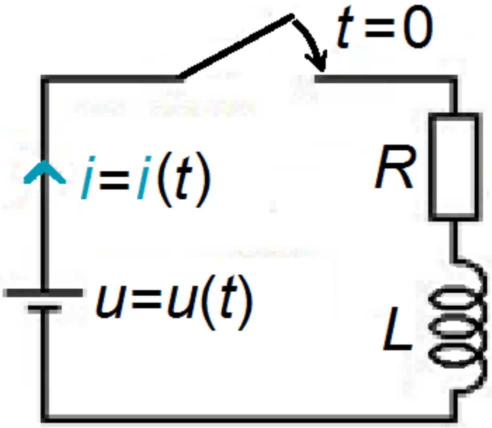
Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

DIFFERENTIAALI-YHTÄLÖT



$$\begin{cases} Li'(t)+Ri(t)=u(t) \\ i(0^+)=0 \end{cases}$$

ESIPUHE

Tämä differentiaaliyhtälöitä käsittelevä oppimateriaali on tarkoitettu insinöörikoulutukseen. Tietyillä erikoisaloilla kuten sähkötekniikassa differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ratkaisemiseen paljon käytettyä $\mathscr{L}$ - muunnosta käsitellään Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjan toisessa opuksessa nimeltään Laplace-muunnos. Molempien opusten sisältö on rajattu niihin asioihin, jotka allekirjoittaneista Timo Ojala on käsitellyt viimeksi omassa matematiikan opetuksessaan SAMK Tekniikka Porissa. Aineiston muokkaamiseen ja esimerkkien laskemiseen ovat osallistuneet sekä matematiikan ylioppilas Leena Ojala että matematiikan yliopisto-opettaja Timo Ranta.

Insinöörillä on matematiikan opiskelussa kolme tärkeää tavoitetta: asioiden ymmärtäminen, tarvittavien laskujen suorittaminen sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten esittäminen.

I: Insinöörin tulee ymmärtää matemaattisten käsitteiden oleellinen sisältö. Insinöörin pitää pystyä muuttamaan kohtaamansa reaalimaailman ongelma matemaattiseen muotoon ja ratkaisun jälkeen kriittisesti tulkitsemaan vastaus alkuperäisen ongelman kannalta.

II: Insinöörin tulee pystyä suorittamaan ne matemaattiset laskut, jotka ovat tarpeen matemaattiseen muotoon saattamansa ongelman ratkaisemiseksi. Keskimääräisellä insinööriopiskelijalla ei monista eri syistä johtuen enää ole mahdollisuuksia suorittaa esimerkiksi vaativia mekaanisia integrointeja käsin laskien. Insinöörillä ei siihen ole silti enää tänä päivänä mitään tarvettakaan. **Tehokkaat matematiikkaohjelmat ja symboliset laskimet pystyvät suorittamaan nopeammin ja luotettavammin kaikki ne mekaaniset laskutoimitukset, joihin parhaat insinöörit ovat milloinkaan pystyneet. Laskimet pystyvät vielä enempäänkin ja kaikki tämä tapahtuu ilman, että teknisen ongelmansa parissa työskentelevä insinööri mitään menettää. Niinpä insinöörin tulee jo opiskeluaikanaan oppia hyödyntämään tehokkaita apuvälineitä. Mekaanisten laskujen suorittaminen apuvälineitä käyttäen jättää opiskelussa enemmän aikaa myös kahteen muuhun tavoitteeseen pääsemiseen.**

III: Ongelmanratkaisussa käytetyt menetelmät ja laskinkomennot yms. on esitettävä niin hyvin dokumentoituina, että ulkopuolinenkin ymmärtää ratkaisun eri vaiheet ja voi ne toistaa. Suppean monisteen lyhyet esimerkkiratkaisut eivät tähän ehkä aina yllä, mutta tarkoitus onkin tarvittaessa käydä tällaiset esimerkit tunnilla opettajan selittäminä yksityiskohtaisesti lävitse.

Apuna esimerkeissä on käytetty symbolista laskinta TI-Nspire CX CAS. Annetuista ohjeista saa vinkkejä muidenkin symbolisten laskinten tai matematiikkaohjelmien hyödyntämismahdollisuuksista.

Monisteeseen on liitetty runsaasti harjoitustehtäviä. **Kaikki käsin laskettaviksi annetut tehtävät voi ja kannattaakin aina tarkistaa laskimella.** Kotitehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut on tarvittaessa tarkoitus käsitellä tunneilla samalla, kun tavoitteena olisi opettaa tulosten kriittistä arviointia. Monisteen lyhyt esitystapa ei ole antanut mahdollisuuksia sopivien arviointitapojen riittävään käsittelemiseen.

Oppimateriaalisarjan jatkokehittämistä varten otamme kiitollisina vastaan ilmoitukset painovirheistä ja parannusideat pienistä yksityiskohdista aina laajempiin kokonaisuuksiin asti. Samalla lausumme kiitokset myös "Ojalain laskuoppien" aiemmille kehittäjille FM Marjo Ojalalle ja päämatemaatikko, SHV Lauri Ojalalle.

Porissa 27.2.2017

Timo Ojala
Emeritus yliopettaja
PTOL/SAMK 1977-2016
timo.ojala@live.fi

Leena Ojala
Matematiikan yo
Åbo Akademi

Timo Ranta
Matematiikan yliopisto-opettaja
TTY
timo.ranta@tut.fi

SISÄLLYSLUETTELO

1. Yleistä

Tavallista yhtälöä ratkaistaessa haetaan kaikkia niitä lukuja, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön. Yhtälön tarkka ratkaiseminen on usein hankalaa tai jopa mahdotonta. Sijoittamalla voi kuitenkin helposti tutkia, ovatko annetut luvut tietyn yhtälön ratkaisuja. Esimerkiksi luvuista 1, 2 ja 3 vain kaksi ensimmäistä toteuttaa yhtälön $x^2-3x+2=0$, sillä $1^2-3\cdot 1+2=0$ ja $2^2-3\cdot 2+2=0$, mutta $3^2-3\cdot 3+2=2\neq 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla voi löytää tämän yhtälön ratkaisut.

Differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa haetaan kaikkia niitä funktioita, jotka derivaattoineen toteuttavat annetun yhtälön. Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on monasti hyvin työlästä tai jopa mahdotonta, joskin tavallisimpia luonnonilmiöitä kuvaavat differentiaaliyhtälöt ovat usein ratkaistavissa.

Epävirallinen lyhenne DY tarkoittaa jatkossa sanaa differentiaaliyhtälö.

Määritelmä. Differentiaaliyhtälön **kertaluku** tarkoittaa yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertalukua.

Esimerkki. Tutki, mitkä funktioista

$$y_1=e^{2x}+x+4\ ,\ \ y_2=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+x+4\ ,\ \ y_3=e^{2x}+3x+5$$

toteuttavat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y''-3y'+2y=2x+5.$$

Sekä tässä esimerkissä että jatkossa merkinnät C, C_1, C_2, ... tarkoittavat mielivaltaisia vakioita, vaikka sitä ei yleensä mainita.

