi voimakkaastikin riippua integroimisjärjestyksestä.

Sisemmän integraalin edustama kaistale kannattaa valita kuten tavallisessakin määrätyssä integraalissa:

- Käytä pystykaistaleita, jos reunakäyrät ovat muotoa $y = y(x)$
- Käytä vaakakaistaleita, jos reunakäyrät ovat muotoa $x = x(y)$
- Jos reunakäyrät ovat erimuotoisia tai lausuttavissa kummassa muodossa tahansa, niin kaistaleiden suunnan valinta kannattaa suorittaa siten, että kaistaleet ovat yhdentyyppisiä mikäli mahdollista

Esimerkki. Laskemme edellisen esimerkin vielä uudelleen kahdessa eri järjestyksessä selittäen laskuja sen verran kuin jatkossakin tehtäviä tulisi selittää.

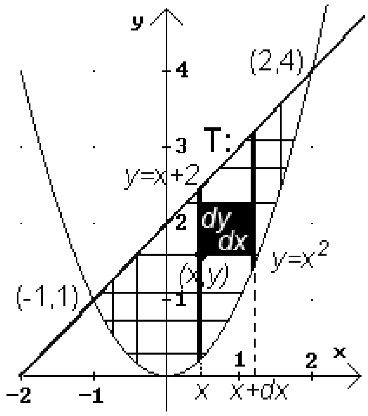
Kummassakin tavassa tarkastelemme kohdassa (x, y) olevaa äärettömän pientä suorakulmiota, jonka

- ala $dA = dx\,dy$
- massa $dm = \rho(x,y)dA = \rho(x,y)\,dx\,dy = (5 + x + y)\,dx\,dy$

On selvää, että alueen massa saadaan pintaintegraalina

$$m = \int_T dm = \int_T (5 + x + y)\,dx\,dy\,.$$

Edullinen tapa: Koska alueen rajat ovat muotoa $y = y(x)$, niin käytämme pystykaistaleita.



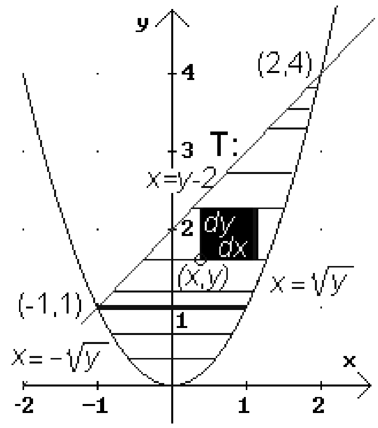
Esitämme alueen T muodostumisen välillä $-1 \le x \le 2$ olevien äärettömän kapeiden kaistaleiden avulla:

$$T: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ \text{ja kullakin } x\text{:n arvolla} \\ x^2 \le y \le x + 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{"Ulompi silmukka"} \\ \\ \text{"Sisempi silmukka"} \end{array} \right. .$$

Muodostamme pintaintegraalia edustavan iteroidun integraalin siten, että ulommassa integraalissa muuttuu x, kuten alueen T esityksessäkin x oli ulomman "silmukan" muuttuja, ja sisemmässä integraalissa muuttuu y kuten alueen esityksessäkin:

$$m = \int_{x=-1}^{2} \left(\int_{y=x^2}^{x+2} (5 + x + y)\,dy \right) dx \overset{\text{laskimella}}{=} 31.95$$

Työläs tapa. Koska vaakakaistaleita on kahden tyyppisiä, niin vaakakaistaleita käytettäessä aluetta T on tarkasteltava kahdessa eri osassa:



$$T_{\text{alaosa}}: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \text{ja kullakin } y\text{:n arvolla} \\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

$$T_{\text{yläosa}}: \begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ \text{ja kullakin } y\text{:n arvolla} \\ y-2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

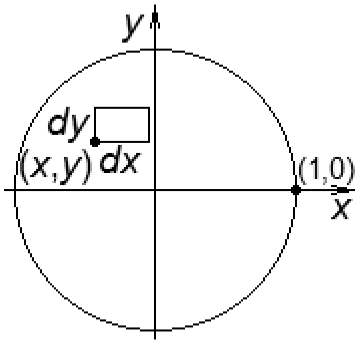
Koko alueen massakin on laskettava kahtena pintaintegraalina

$$m = m_{\text{alaosa}} + m_{\text{yläosa}} = \int_{T_{\text{alaosa}}} dm + \int_{T_{\text{yläosa}}} dm$$

$$= \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (5+x+y)\,dx \right) dy + \int_{y=1}^{4} \left(\int_{x=y-2}^{\sqrt{y}} (5+x+y)\,dx \right) dy = 7.467 + 24.483 = 31.95$$