Lasketaan annetun funktion derivaatat ja sijoitetaan ne yhtälön vasempaan puoleen, mikä tapahtuu nyt laskemalla allekkain olevat derivaatat yhteen yhtälössä olevilla kertoimilla 1, -3 ja 2 kerrottuina. Jos tulokseksi saadaan yhtälön oikean puolen lauseke $2x+5$, niin funktio on differentiaaliyhtälön ratkaisu.

$$\begin{array}{l|l} y_1=e^{2x}+x+4 & \cdot 2 \\ y_1'=2e^{2x}+1 & \cdot(-3) \\ y_1''=4e^{2x} & \cdot 1 \end{array}$$

$$\overline{y_1''-3y_1'+2y_1=(2-6+4)e^{2x}+2x+8-3=2x+5}$$

$\therefore$ Funktio y_1 toteuttaa differentiaaliyhtälön

Tarkistamisen voi suorittaa tietenkin myös laskimella monin eri tavoin:

Define $y2=c1\cdot e^{2x}+c2\cdot e^{x}+x+4$ ↵ Valmis

$\frac{d^2}{dx^2}(y2)-3\frac{d}{dx}(y2)+2\cdot y2$ ↵ $2\cdot x+5$ $\therefore$ Funktio y_2 toteuttaa differentiaaliyhtälön

DelVar $y2$ ↵ Valmis

Seuraavassa laskinsyötteessä hyödynnetään with-operaattoria |, jolloin ei määritellä pysyvämmin funktiota, joka saattaisi unohtua haittaamaan jatkolaskuja:

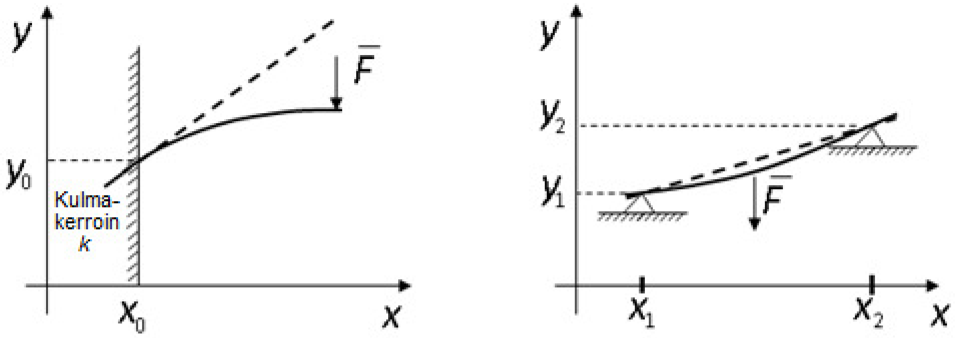
$$\frac{d^2}{dx^2}(y)-3\frac{d}{dx}(y)+2\cdot y \;\Big|\; y=e^{2x}+3x+5 \quad ↵ \quad 6\cdot x+1$$

$\therefore$ Tämä funktio y ei toteuta differentiaaliyhtälöä.

Nimityksiä. Edellä ollut funktio y_2 on jopa ns. **yleinen ratkaisu**, koska voidaan osoittaa, että siitä saadaan tarkasteltavan differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut, kun kertoimet C_1 ja C_2 käyvät läpi kaikki reaaliluvut.
Esimerkiksi edellä ollut **yksityisratkaisu** y_1 saadaan yleisestä ratkaisusta y_2 valitsemalla $C_1=1$ ja $C_2=0$.

Lause. Jos differentiaaliyhtälön kertaluku on n, niin differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa on n määräämätöntä vakiota.

Nimityksiä. Monissa tehtävissä etsitään yleisen ratkaisun asemasta sellaista yksityisratkaisua, joka toteuttaa differentiaaliyhtälön kertaluvun mukaisen määrän **alkuehtoja** tai **reunaehtoja**. Alkuehdot on annettu yhdessä ja samassa pisteessä x ja ne koskevat funktion ja sen derivaattojen arvoja tässä pisteessä. Reunaehdoissa taas annetaan vaatimukset funktion arvoille eri pisteissä.
Seuraavat kuvat havainnollistavat kuormitetun palkin kimmoviivaan $y=y(x)$ liittyviä alkuehtoja ja reunaehtoja:



$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=k \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{cases}$$

Esim. Funktio $y = x^2 + C_1 x + C_2$ on DY:n $y'' = 2$ yleinen ratkaisu, koska se toteuttaa yhtälön ja siinä on DY:n kertaluvun 2 mukainen määrä vapaasti valittavia vakioita. Etsitään se DY:n $y'' = 2$ yksityisratkaisu, joka toteuttaa

a) alkuehdot $\begin{cases} y(1) = 6 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$ b) reunaehdot $\begin{cases} y(1) = 3 \\ y(2) = 7 \end{cases}$

a) Koska $y' = 2x + C_1$, niin alkuehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y(1) = 1^2 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 6 \\ y'(1) = 2 \cdot 1 + C_1 = 4 \end{cases}, \text{ jonka ratkaisu on } \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases}.$$

Etsitty yksityisratkaisu on siis $\underline{\underline{y = x^2 + 2x + 3}}$

b) Reunaehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y(1) = 1^2 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 3 \\ y(2) = 2^2 + C_1 \cdot 2 + C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Etsitty yksityisratkaisu on siis $\underline{\underline{y = x^2 + 1x + 1}}$

Tehtävä 1.1. Määritä kertoimelle r sellaiset arvot r_1 ja r_2, että $y = e^{rx}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön a) $y'' - 5y' + 4y = 0$ b) $y'' - 9y = 0$.
Osoita, että $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

Tehtävä 1.2. Määritä se edellisen tehtävän a-kohdan yksityisratkaisu, joka toteuttaa
a) alkuehdot $y(0) = 5$, $y'(0) = 14$
b) reunaehdot $y(1) = 4e$, $y(4) = 4e^4$

Tehtävä 1.3. Määritä kertoimelle r sellainen arvo, että $y = e^{rx}$ toteuttaa DY:n
a) $y'' - 4y' + 4y = 0$ b) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
Osoita, että $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$ on kyseisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

2. Differentiaaliyhtälön laskinratkaisu

Huomautus. Tavallisimmat 1. ja 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöt ratkeavat laskimen TI-Nspire CX CAS komennolla

deSolve(equation, independent variable, dependent variable)

(d: differential, e: equation). Ensimmäisenä parametrina olevan yhtälön perään voidaan and-sanoilla liittää enintään DY:n kertaluvun mukainen määrä joko alku- tai reunaehtoja seuraavien mallien mukaisesti edellisen esimerkin differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi:

deSolve($y''=2, x, y$) ↵ $y=c1\cdot x+c2+x^2$

deSolve($y''=2$ and $y(1)=6$ and $y'(1)=4, x, y$) ↵ $y=x^2+2x+3$

deSolve($y''=2$ and $y(1)=3$ and $y(2)=7, x, y$) ↵ $y=x^2+x+1$

deSolve($y''=2$ and $y(1)=3, x, y$) ↵ $y=x^2+(c3-2)x-c3+4$

Viimeinen vastaus saadaan ”kauniimpaan” muotoon $y=x^2+c4\cdot x+(2-c4)$ merkitsemällä $c3-2=c4$.

Huomaa, että derivaatan tunnuksena oleva pilkku ’ on sama kuin TI-laskimen kulmaminuutin tunnus, joka edellisessä esimerkissä on siis kirjoitettava kaksi kertaa peräkkäin.

Monissa oppikirjoissa esimerkiksi differentiaaliyhtälö $y''+y'+y=x$ kirjoitetaan pidemmässä ja selvemmässä muodossa $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x$, josta ilmenee, minkä muuttujan suhteen derivoidaan, mutta TI-*laskin ei hyväksy tätä merkintää* deSolve-*komennon sisällä* itse yhtälössä eikä alku- ja reunaehdoissa.

Huomautus. Vaikka alkuarvotehtävässä $y''+y=x$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$ ei esiinny trigonometrisiä funktioita, niin se on kuitenkin ratkaistava **radiaanimoodissa** komennolla

deSolve($y''+y=x$ and $y(0)=2$ and $y'(0)=3, x, y$)

koska DY:n ratkaisu $y=2\cos x+2\sin x+x$ sisältää trigonometrisia funktioita.

Jatkossa tarkastelemme myös kaikkein tavallisimpien differentiaaliyhtälötyyppien ratkaisemista käsin laskien. On huomattava, että kukin DY-tyyppi vaatii oman ratkaisumenetelmänsä. On olemassa myös paljon sellaisia differentiaaliyhtälöitä, joita ei pystytä analyyttisin menetelmin tarkasti ratkaisemaan, vaan on tyydyttävä numeerisiin tai graafisiin likimääräismenetelmiin.

Tehtävä 2.1. a) Määritä ensin laskimella differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' = 0$ yleinen ratkaisu. Totea sitten käsin laskien, että laskimen löytämä ratkaisu on todella differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.
b) Etsi sitten sekä käsin että laskimella se yksityisratkaisu, joka toteuttaa ehdot

b1) $\begin{cases} y(1) = 2e^3 \\ y'(1) = 6e^3 \end{cases}$ b2) $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(1) = 2 + e^3 \end{cases}$. Nimeä kohtien b1 ja b2 ehdot.

Tehtävä 2.2. Määritä ensin joko käsin tai laskinta käyttäen sellaiset kertoimen r arvot r_1, r_2 ja r_3, että $y = e^{rx}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y''' - 16y' = 0$.
Osoita sitten (käsin tai laskinta hyödyntäen), että $y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x}$ on kyseisen DY:n yleinen ratkaisu.
Huomaa, että TI-laskin ratkaisee vain 1. ja 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Tehtävä 2.3. Määritä ensin sellainen kerroin A, että $y_* = Ae^{3x}$ on yhtälön $y''' - 16y' = 5e^{3x}$ jokin yksityisratkaisu. Osoita, että $y = y_h + y_*$ on tämän yhtälön yleinen ratkaisu, kun y_h tarkoittaa tehtävässä 2.2 esiintyneen (vastaavan homogeenisen) yhtälön yleistä ratkaisua.

3. Muotoa $y^{(n)} = f(x)$ oleva differentiaaliyhtälö

Otsakkeen mukainen differentiaaliyhtälö ratkaistaan suorittamalla n perättäistä integrointia joko käsin tai tietenkin kätevämmin laskimella. Laskinta käyttäessäsi sinun pitää itse lisätä jokaisen integroinnin yhteydessä uusi integroimisvakio.

Esimerkki. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y' = 2x$ ratkeaa integroimalla

$$y = \int 2x \; dx = x^2 + C.$$

Esimerkki. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' = 6x$ ratkeaa kahdella perättäisellä integroinnilla:

$$y' = \int 6x \; dx = 3x^2 + C_1 \quad , \quad y = \int (3x^2 + C_1)dx = x^3 + C_1x + C_2 .$$

Huomaa, että yo esimerkkien yleisissä ratkaisuissa on vapaasti valittavia vakioita differentiaaliyhtälön kertaluvun mukainen määrä.

Tehtävä 3.1. Ratkaise a) $y'' = \sin(2x)$ b) $y''' = 24x$

4. Muuttujien erottaminen, separoituva DY

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä, joka voidaan muuntaa muotoon $y' = f(x)\cdot g(y)$, sanotaan **separoituvaksi,** koska siinä voidaan **erottaa muuttujat** yhtälön eri puolille korvaamalla derivaatta differentiaalien osamäärällä ja suorittamalla sopivia kerto- ja jakolaskuja:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx\,.$$

Jos saadun yhtälön molemmat puolet integroidaan, niin saadaan *y*:n ja *x*:n välinen algebrallinen yhtälö, jota voidaan pitää differentiaaliyhtälön ratkaisuna, vaikkakin se on vielä algebrallisesti ratkaisemattomassa muodossa.

Saadusta algebrallisesti implisiittisestä ratkaisusta voidaan vielä monesti algebrallisestikin ratkaista funktio *y* muuttujan *x* lausekkeena.

Esimerkki. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $y' = \dfrac{4x^3}{y^2}$ alkuehdolla $y(1) = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y^2} \;\Big|\cdot y^2dx \quad \Leftrightarrow \quad y^2dy = 4x^3dx \quad \Leftrightarrow \quad \int y^2dy = \int 4x^3dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^3}{3} \overset{(*)}{=} x^4 + C$$

Koska alkuehdon mukaan *x*:n arvolla 1 tulee *y*:n olla 2, niin saadaan yhtälö

$$\frac{2^3}{3} = 1^4 + C\,, \quad \text{josta} \quad C = \frac{5}{3}.$$

Lopulta yhtälöstä $(*)$ saadaan

$$y = \sqrt[3]{3x^4 + 5}\,.$$

Tehtävä 4.1. Ratkaise sekä käsin että laskimella seuraavista differentiaaliyhtälöistä ne, jotka ovat separoituvia**:**

a) $y'' = x\cdot y$ b) $x^2y' = y$ c) $y' + xy = x$ d) $y' + 2y = x$ **.**

Tutki pystyykö laskin ratkaisemaan ne yhtälöt, jotka eivät ole separoituvia. Tarkista käsin laskien, että laskimen mahdollisesti löytämät ratkaisut ovat todella ratkaisuja.

Tehtävä 4.2. Määritä sekä käsin että laskimella $z = z(t)$, kun $\begin{cases} z' = t\cdot z \\ z(0) = 4 \end{cases}$.