Esimerkki. Laske ympyrälevyn $x^2 + y^2 \le 1$ hitausmomentti pisteen (1,0) kautta kulkevan levyä vastaan kohtisuoran tason suhteen, kun levyn tiheys

$$\rho = \rho(x,y) = 2 - x^2 - y^2.$$



Alueen T voi nyt hyvin esittää kahdellakin tavalla

$$T: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \text{ja kullakin } x\text{:n arvolla} \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad T: \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ \text{ja kullakin } y\text{:n arvolla} \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}.$$

Koska kohtaan (x,y) piirretyn alkion hitausmomentti akselin suhteen on

$$dJ = \text{"massa} \cdot \text{etäisyys}^2\text{"} = (2-x^2-y^2)\,dx\,dy \cdot \left(\sqrt{(1-x)^2 + (0-y)^2} \right)^2,$$

niin koko hitausmomentti saadaan kaksinkertaisena $\iint$ummana

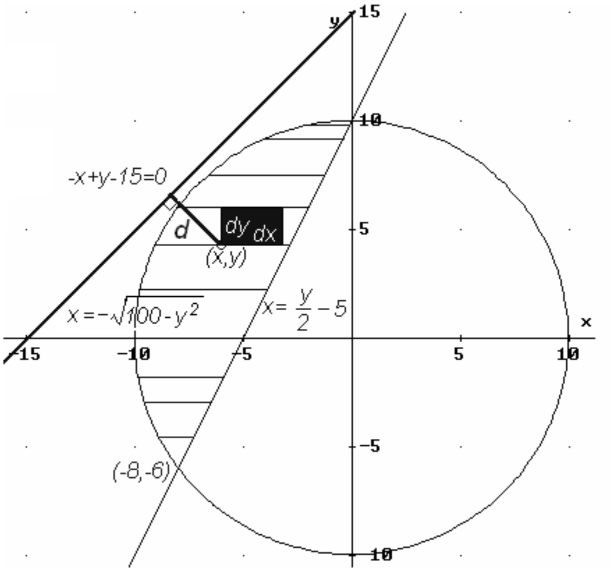
$$J = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2-x^2-y^2)\left((1-x)^2 + y^2\right) dy \right) dx$$

tai vaihtoehtoisesti

$$= \int_{y=-1}^{1} \left(\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (2-x^2-y^2)\left((1-x)^2 + y^2\right) dx \right) dy = \frac{13\pi}{6} \approx 6.807$$

Esimerkki. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 100$ ja suoran $y = 2x + 10$ rajoittaman pienemmän ympyräsegmentin hitausmomentti suoran $y = x + 15$ suhteen, kun segmentin neliömassa $\rho(x, y) = 20 + x + y$.

Koska tarkasteltava alue voidaan peittää yhdentyyppisillä vaakakaistaleilla (jotka ulottuvat ympyränkaarelta suoralle), mutta peittämiseen tarvittaisiin kahdentyyppisiä pystykaistaleita (ensin vasemmalla alemmalta kaarelta ylemmälle kaarelle, sitten oikealla suoralta ylemmälle kaarelle), niin aiemman ohjeen mukaan kannattaa käyttää vaakakaistaleita. Sitä varten ratkaistaan reunaviivojen yhtälöistä x muuttujan y funktiona ympyrän vasemmanpuoleisella kaarella $x = -\sqrt{100 - y^2}$.



Vaakakaistaleita käyttäen ympyränsegmentille saadaan seuraavat rajat "kaksinkertaisella silmukalla":

$$T: \begin{cases} -6 \le y \le 10 \\ \text{ja kullakin } y\text{:n arvolla} \\ -\sqrt{100 - y^2} \le x \le \dfrac{y}{2} - 5 \end{cases}$$

Tarkastelemme kuvaan merkittyä kohdassa (x, y) olevaa pinta-alkiota. Sen

- ala $dA = dx\,dy$
- massa $dm = \rho(x, y)\,dA = (20 + x + y)\,dx\,dy$
- etäisyys akselista $-x + y - 15 = 0$ saadaan pisteen (x, y) etäisyytenä kyseisestä suorasta, ts. $d = \dfrac{|-x + y - 15|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$
- hitausmomentti akselin suhteen on

$$dJ = \text{massa} \times \text{etäisyys}^2 = (20 + x + y)\,dx\,dy \cdot \frac{(-x + y - 15)^2}{\sqrt{2}^2}$$

Koko segmentin hitausmomentti saadaan pintaintegraalina

$$J = \int_T dJ = \int_{y=-6}^{10} \left(\int_{x=-\sqrt{100-y^2}}^{\frac{y}{2}-5} (20 + x + y) \cdot \frac{(-x + y - 15)^2}{2}\, dx \right) dy = 21218$$

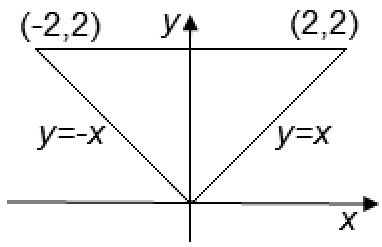
Edullisimman integroimisjärjestyksen valintaa pintaintegraalin laskemiseksi voi havainnollistaa myös peittämällä integroimisalueen ensin joko pysty- tai vaakanuolilla sen mukaan, lasketaanko sisemmässä integraalissa yhteen alkioita pysty- tai vaakakaistaleesta.