Huomaa, että tässä tehtävässä etsitään muuttujan *t* funktiota $z(t)$**.**

5. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY

Lineaarisessa differentiaaliyhtälössä voi tuntematon funktio ja sen derivaatat esiintyä vain ensimmäisessä potenssissa. Tuntemattomasta funktiosta tai sen derivaatoista ei voi esiintyä mitään muita potensseja, funktioita tai sekatuloja. Vapaa muuttuja voi sen sijaan esiintyä millaisessa muodossa tahansa.

Lause. Ensimmäisen kertaluvun lineaarisen DY:n

$$y' + u(x) \cdot y = v(x)$$

yleinen ratkaisu on

$$y = e^{-\int u(x)\,dx}\left(\int v(x) \cdot e^{\int u(x)\,dx}\,dx + C\right).$$

Lausetta koskevia huomautuksia:

1. Yllä olevan lauseen ratkaisukaavan merkitys jää tässä matematiikan kurssimateriaalissa varsin vähäiseksi johtuen kahdestakin eri syystä
   - insinöörikoulutuksessa on lähiopetustuntimääriä voimakkaasti leikattu, joten ei kannata keskittyä kaavoihin, joiden lopputuloksen luonnetta ei hevin pysty näkemään ja joiden käyttö edellyttää vahvaa laskurutiinia
   - insinöörisovelluksiin liittyvät differentiaaliyhtälöt ovat tavallisesti vakiokertoimisia, sillä yhtälöiden kertoimiksi tulee esimerkiksi virtapiirin komponenttien arvot, jotka usein ovat vakioita. Tavallisesti esimerkiksi tietyn kondensaattorin kapasitanssi ja tietyn vastuksen resistanssi ovat vakioita, vaikka joissakin tilanteissa vastuksen resistanssi voi muuttua lämpenemisestä johtuen. Vakiokertoimisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on kohtuullisen yksinkertaista ja ratkaisufunktiot ovat usein ennalta arvattavaa tyyppiä.
2. Lauseessa esiintyvät lausekkeet $u(x)$ ja $v(x)$ saavat periaatteessa olla muuttujan x mitä tahansa epälineaarisiakin lausekkeita, kunhan vain yhtälö on lineaarinen funktion y ja sen derivaatan y' suhteen. Jos lausekkeet $u(x)$ ja $v(x)$ ovat hankalia, niin lauseen mukaisia integraaleja ei pystytä yleensä lainkaan laskemaan.
3. Yo ratkaisukaavaa käytettäessä on yhtälön oltava tarkalleen oletettua muotoa ja erityisesti y':n kertoimen on oltava 1, mihin päästää jakamalla yhtälö mahdollisella ykkösestä eroavalla kertoimella.
4. Kaavassa olevia integraaleja laskettaessa ei tarvitse huomioida muita integroimisvakioita kuin kaavaan jo valmiiksi kirjoitettu C.

Esim. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $2y' + 4y = 3e^x$ poikkeuksellisesti edellä olleella ratkaisukaavalla, vaikka tämä on ns. vakiokertoimien lineaarinen differentiaaliyhtälö, koska siinä tuntemattoman funktion ja sen derivaatan kertoimet ovat vakiota, jolloin sen voisi ratkaista myöhemmin huomattavasti helpommin.

Ratkaisukaavan käyttämiseksi yhtälö jaetaan ensin kahdella, jolloin saadaan

$$y' + 2y = 1.5e^x .$$

Koska kerroinfunktion $u(x) = 2$ integraali esiintyy ratkaisukaavassa kahdessakin kohdassa, niin lasketaan ensin kyseinen integraali $\int u(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$ ja edelleen ratkaisukaavaa käyttäen

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int u(x)dx}\left(\int v(x)\cdot e^{\int u(x)dx}\,dx + C\right) \\ &= e^{-2x}\left(\int 1.5e^x \cdot e^{2x}\,dx + C\right) = e^{-2x}\left(\int 1.5e^{3x}\,dx + C\right) \\ &= e^{-2x}\left(0.5e^{3x} + C\right) = 0.5e^x + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Huomautus. Ensimmäisen kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista samanlaisin vaihein kuin seuraavissa pykälissä käsiteltävät toisen ja korkeammankin kertaluvun vakiokertoimiset lineaariset differentiaaliyhtälöt.

Tehtävä 5.1. Ratkaise sekä käsin että laskimella

a) $3y' + 3y - 4e^{2x} = 0$ b) $2y' - y = e^x$ c) $x \cdot y' - y = x$

6. Vakiokertoiminen toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

Otsakkeen mukainen yhtälö on muotoa

(1) $$k \cdot y'' + l \cdot y' + m \cdot y = v(x)$$

(*k, l, m* vakioita) ja se voidaan ratkaista kolmessa vaiheessa seuraavasti:

Vaihe 1. Vastaavan homogeenisen (tasa-asteisen, jokaisen termin asteluku on sama, nyt 1) **differentiaaliyhtälön**

(2) $$k \cdot y'' + l \cdot y' + m \cdot y = 0$$

yleinen ratkaisu saadaan ns. **karakteristisen yhtälön**

$$k \cdot r^2 + l \cdot r + m = 0$$

juurten r_1 ja r_2 avulla seuraavasti:

1. Jos karakteristisen yhtälön juuret ovat erisuuret reaaliluvut r_1 ja r_2, niin homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on
$$y_h = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \ .$$
2. Jos karakteristisella yhtälöllä on reaalinen kaksoisjuuri $r_1 = r_2 = r$, niin homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on
$$y_h = C_1 \cdot e^{r x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r x} \ .$$
3. Jos karakteristisella yhtälöllä on imaginaariset juuret $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, niin homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on
$$y_h = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \sin(\beta x) + C_2 \cdot \cos(\beta x)\right) \ .$$

Esimerkki. Jos vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön $k \cdot y'' + l \cdot y' + m \cdot y = 0$ karakteristisen yhtälön juuret ovat

a) $r_1 = 2, r_2 = 3$, niin DY:n yleinen ratkaisu on $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

b) $r_1 = r_2 = 4$, niin DY:n yleinen ratkaisu on $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

c) $r_{1,2} = -5 \pm 6i$, niin DY:n yleinen ratkaisu on $y = e^{-5x}(C_1 \sin(6x) + C_2 \cos(6x))$

Huomaa, että imaginaaristen juurten tapauksessa yleiseen ratkaisuun kerroin α tulee merkkeineen, kerroin β (mieluummin) ilman merkkiä.

Vaihe 2. Alkuperäisen täydellisen differentiaaliyhtälön (1) jokin yksityisratkaisu y_* voidaan usein hakea seuraavan taulukon mukaisella fiksulla yritteellä:

DY:n (1) oikea puoli	Yrite y_*
Vakio a	Tuntematon vakio A
1. asteen polynomi $ax+b$ (tai pelkkä ax)	$Ax+B$
2. asteen polynomi ax^2+bx+c (tai pelkkä ax^2)	Ax^2+Bx+C
$a\cdot e^{kx}$	$A\cdot e^{kx}$
$a\cdot\sin(kx)+b\cdot\cos(kx)$ (tai pelkkä $a\cdot\sin(kx)$)	$A\cdot\sin(kx)+B\cdot\cos(kx)$

Yritetaulukkoa koskevia huomautuksia:

- Yritteessä olevien vakioiden arvot *A, B, C,* … löydetään vaatimalla, että yrite differentiaaliyhtälöön sijoitettuna toteuttaa ko. yhtälön.
- Yritteen tulee olla niin täydellinen, että se sisältää kaikki ne termityypit, jotka saadaan yritettä toistuvasti derivoitaessa ts. jos yritteessä on termi x^3, niin siinä tulee olla myös muotoa x^2, x ja vakio olevat termit vakioilla kerrottuna.
- Jos taulukon mukainen yrite on vastaavan homogeenisen DY:n (2) ratkaisu, niin taulukon mukainen yrite on kerrottava muuttujalla x (tai muuttujalla t, jos tuntematon funktio riippuu ajasta t, kuten fysiikassa on tavallista).
- Jos DY:n oikea puoli on taulukossa esiintyvien kahden eri funktion summa, niin yritekin on tehtävä taulukossa esitettyjen vastaavien yritteiden summana.

Vaihe 3. Alkuperäisen täydellisen DY:n (1) yleinen ratkaisu saadaan laskemalla yhteen vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu y_h sekä täydellisen yhtälön jokin yksityisratkaisu y_* ts. $y = y_h + y_*$.

Esimerkki. Ratkaistaan $y'' + 3y' - 4y = 28e^{3x}$ edellä esitetyin vaihein:

Vaihe 1. Vastaavan homogeenisen DY:n $y'' + 3y' - 4y = 0$ yleinen ratkaisu löydetään karakteristisen yhtälön juurten avulla:

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = 1 \text{ tai } r_2 = -4$$

Koska karakteristisen yhtälön juuret ovat erisuuret reaaliluvut, niin

$$y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C_1e^{1x} + C_2e^{-4x}$$

Vaihe 2. Tehdään fiksu yrite

$$\begin{array}{l|l} y_* = Ae^{3x} & \cdot -4 \\ y_*' = 3Ae^{3x} & \cdot 3 \\ y_*'' = 9Ae^{3x} & \cdot 1 \end{array}$$

$$y_*'' + 3y_*' - 4y_* = 14Ae^{3x} \overset{\text{oltava}}{=} 28e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad A = 2 \quad \therefore \quad y_* = 2e^{3x}$$

Vaihe 3. $y = y_h + y_* = \underline{\underline{C_1e^x + C_2e^{-4x} + 2e^{3x}}}$

Esimerkki. Ratkaistaan $y'' - 4y' + 4y = 16\sin(2x)$ edellä esitetyin vaihein:

Vaihe 1. Vastaavan homogeenisen yhtälön $y'' - 4y' + 4y = 0$ yleinen ratkaisu löydetään karakteristisen yhtälön avulla: $r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$

Koska yhtälöllä on reaalinen kaksoisjuuri, niin $y_h = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Vaihe 2. Alkuperäisen yhtälön jokin yksityisratkaisu y_* löydetään taulukon mukaisella täydellisellä yritteellä, jollaiseksi pelkkä $A\sin(2x)$ ei riitä:

$$\begin{array}{l|l}
y_* = A\sin(2x) + B\cos(2x) & \cdot\ 4 \\
y_*' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) & \cdot -4 \\
\underline{y_*'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)} & \cdot\ 1
\end{array}$$

$$y_*'' - 4y_*' + 4y_* = \underline{8B}\sin(2x) \underline{\underline{-8A}}\cos(2x) \overset{\text{vaaditaan}}{\equiv} \underline{16}\sin(2x) + \underline{\underline{0}}\cos(2x)$$

Vastintermien samoin alleviivattujen kertoimien on oltava pareittain yhtä suuret:

$$\begin{cases} 8B = 16 \\ -8A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad y_* = 0\sin(2x) + 2\cos(2x) = 2\cos(2x)$$

Vaihe 3. Alkuperäisen täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan vaiheissa 1 ja 2 laskettujen osien summana: $\underline{\underline{y = y_h + y_* = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2\cos(2x)}}$

Esimerkki. Ratkaistaan $y'' - 4y' + 3y = 9x + 4e^{3x}$ jälleen kolmessa vaiheessa:

Vaihe 1. Homogeenisen yhtälön $y'' - 4y' + 3y = 0$ yleinen ratkaisu löydetään karakteristisen yhtälön avulla: $r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3$, joten $y_h = C_1 e^{1x} + C_2 e^{3x}$

Vaihe 2. Yrite on tehtävä kaksiosaisena:

- Termiä $9x$ vastaavaksi yritteeksi ei riitä Ax, vaan yritteen on oltava niin täydellinen, että se sisältää myös vakion eli tältä osin yrite on $Ax + B$.
- Termiä $4e^{3x}$ vastaavaksi yritteeksi ei tällä kertaa kelpaa Ce^{3x}, koska tämänmuotoinen termi on mukana homogeenisen yhtälön yleisessä ratkaisussa. Tältä osin on tehtävä uusi, muuttujalla x kerrottu yrite Cxe^{3x}.

Yrite on siis

$$\begin{array}{l|l}
y_* = Ax + B + \cancel{Cxe^{3x}} & \cdot 3 \\
y_*' = A + Ce^{3x} + \cancel{3Cxe^{3x}} & \cdot -4 \\
\underline{y_*'' = 3Ce^{3x} + 3Ce^{3x} + \cancel{9Cxe^{3x}}} & \cdot 1
\end{array}$$

$$y_*'' - 4y_*' + 3y_* = \underline{3A}x + \underline{\underline{(3B - 4A)}} + \underline{\underline{\underline{2C}}}e^{3x} \overset{\text{vaaditaan}}{\equiv} \underline{9}x + \underline{\underline{0}} + \underline{\underline{\underline{4}}}e^{3x}$$

Vastinkertoimia vertaamalla saadaan $A = 3, B = 4, C = 2$, joten $y_* = 3x + 4 + 2xe^{3x}$

Vaihe 3. $y = y_h + y_* = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 3x + 4 + 2xe^{3x}}}$

Huomautus. Edelliset esimerkit ratkeavat TI-Nspire CX CAS-laskimella luvussa 2 kuvatulla tavalla, kokeilepa! TI-laskin pystyy ratkaisemaan sellaisiakin ensimmäisen ja toisen kertaluvun yhtälöitä, joita ei tässä opuksessa käsitellä. Huomaa, että TI-laskin ratkaisee differentiaaliyhtälöitä tehokkaammilla tavoilla kuin edellä esitettyä fiksua yritettä käyttämällä ja siksi varsinkin laskimen trigonometriset vastaukset voivat seuraavan esimerkin mukaisesti olla erinäköiset kuin ”fiksulla” yritteellämme löytyvät luonnollisen tuntuiset ratkaisut.