Koko alueen kattavien nuolten suunta kannattaa valita seuraavasti:

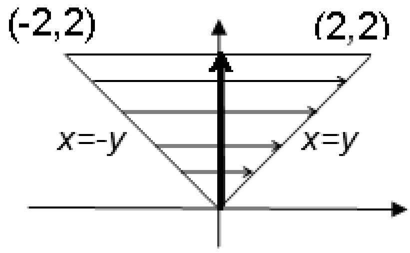
- käytä pystynuolia, jos reunakäyrät muotoa $y = y(x)$, ja käytä vaakanuolia, jos reunakäyrät muotoa $x = x(y)$
- pyri peittämään alue yhdentyyppisillä nuolilla, jolloin selviät yhden iteroidun integraalin laskemisella.

Piirrä sitten yksi (tai tarvittaessa muutama perättäinen) ensin piirrettyjä koko alueen peittäviä nuolia vastaan kohtisuora nuoli, joka kuvaa ulommassa integraalissa tapahtuvaa pysty- tai vaakakaistaleiden arvojen yhteenlaskua. Kirjoita sitten alueen rajat ”päinvastaisessa järjestyksessä” ja lopuksi rajoja vastaava iteroitu integraali.

Esimerkki. Lasketaan viereisen kuvan mukaisessa kolmioalueessa oleva massa, kun pintatiheys on $\rho = \rho(x,y) = 1 + x + y$.

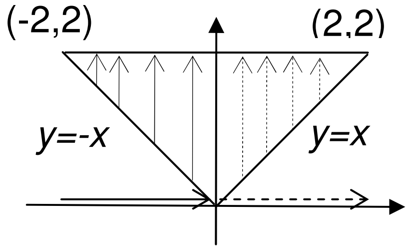


Alue kannattaa peittää vaakanuolilla, koska ne ovat kaikki samaa tyyppiä: vasemmalta reunalta oikealle reunalle.



$$T : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \text{ja kullakin } y\text{:n arvolla} \\ -y \le x \le y \end{cases}$$

$$m = \int_{y=0}^{2} \left(\int_{x=-y}^{y} (1 + x + y)\, dx \right) dy = \frac{28}{3} \approx 9.33$$



Sama työläämmin: Koska aluetta peittävät pystynuolet ovat kahta eri tyyppiä, niin pystykaistaleiden käyttäminen johtaa kahteen eri iteroituun integraaliin:

$$T_{\text{vasen puoli}} : \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ \text{ja kullakin } x\text{:n arvolla} \\ -x \le y \le 2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad T_{\text{oikea puoli}} : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \text{ja kullakin } x\text{:n arvolla} \\ x \le y \le 2 \end{cases}$$

$$m = \int_{T_{\text{vasen}}} dm + \int_{T_{\text{oikea}}} dm = \int_{x=-2}^{0} \left(\int_{y=-x}^{2} (1 + x + y) dy \right) dx + \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=x}^{2} (1 + x + y) dy \right) dx = \frac{28}{3}$$

Harjoitustehtäviä

21.1 Laske käsin ja laskimella

v) $\int\limits_{y=1}^{2}\left(\int\limits_{x=y}^{y^2} x^2y^3\,dx\right)dy$ **a)** $\int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{x^2} (x^2+y)\,dy\right)dx$ **b)** $\int\limits_{y=0}^{2}\left(\int\limits_{x=y}^{2y} (2x+y)\,dx\right)dy$

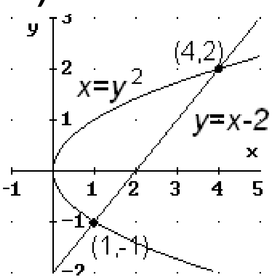
21.2 Päättele ensin ilman laskuja, mitkä muuttujat esiintyvät seuraavien iteroitujen integraalien lasketuissa arvoissa. Laske sitten integraalit laskimella.

v) $\int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{x=y}^{t} x\,dx\right)dy$ **a)** $\int\limits_{z=1}^{2}\left(\int\limits_{t=z}^{y} (x+t)\,dt\right)dz$ **b)** $\int\limits_{t=1}^{2}\left(\int\limits_{x=y}^{t} xyz\,dx\right)dt$

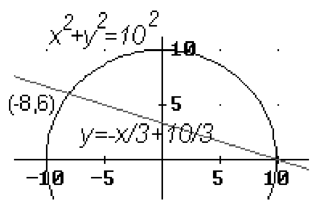
21.3 Laske kolmiolevyn a) A(-2,0)B(0,2)C(2,0) b) D(4,4)O(0,0)F(4,-4) kokonaisvaraus, jos levyn varaustiheys $\rho=\rho(x,y)=10+x-y$.