Esimerkki. Jos ratkaiset yhtälön $y''-2y'+2y=10\cos(2x)$ edellä olleella kolmivaiheisella menetelmällä karakteristisen yhtälön ja fiksun yritteen avulla, niin saat ratkaisun muodossa $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)\underline{-2\sin(2x)-\cos(2x)}$, jossa alleviivattu luonnollisentuntuinen yksityisratkaisu on taulukon mukainen.

Laskinratkaisun $y=c1\cdot e^x\cdot\cos(x)+c2\cdot e^x\cdot\sin(x)\underline{-2(\cos(x))^2-4\sin(x)\cos(x)+1}$ vastaava osa on kovin toisenlainen ja ennalta arvaamattoman näköinen. Laskin ei haekaan yksityisratkaisua yritteellä vaan tehokkaammalla tavalla, joka sopii joihinkin sellaisiinkin tapauksiin, joissa ei ole olemassakaan ”fiksua” yritettä.

Laskimen laskeman yksityisratkaisun voit radiaanimoodissa koota seuraavasti

$$\text{tCollect}(-2(\cos(x))^2-4\sin(x)\cos(x)+1)\ \boxed{\hookleftarrow}\ -\sqrt{5}\sin(2x+\tan^{-1}(\tfrac{1}{2}))\ ,$$

jonka voit *summan osalta astemoodissa hajottaa* em. fiksuksi yriteratkaisuksi

$$\text{tExpand}(-\sqrt{5}\sin(2x\underline{\underline{+}}\tan^{-1}(\tfrac{1}{2}))\ \boxed{\hookleftarrow}\ -2\sin(2x)-\cos(2x)\ .$$

Katsopa tarkemmin Ojalain laskuoppien opuksesta Geometria, kuinka radiaanimoodista poiketen komento tExpand *ei astemoodissa hajota monikertaa* $2x$.

Tehtävä 6.1. Määritä yhtälön $k\cdot y''(x)+l\cdot y'(x)+m\cdot y(x)=0$ yleinen ratkaisu, jos karakteristisen yhtälön juuret ovat a) -1 ja 0 b) 2 ja 2 c) $-4\pm3i$

Tehtävä 6.2. Ratkaise käsin ja laskimella yhtälöt
a) $y''-4y'+5y=0$ b) $y''+4y'+4y=0$ c) $y''+2y'+5y=0$

Tehtävä 6.3. Etsi käsin laskien seuraaville yhtälöille jotkin yksityisratkaisut
a) $y''-4y'+5y=7$ b) $y''-4y'+5y=2e^{3x}$
c) $y''-4y'+5y=3x^2$ d) $y''-4y'+5y=e^{2x}+\sin(3x)$

Tehtävä 6.3. Ratkaise käsin ja laskimella
a) $y''-3y'+2y=5e^{4x}$ b) $y''-2y'+y=3x$ c) $y''-3y'=\sin(2x)$
d) $y''+y'=\sin x+\cos(2x)$ e) $y''-2y'=3e^{2x}$ f) $y''-4y'+4y=3e^{2x}$

Tehtävä 6.4. Ratkaise käsin ja laskimella $z=z(t)$, kun $z''-4z=3e^{2t}$.

Tehtävä 6.5. Muodosta differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on
a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ b) $y=C_1e^x+C_2xe^x$ c) $y=e^{3x}(C_1\sin(7x)+C_2\cos(7x))$

7. Vakiokertoiminen *n*. kertaluvun lineaarinen DY

Edellisessä luvussa ollut teoria yleistetään tässä luvussa koskemaan vakiokertoimista *n.* kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$k_n y^{(n)} + \ldots + k_1 y' + k_0 y = v(x) \ .$$

Yllä olevaa täydellistä yhtälöä vastaavan **homogeenisen differentiaaliyhtälön**

$$k_n y^{(n)} + \ldots + k_1 y' + k_0 y = 0$$

karakteristinen yhtälö saadaan korvaamalla y:n derivaatta vastaavalla r:n potenssilla, joten y''' korvataan r^3:lla ja y eli $y^{(0)}$ korvataan potenssilla $r^0 = 1$.

Esimerkki.

Differentiaaliyhtälö	Karakteristinen yhtälö
$3y' + 4y = 0$	$3r + 4 = 0$
$2y''' + 3y'' + 4y' + 5y = 0$	$2r^3 + 3r^2 + 4r + 5 = 0$
$y^{(4)} + 3y = 0$	$r^4 + 3 = 0$

Huomaa erityisesti, että alimman rivin karakteristinen yhtälö ei ole $r^4 + 3r = 0$, koska y on karakteristisessa yhtälössä korvattava r^0 :lla eli ykkösellä!

Vakiokertoimisen homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan karakteristisen yhtälön juurten avulla seuraavasti:

Esimerkki.

DY:n kerta-luku	Karakte-ristisen yhtälön juuret	Homogeenisen DY:n yleinen ratkaisu
1	5	$y_h = C_1 e^{5x}$
3	0,5,6	$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{6x} = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 e^{6x}$
3	5,5,5	$y_h = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + C_3 x^2 e^{5x}$
4	$5,5,6 \pm 7i$	$y_h = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + e^{6x}(C_3 \sin(7x) + C_4 \cos(7x))$
5	$5,5,6,\pm 7i$	$y_h = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + C_3 e^{6x} + C_4 \sin(7x) + C_5 \cos(7x)$

Esimerkki. Ratkaise $w = w(t)$, kun $w^{(6)} + 2w^{(5)} + w^{(4)} - 4w''' - 4w'' + 4w = 0$.

Koska karakteristisen yhtälön $r^6 + 2r^5 + r^4 - 4r^3 - 4r^2 + 4 = 0$ juuret ovat kaksinkertaiset $r_1 = r_2 = 1$ ja $r_{3,4} = r_{5,6} = -1 \pm i$, niin yhtälön yleinen ratkaisu on

$$w = C_1 e^t + C_2 t e^t + e^{-t}(C_3 \sin t + C_4 \cos t) + t e^{-t}(C_5 \sin t + C_6 \cos t)$$

Edellisessä luvussa esitetyn toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön kolmivaiheisen ratkaisumenetelmän vaiheet 2 ja 3 sopivat myös korkeamman kertaluvun vakiokertoimisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen.