21.4 Laske kuvissa olevien paraabelin ja ympyrän segmenttien massat, kun kunkin alueen pintatiheys on $\rho=\rho(x,y)=25+x+2y$ (yksikkönä kg/m^2).

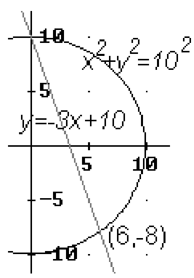
v1)



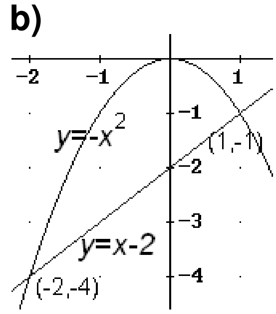
v2)



a)



b)



21.5 Määritä seuraavien kolmiolevyjen hitausmomentit suoran $x=1$ suhteen, kun levyn neliömassa $\rho=\rho(x,y)=5+x+2y$.

v1) A(-3,0)B(0,3)C(3,0) (Vast. 119.7) **v2)** D(0,-3)E(0,3)F(3,0) (Vast. 28.8)

a) G(-3,3)H(0,0)I(3,3) **b)** J(-2,0)K(0,2)L(0,-2)

21.6 Määritä sen kappaleen tilavuus, joka syntyy paraabelin $y=x^2$ ja suoran $y=4$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran **v)** $y=x-2$ **a)** $y=x+7$ ympäri.

Ohje: Jaa alue pieniin suorakulmioihin $dx\,dy$. Tällaisen alkion pyörähtäessä akselin ympäri syntyy vanne, jonka tilavuuden saat ajattelemalla vanteen oikaistuksi. Pisteessä (x,y) olevan pinta-alkion etäisyyden vinosta pyörähdysakselista saat algebran kurssista tutulla lauseella:

Pisteen (x_0,y_0) etäisyys suorasta $ax+by+c=0$ on $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

22. AVARUUSINTEGRAALI

Avaruusintegraalia (eli tilavuusintegraalia) käytetään, kun summattava suure täyttää kolmiulotteisen kappaleen sisäosan.

Esimerkki. Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä *K*, jonka pisteet toteuttavat ehdot $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 3$. Lasketaan särmiön massa, jos särmiön tiheys $\rho = \rho(x,y,z) = 2x + 4y + 6z$.

Jaamme särmiön *K* äärettömän moneen äärettömän pieneen suorakulmaiseen särmiöön koordinaattitasojen suuntaisilla tasoilla. Tarkastelemme yhtä tällaista tilavuusalkiota, jonka yksi kärki on pisteessä (x,y,z) ja tästä kärjestä lähtevät särmät ovat pituudeltaan *dx, dy* ja *dz*. Tämän särmiön tilavuus ja massa ovat

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$dm = \rho(x,y,z) \cdot dV = (2x + 4y + 6z)\, dx\, dy\, dz\ .$$

Koko kappaleen massa saadaan laskemalla yhteen kaikki osamassat kappaleesta *K*, mitä merkitään symbolisella tilavuusintegraalilla

$$m = \int_K dm = \iiint_K dm = \iiint_K \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Tämä tilavuusintegraali voidaan laskea kolminkertaisena iteroituna integraalina esimerkiksi seuraavassa järjestyksessä

$$m = \int_{z=0}^{3} \underbrace{\Big(\int_{y=0}^{4} \big(\int_{x=0}^{6} (2x+4y+6z)\, dx \big)\, dy \Big)\, dz}_{\substack{\text{Tämä on kappaleesta } K \text{ korkeudelta } z \cdots z+dz \\ \text{leikatun vaakasuoran viipaleen massa, joka puoles-} \\ \text{taan lasketaan kaksiulotteisena pintaintegraalina.}}}$$

$$= \int_{z=0}^{3} \Big(\int_{y=0}^{4} \big(\Big|_{x=0}^{6} (x^2+4xy+6xz)\, dy \big) \Big)\, dz = \int_{z=0}^{3} \Big(\int_{y=0}^{4} (36+24y+36z)\, dy \Big)\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} \Big(\Big|_{y=0}^{4} (36y+12y^2+36yz) \Big)\, dz = \int_{z=0}^{3} (144+192+144z)\, dz = 1656$$

Em. kolminkertainen iteroitu integraali saadaan tietenkin TI-laskimen syötteistä

$$\int\Big(\int\Big(\int(2x+4y+6z, x, 0, 6), y, 0, 4\Big), z, 0, 3\Big) \quad \text{tai} \quad \int_0^3 \int_0^4 \int_0^6 (2x+4y+6z)\, dx\, dy\, dz$$

Koska seuraavan huomautuksen mukaan tilavuusintegraalin arvo ei riipu integroimisjärjestyksestä, niin edellinen integraali voidaan laskea kaikkiaan $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri tavalla:

$$m = \int_{x=0}^{6} \Big(\int_{y=0}^{4} \big(\int_{z=0}^{3} (2x+4y+6z) dz \big) dy \Big) dx = \int_{y=0}^{4} \Big(\int_{x=0}^{6} \big(\int_{z=0}^{3} (2x+4y+6z) dz \big) dx \Big) dy = \ldots$$

Huomautus. Tilavuusintegraalin voi muuntaa iteroiduksi integraaliksi kuudessa eri järjestyksessä: Sisin integraali voidaan laskea minkä tahansa muuttujan *x, y* tai *z* suhteen. ”Väli-integraali” lasketaan sitten jommankumman jäljellä olevan muuttujan suhteen ja uloin integraali lasketaan lopuksi kolmannen muuttujan suhteen.

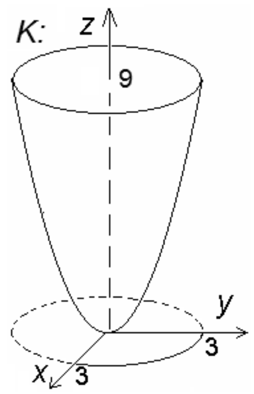
Tilavuusintegraalin arvo on aina riippumaton integroimisjärjestyksestä, mutta tarvittava työmäärä voi voimakkaastikin riippua integroimisjärjestyksestä.

Edullisimman integroimisjärjestyksen selvittämiseksi täytä kappale nuolilla:
- Käytä pystynuolia, jos reunapinnat ovat muotoa $z = z(x, y)$
- Käytä *x*-akselin suuntaisia nuolia, jos reunapinnat ovat muotoa $x = x(y,z)$
- Käytä *y*-akselin suuntaisia nuolia, jos reunapinnat ovat muotoa $y = y(x,z)$

Täyttämiseen käytetyt nuolet kuvaavat sisimmän integraalin integroimismuuttujan muuttumista.

Kappaleen rajojen kirjoittaminen kannattaa aloittaa sen ”pohjan”, ”taustan” tai ”sivuprofiilin” rajojen määrittämisellä, jota vastaan kohtisuorassa suunnassa nuolet kulkevat. Tilavuusintegraalia vastaavan iteroidun integraalin ulompien integraalien muuttujat ja rajat saadaan näistä ”pohjan”, ”taustan” tai ”sivuprofiilin” muuttujista ja rajoista.

Esimerkki. Lasketaan sen kappaleen massa, jota rajoittaa
- ylöspäin aukeava paraboloidi $z = x^2 + y^2$, joka on syntynyt *yz*-tason paraabelin $z = y^2$ pyörähtäessä *z*-akselin ympäri
- vaakasuora taso $z = 9$.



Kappaleen tiheys olkoon $\rho = \rho(x, y, z) = 10 + x + 2y + 3z$.

Integroimisrajat saadaan ajattelemalla kappale täytetyksi pystysuuntaisilla nuolilla, jotka nousevat kappaleen *xy*-tasolla olevan ortogonaaliprojektion (kohtisuoran heittovarjon) jokaisen pisteen kohdalla paraboloidilta tasolle $z = 9$. Näin saamme kappaleelle rajat

$$K:\begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ \text{ja jokaisella } x\text{:n arvolla} \\ -\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2} \\ \text{ja "pohjan" jokaisen pisteen } (x,y) \text{ kohdalla} \\ x^2 + y^2 \le z \le 9 \end{cases}$$

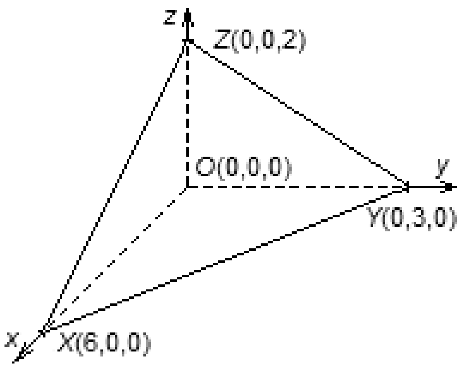
Kappaleen "pohjaympyrä" (ortogonaaliprojektio *xy*-tasolla)

Kappaleen massaa esittävä tilavuusintegraali voidaan muuntaa seuraavaksi TI-laskimella laskettavaksi iteroiduksi integraaliksi

$$m = \int_K dm = \int_K \rho(x, y, z)\, dV = \int_{x=-3}^{3} \Big(\int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \Big(\int_{z=x^2+y^2}^{9} (10 + x + 2y + 3z) dz \Big) dy \Big)\, dx \approx 3563$$

Esim. Määritetään vinon tason $x+2y+3z=6$ ja koordinaattitasojen rajoittaman tetraedrin $O(0,0,0)$ $X(6,0,0)$ $Y(0,3,0)$ $Z(0,0,2)$ massa, kun kappaleen tiheys on

$$\rho=\rho(x,y,z)=1+2x+3y+4z.$$



Tarkastellaan pisteessä (x,y,z) olevaa tilavuusalkiota, jonka särmät ovat dx, dy ja dz. Sen tilavuus $dV=dx\,dy\,dz$ ja massa $dm=\rho(x,y,z)\,dV=(1+2x+3y+4z)\,dx\,dy\,dz$.