Esimerkki. Ratkaistaan funktio $z = z(t)$, kun

$$z^{(5)} - 8z''' + 16z' = 7e^{2t} \text{ .}$$

Vaihe 1. Vastaavan homogeenisen yhtälön karakteristinen yhtälö on

$$r^5 - 8r^3 + 16r = 0\,,$$

jolle löydetään odotetun viiden juuren asemasta vain kolme juurta 0, 2 ja -2 laskimen Solve- ja cSolve-komennoilla. Factor-komennolla voi varmistaa, että juuret 2 ja -2 ovat kaksinkertaiset. Niinpä homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$z_h = C_1 e^{0t} + C_2 e^{2t} + C_3 te^{2t} + C_4 e^{-2t} + C_5 te^{-2t}$$

Vaihe 2. Koska yritetaulukon mukainen yrite $z_* = Ae^{2t}$ on mukana homogeenisen yhtälön yleisessä ratkaisussa, niin on tehtävä uusi, muuttujalla t kerrottu yrite $z_* = Ate^{2t}$. Koska sekin on mukana ratkaisussa z_h, niin on tehtävä vieläkin uudelleen kerrottu yrite $z_* = At^2e^{2t}$. Toistuvien käsin suoritettavien derivointien välttämiseksi voit laskimella todeta, että laskinsyöte

$$\frac{d^5}{dt^5}(z) - 8\frac{d^3}{dt^3}(z) + 16\frac{d}{dt}(z) \;\Big|\; z = A \cdot t^2 e^{2t}$$

antaa tulokseksi $64Ae^{2t}$, minkä pitäisi olla differentiaaliyhtälön oikealla puolella oleva lauseke $7e^{2t}$. Näin saadaan ratkaistua vakio $A = \dfrac{7}{64}$, joten

$$z_* = At^2e^{2t} = \frac{7}{64}t^2e^{2t}\,.$$

Vaihe 3. Alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$z = z_h + z_* = C_1 + C_2e^{2t} + C_3te^{2t} + C_4e^{-2t} + C_5e^{-2t} + \frac{7}{64}t^2e^{2t}$$

Huomautus. Vaikka TI-laskin ei ratkaise kolmannen eikä korkeamman asteen vakiokertoimisia lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, niin siitä on edellisen esimerkin mukaisesti suuri apu

- korkean asteisen karakteristisen yhtälön ratkaisemisessa
- ”fiksuun” yritteeseen liittyvien kertoimien määrittämisessä
- mahdollisten alku- ja reuna-ehtojen määrittämien kertoimien laskemisessa .

Tehtävä 7.1. Ratkaise a) $y'''' - y = e^{2x}$ b) $y''' - y' = \sin x$

Tehtävä 7.2. Ratkaise $z = z(t)$, kun $z''' - z'' = e^{2t} + 3$

8. Verrannollisuudesta

Tarvittaessa sinun kannattaa kerrata verrannollisuuden teoriaa vaikkapa Ojalain laskuoppien opuksesta Algebra!

Esimerkki. Jos suure z on samanaikaisesti (suoraan) verrannollinen suureen x neliöön ja kääntäen verrannollinen suureen y kuutiojuureen, niin silloin on olemassa sellainen vakio k, että

$$z = k \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{y}}.$$

Vakio k on ns. verrannollisuuskerroin.

Tehtävä 8.1. Kirjoita näkyviin suureita koskeva ehto kaavan avulla, jos

a) suure T on samanaikaisesti verrannollinen suureisiin x ja y sekä kääntäen verrannollinen suureen z kuutioon

b) suure p on samanaikaisesti verrannollinen suureen v kuutiojuureen ja kääntäen verrannollinen suureen t neliöön.

Tehtävä 8.2. Totea sanallisesti, miten seuraavissa yhtälöissä vasemmalla oleva muuttuja on verrannollinen oikealla puolella oleviin muuttujiin x, y ja z, jos kyseessä todella on verrannolliset suureet.

a) $z = \sqrt{3} \cdot \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{y}}$

b) $z = 2xy^3 + z^2$

c) $w = \dfrac{3.14x^2\sqrt{y}}{z^3}$

d) $u = 2x^3 - 3y^2 + \dfrac{4}{\sqrt{z}}$

9. Sekalaisia sovellustehtäviä

Differentiaaliyhtälöön päädytään esimerkiksi sellaisissa tehtävissä, joissa tiedetään funktion muuttumisnopeutta sitova ehto. Funktion muuttumisnopeutta kuvaa derivaatta, jolloin edellä mainittu ehto koskeekin itse asiassa tuntemattoman funktion derivaattaa ja kyseessä on siis differentiaaliyhtälö.

Esimerkki. Veden valuessa suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin pohjassa olevasta reiästä vedenpinnan korkeuden $h(t)$ muutosnopeus on suoraan verrannollinen pinnan korkeuden neliöjuureen. Kuinka kauan kestää tynnyrin tyhjeneminen, jos alussa $h(0) = 150$ ja $h(200) = 100$?

Lähtötiedoista saatu alkuarvotehtävä ratkeaa laskinkomennolla

$$\text{deSolve}(h' = k \cdot \sqrt{h} \text{ and } h(0) = 150, t, h) \quad \boxed{\lrcorner} \quad \sqrt{h} = \frac{k \cdot t}{2} + 5 \cdot \sqrt{6}$$

Lisäehdosta voimme ratkaista verrannollisuuskertoimen k seuraavasti

$$\text{solve}\left(\sqrt{h} = \frac{k \cdot t}{2} + 5 \cdot \sqrt{6}, k\right) \Big| \; t = 200 \text{ and } h = 100 \quad \boxed{\lrcorner} \quad k = \frac{2 - \sqrt{6}}{20}$$

Tyhjenemisaika saadaan, kun lisäksi vaaditan, että korkeus $h = 0$:

$$\text{solve}\left(\sqrt{h} = \frac{k \cdot t}{2} + 5 \cdot \sqrt{6}, t\right) \Bigg| \; k = \frac{2 - \sqrt{6}}{20} \text{ and } h = 0 \quad \boxed{\lrcorner} \quad t = 200\sqrt{6} + 600 \approx \underline{\underline{1090}}$$

Esimerkki. Säiliössä on aluksi 400 kg 30-prosenttista sokerivettä. Määritä astiassa olevan sokerin massa $m(t)$ ajan funktiona, kun hetkellä $t = 0$ astiaan aletaan pumpata 10-prosenttista sokerivettä nopeudella 2 kg/s ja samanaikaisesti astiasta juoksutetaan pois hyvin sekoitettua sokerivettä samalla nopeudella.

On selvää, että

astiassa olevan sokerin massan m muutosnopeus =
se nopeus, jolla astiaan tulee sokeria – se nopeus, jolla astiasta poistuu sokeria.