Kappaleen massaa esittävän tilavuusintegraalin $m=\int_K dm$ rajojen määrittämiseksi täytämme kappaleen ensin pystynuolilla, jotka nousevat vaakasuoralta pohjakolmiolta OXY tasolle $x+2y+3z=6$, jolloin saamme kappaleelle rajat

$$K:\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0\le x\le 6 \\ \text{ja jokaisella } x\text{:n arvolla} \\ 0\le y\le 3-x/2 \end{array}\right\}\ \text{Kappaleen pohja O}XY \\ \text{ja pohjan jokaisen pisteen } (x,\ y) \text{ kohdalla} \\ 0\le z\le (6-x-2y)/3 \end{cases}$$

Näin ollen $$m=\int_{x=0}^{6}\left(\int_{y=0}^{3-x/2}\left(\int_{z=0}^{(6-x-2y)/3}(1+2x+3y+4z)\,dz\right)dy\right)dx=49.5\ .$$

Vaihtoehtoisesti voimme täyttää kappaleen y-akselin suuntaisilla nuolilla, jotka kulkevat xz-tasolla olevalta kappaleen ”sivuprofiililta” OXZ edellä mainitulle vinolle tasolle. Näin rajoiksi saadaan

$$K:\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0\le x\le 6 \\ \text{ja jokaisella } x\text{:n arvolla} \\ 0\le z\le 2-x/3 \end{array}\right\}\ \text{Kappaleen "sivuprofiili" O}XZ \\ \text{ja "sivuprofiilin" jokaisen pisteen } (x,\ \text{z}) \text{ kohdalla} \\ 0\le y\le (6-x-3z)/2 \end{cases}$$

Näin ollen $$m=\int_{x=0}^{6}\left(\int_{z=0}^{2-x/3}\left(\int_{y=0}^{(6-x-3z)/2}(1+2x+3y+4z)\,dy\right)dz\right)dx=49.5\ .$$

Jos kappale täytetään x-akselin suuntaisilla nuolilla, jotka kulkevat kappaleen ”taustalta” OYZ vinolle etutasolle, niin kappaleen rajat ovat

$$K:\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0\le y\le 3 \\ \text{ja jokaisella } y\text{:n arvolla} \\ 0\le z\le 2-2y/3 \end{array}\right\}\ \text{Kappaleen "tausta" OY}Z \\ \text{ja "taustan" jokaisen pisteen } (y,\ \text{z}) \text{ kohdalla} \\ 0\le x\le 6-2y-3z \end{cases}$$

ja massa on $$m=\int_{y=0}^{3}\left(\int_{z=0}^{2-2y/3}\left(\int_{x=0}^{6-2y-3z}(1+2x+3y+4z)\,dx\right)dz\right)dy=49.5\ .$$

Harjoitustehtäviä

22.1 Määritä tilavuusintegraalin avulla sen suorakulmaisen särmiön massa, jonka tiheys on $\rho = \rho(x, y, z) = 13 - x - y - z$ ja jota rajoittavat koordinaattitasojen lisäksi tasot $x = 5$, $y = 3$ ja $z = 4$.
Koska särmiön tiheys muuttuu lineaarisesti, niin voit tarkistaa tuloksesi laskemalla kappaleen massan helpommin tilavuuden ja särmiön keskipisteessä (2.5, 1.5, 2) lasketun tiheyden tulona.

22.2 Olkoon **v)** $R = 3$ **a)** $R = 2$**.** Määritä sen ympyrälieriön massa ja hitausmomentti x-akselin suhteen, jota rajoittavat R-säteinen ympyrälieriöpinta $y^2 + z^2 = R^2$ akselinaan x-akseli ja yz-tason suuntaiset tasot $x = 1$ ja $x = 7$. Lieriön tiheys $\rho = \rho(x, y, z) = 20 - x - y^2 - z^2$.
Koska tarkasteltava kappale tiheysfunktioineen on symmetrinen x-akselin suhteen, niin tehtävän voi tilavuusintegraalin lisäksi laskea tarkastelemalla pienten suorakulmaisten särmiöiden asemasta ohuita sylinterinkuoria, joiden symmeria-akselina on x- akseli.

22.3 Tarkastellaan sitä paraboloidin segmenttiä, jota rajoittavat xy-taso ja alaspäin aukeava paraboloidi $z = 9 - x^2 - y^2$. Paraboloidin huippu on z-akselilla pisteessä (0,0,9) ja paraboloidi leikkaa xy-tasoa pitkin kolmisäteistä ympyrää $x^2 + y^2 = 9$. Määritä paraboloidin hitausmomentti z-akselin suhteen, kun paraboloidin tiheys $\rho = \rho(x, y, z) = 30 - x^2 - y^2 - 2z$.

22.4 Laske positiivisen y-akselin suuntaan aukeavan paraboloidin $y = x^2 + z^2$ ja tason $y = 16$ rajoittaman kappaleen massa ja hitausmomentti y-akselin suhteen, jos kappaleen tiheys $\rho = 10 + y - x^2 - z^2$. Paraboloidi on syntynyt, kun yz-tason paraabeli $y = z^2$ on pyörähtänyt y-akselin ympäri. Kappaleen ortogonaaliprojektiota xz-tasolla rajoittaa ympyrä $x^2 + z^2 = 4^2$.

22.5 Vinon tason $2x-3y+4z=12$ ja koordinaattitasojen rajoittaman tetraedrin $O(0,0,0)\,X(6,0,0)\,Y(0,-4,0)\,Z(0,0,3)$ tiheys on $\rho(x,y,z)=4+2x-3y+4z$. Määritä tetraedrin **v)** massa **a)** hitausmomentti x-akselin suhteen.

VASTAUKSIA

1.1 **v1)** 4, 5, $\frac{1}{3}$, ei määritelty **v2)** $\frac{1}{a+2}$ **v3)** $\frac{a+3}{2a+2}$ **v4)** a^2+a

v5) $\frac{4}{3}$ **v6)** 25 **v7)** $4x^2+4x+1$ **v8)** $2x^2+1$

1.2 $\pm 1/\sqrt{2}$

1.4 **v1)** $y=x^2+6x+8$ **v2)** $y=\frac{x+3}{2}$ **v3)** $y=\pm\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

v4) $y=-2x^2+4x$ (missä $0\le x\le 2$)

1.6 $(1,2)$

2.1 **v1)** 1 **v2)** $\frac{1}{2}$ **v3)** -1 **v4)** $\frac{2}{3}$ **v5)** ∞ **v6)** 0

2.2 e^{20}

2.3 **v1)** $\frac{1}{2}$ **v2)** 3 **v3)** 2 **v4)** 0

2.4 **v1)** $-\infty$ **v2)** ∞ **v3)** ∞

2.7 12

2.8 **v1)** $4x^3$ **v2)** $\frac{1}{5t^4}$

2.9 1

3.1 **i)** 149.11, 147.021001, 147.00021 , 147 **ii)** 147

3.2 **i)** 7.8, 7.98, 7.998 **ii)** $16-4t$

3.3 $[0,2t,4t^3]$ **,** $[0,2,12t^2]$

3.4 **i)** 13.228, 13.820, 13.882, 27.78, 277.8, 2778, 27780 ii) 13.889, ∞

4.1 $3x^2$, 48

5.2 Vähenevä, kun $x\le\frac{7}{8}$. Kasvava, kun $x\ge\frac{7}{8}$

5.3 $-\frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$

7.1 $-8\cos(2x), 24x+6, -\frac{6}{x^4}=-6x^{-4}, -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, 96x+18$

7.2 **v1)** $-32\sin(2x)$ **v2)** $(16x+32)e^{2x}$ **v3)** $x\cdot\sin x-4\cos x$**,** -4

8.2 z-akselin suunnassa

8.3 0.00056 , yhtälöstä ratkaisemalla 0.00055993729

8.4 1.033

9.1 $v(t)=v_0+a_0t+\frac{1}{2}bt^2$, $a(t)=a_0+bt$

9.2 1924

9.3 $\overline{v}=[2,6t,12t^2]$, $\overline{a}=[0,6,24t]$

9.4 4125, 6000, 3375 ; 675, 0, -1125 ; 4327.5, 6000, 3262.5

9.7 $k_{\tan}=12\pm 2\sqrt{35}\approx\begin{cases}23.832\\0.16784\end{cases}$, $k_{norm}=-0.32101$

9.8 $v(50)=6.81$, $a(50)=0.0057\,\therefore$ Poliisi saavuttaa, $t=15.7$

10.1 Maksimipiste $(-1,2)$, minimipiste $(1,-2)$, käännepiste $(0,0)$

10.2 Minimi $(1,2)$, maksimi $(-1,-2)$ Asymptootit $x=0$ ja $y=x$
Käyrä on vinon asymptoottinsa alapuolella ja ylöspäin kupera, kun $x<0$.
Käyrä on vinon asymptoottinsa yläpuolella ja alaspäin kupera, kun $x>0$.

10.3 **v1)** $x=0$, $x=4$, x-akseli **v2)** $x=2$, $x=-2$, $y=\frac{1}{4}$

v3) $x=0$, $y=2x+3$

11.1 Suurin arvo 5, pienin -49

11.2 $r=h=68.3$ mm

11.3 Pienin etäisyys on 25.918 (kun aikaa on kulunut 6.5619)

11.6 $2.0358391\text{ rad}\approx 116.64499°$ ja $4.2473462\text{ rad}\approx 243.35501°$, jolloin kartioitten yhteistilavuus on $0.456640591r^3$. (Vertaa: puolikasympyröistä taitettujen kartioitten yhteistilavuus on vähän pienempi $0.45344984r^3$)

12.1 **v1)** Reitti $(0,-10)$ - $(5.77,0)$ - $(49.85,0)$ - $(80,20)$, aika 18.43 (ylitarkasti)
v2) Reitti $(0,-10)$ - $(7.09,0)$ - $(80,20)$, aika 12.21 (ylitarkasti)

13.1 i) 5.07 , 4.8 ii) -2.17 , -2.2 iii) 3 , -24

13.2 2.01667

13.3 $\Delta V\approx dV\approx 40.2$, $\Delta V\approx 42.3$

13.5 $A=(370.518\pm 2.729)\text{ m}\approx(371\pm 4)\text{ m}^2$

13.6 $t=(588.2\pm 69.20)\text{ s}=(590\pm 80)\text{ s}$

13.7 $y=0.8387\pm 0.0190=0.84\pm 0.03$ sopimuksemme mukaisessa muodossa

13.8 $\alpha=(0.87104\pm 0.0031)\text{ rad}=(0.0871\pm 0.004)\text{rad}$
tai asteina $\alpha=(49.907\pm 0.1779)°=(49.9\pm 0.2)°$

13.9 $x\approx 10.1581\approx 10.16$

14.1 $\Delta T=8.33$, $dT=7.2$

14.2 $\Delta A=0.676$, $dA=0.666$

14.3 $I\overset{\text{ylitarkasti}}{=}(1.5333\pm 0.1356)\text{ A}=(1.5\pm 0.2)\text{ A}$

14.4 $P=(352.67\pm 38.84)$ W $=(350\pm 50)$ W

14.5 $\rho=(1974.3\pm 325.4)$ kg/m^3 $=(2000\pm 400)$ kg/m^3

14.6 $A=120.69\pm 3.38=121\pm 4$

14.7 $A=6.0\pm 0.5$

14.8 $\alpha=(36.87\pm 0.315)° =(36.9\pm 0.4)°$

15.1 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x}{3x^2+1}$ tai vaihtoehtoisesti muodossa $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x}{e^y}$

15.2 $y-3=-\dfrac{27}{2}(x-2)$ eli $27x+2y-60=0$

15.3 $y=2x-1$

15.4 0

15.5 $T=4816022\pm 273116=4800000\pm 300000=(4.8\pm 0.3)\cdot 10^6$

16.2 3/2

19.1 544

19.2 8.11

19.3 126.9

19.4 84

19.5 45.2

19.6 $2.12\cdot 10^9$ J

19.10 **v1)** 6.166 **v2)** 3.719

19.11 **v1)** $112\pi/15\approx 23.46$ **v2)** $1432\pi/35\approx 128.54$

19.12 26890.85 €

20.1 (i) 54.14 (ii) 87.50 (iii) $24\pi+8\approx 83.40$

20.3 (i) 45.63 (ii) 1450.4 (iii) 9267.7

20.4 80.61

20.5 45.73

21.1 28.052

21.2 Esiintyy *t*, $t^2/2-1/6$

21.4 **v1)** 124.2 **v2)** 3632.6

21.5 **v1)** 119.7 **v2)** 28.8

21.6 $704\pi\sqrt{2}/15\approx 208.52$

22.2 $m=621\pi\approx 1951$, $I=2430\pi\approx 7634$

22.5 156

Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjaan kuuluvassa teoksessa Differentiaali- ja integraalilaskenta on pyritty huomioimaan insinööriopetuksessa tapahtunut lähiopetuksen voimakas vähentyminen. Matematiikassakin on keskityttävä kaikkein oleellisimpaan: käsitteiden hallitsemiseen, apuvälineiden tehokkaaseen hyödyntämiseen mekaanisen käsinlaskennan asemasta sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten selkeään esittämiseen.

Yhden kirjoittajan omat opiskelijat ovat viime vuodet käyttäneet TI-Nspire CX CAS -laskimia. Siksi teoksessa on hyödyllisiä ohjeita kyseisen laskimen käytöstä. Monet opiskelijat ovatkin tyytyväisinä todenneet ”oppineensa näkemään metsän puilta”. Myös muiden symbolisten laskimien ja matematiikkaohjelmien käyttäjät saavat kirjasta ideoita oman apuvälineensä hyödyntämiseen.

Tekijöiltä jo aiemmin ilmestyneiden teosten Algebra ja Geometria lisäksi lähitulevaisuudessa ilmestyy vielä differentiaaliyhtälöitä käsittelevä oppimateriaali. Kaikki sarjan teokset ovat vapaasti tulostettavissa ja jaettavissa koko sivun kopioina opetuskäyttöön.

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit 3/2016
ISSN 2323-8364
ISBN 978-951-633-209-6

Julkaisija
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi

samk