Koska sokerin massan m muutosnopeutta kuvaa massan derivaatta, niin

$$m' = \underbrace{10/100}_{\text{Tulevan liuoksen pitoisuus}} \cdot 2 - \underbrace{m/400}_{\text{Poistuvan liuoksen pitoisuus}} \cdot 2 = 2 - m/200 \,.$$

Tähän differentiaaliyhtälöön liittyy alkuehto $m(0) = 30/100 \cdot 400 = 120$.
Komennolla

$$\text{deSolve}(m' = 0.2 - m/200 \text{ and } m(0) = 120, t, m)$$

saadaan massalle lauseke

$$\underline{\underline{m = 40 + 80e^{-t/200}}}$$

Esimerkki. Tarkastellaan tietyn viruksen leviämistä verkossa, johon on liitetty miljoona tietokonetta. Oletetaan seuraavat varsin luonnollisen tuntuiset seikat: Saastuneiden koneiden lukumäärän lisäys **lyhyellä** aikavälillä on suoraan verrannollinen tuloon, jossa on seuraavat kolme tekijää

- aikavälin pituus
- saastuneiden koneiden lukumäärä aikavälin alkuhetkellä
- saastumattomien koneiden lukumäärä aikavälin alkuhetkellä.

Määritä saastuneiden koneiden lukumäärä $n(t)$ ajan t funktiona, kun aikaa mitataan vuorokausina hetkestä $t=0$ alkaen, jolloin kyseinen virus on saastuttanut puolet koneista ja vuorokautta myöhemmin jo 600000 konetta. Määritä saastuneiden koneiden lukumäärä erityesti hetkillä $-10, -9, -8, ..., 8, 9, 10.$ Milloin virus oli lähetetty liikkeelle, kun hakkeriryhmä rupesi levittämään sitä tuhannella koneella samanaikaisesti?

Seuraavassa edellä esitetyt oletukset kirjoitetaan uudelleen lisäten esiintyville suureille sopivat matemaattiset merkinnät:

Saastuneiden koneiden lukumäärän $n=n(t)$ lisäys dn **lyhyellä** aikavälillä $t\,...\,t+dt$ on suoraan verrannollinen tuloon, jossa on seuraavat kolme tekijää

- aikavälin pituus dt
- saastuneiden koneiden lukumäärä $n(t)$ aikavälin alkuhetkellä
- saastumattomien koneiden lukumäärä $10^6 - n(t)$ aikavälin alkuhetkellä.

Verrannollisuudesta johtuen on siis olemassa sellainen vakio k, että

$$dn = k\cdot n\cdot(1000000-n)\cdot dt\ .$$

Tästä differentiaalien välisestä yhtälöstä saadaan dt:llä jakamalla differentiaaliyhtälö, josta alkuehtoineen $n(0)=500000$ saadaan laskinkomennolla

$$\text{deSolve}\left(n'=k\cdot n\cdot(10^6-n) \text{ and } n(0)=500000, t, n\right) \quad \boxed{\lrcorner} \quad n=\frac{1000000\cdot e^{1000000\cdot k\cdot t}}{e^{1000000\cdot k\cdot t}+1}$$

Määritellään näin saatua vastausta vähän muokkaamalla ajasta riippuva saastuneiden koneiden lukumääräfunktio $n(t)$ ja määritetään sitten verrannollisuuskerroin k seuraavan päivän lukumäärätiedosta vaikkapa seuraavasti:

$$n(\boldsymbol{t}) := \frac{1000000\cdot e^{1000000\cdot k\cdot t}}{e^{1000000\cdot k\cdot t}+1}$$

$$\text{solve}\left(n(1)=600000, k\right) \quad \boxed{\lrcorner} \quad k=0.000000405465$$

$$k := 0.000000405465$$

Näin määräytyneen funktion $n(t)$ avulla saadaan mm. seuraavat arvot

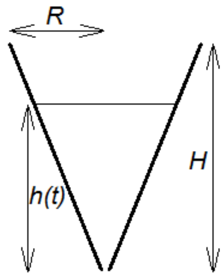
t	-10	...	-2	-1	0	1	2	...	10
n	17046	···	307692	400000	500000	600000	692307	···	982954

Komennolla $\text{solve}(n(t)=1000, t) \quad \boxed{\lrcorner} \quad t=-17.034$
saadaan selville, että viruksen levitys oli alkanut 17 vrk ennen kuin virus oli saastuttanut puolet verkon koneista.

Tehtävä 9.1. Astiassa on aluksi 200 kg 30-prosenttista suolavettä. Hetkellä $t=0$ astiaan aletaan juoksuttaa puhdasta vettä nopeudella 2 kg/s . Samanaikaisesti hyvin sekoitettua suolavettä juoksutetaan pois astiasta samalla nopeudella. Määritä astiassa olevan suolan massa *m* ajan *t* funktiona.

Tehtävä 9.2. Astiassa on aluksi 500 kg vettä. Hetkellä $t=0$ astiaan aletaan juoksuttaa 20-prosenttista suolavettä nopeudella 10 kg/s . Samanaikaisesti hyvin sekoitettua suolavettä juoksutetaan pois astiasta samalla nopeudella. Määritä astiassa olevan suolan massa *m* ajan *t* funktiona.

Tehtävä 9.3. Tarkastellaan ylhäältä avointa, kärjellään seisovan ympyräkartion muotoista, vedellä täytettyä astiaa (mitat *H* ja *R*). Veden virratessa kartion kärjessä olevasta reiästä tilavuusvirta (yksikkönä esimerkiksi litraa/tunti) on suoraan verrannollinen kuvan mukaisen vedenpinnan korkeuden $h(t)$ neliöjuureen. Kauanko kestää kaiken veden virtaus astiasta, jos puolet vedestä virtaa viidessä tunnissa?



Tehtävä 9. 4. Tiedetään, että radioaktiivisen aineen aktiivisuuden muutosnopeus on suoraan verrannollinen aktiivisuuden jäljellä olevaan määrään. Määritä aineen aktiivisuus $A = A(t)$ ajan *t* funktiona, kun alussa aktiivisuus on $A(0) = A_0$ ja puoliintumisajan $t_{1/2}$ kuluttua $A(t_{1/2}) = A_0/2$.

Tässä tehtävässä esitetty tietämys aktiivisuuden muutosnopeudesta voidaan esittää myös seuraavasti:

Lyhyenä aikavälinä _____________ aktiivisuus pienenee määrällä ________ ,

joka on verrannollinen aikavälin pituuteen _________ ja aktiivisuuden jäljellä

olevaan määrään _________ aikavälin alkuhetkellä.

Tehtävä 9.5. Tiedetään, että sopivissa olosuhteissa solujen lisääntymisnopeus on suoraan verrannollinen solujen määrään. Määritä solujen lukumäärä *n* ajan *t* funktiona, kun $n(0) = 1000$ ja $n(5) = 2500$.

Tässä tehtävässä esitetty tietämys solujen lisääntymisnopeudesta voidaan esittää myös seuraavasti:

Lyhyenä aikavälinä _____________ solujen lukumäärän lisäys _______ on

verrannollinen aikavälin pituuteen ________ ja solujen lukumäärään

_________ aikavälin alkuhetkellä.

Tehtävä 9. 6. Täydennä seuraava teksti sopivilla merkinnöillä.
Tarkastellaan kasvin kasvamista ruukussa, jonka tilavuus on V_{ruukku} = 80 litraa. Tehtävässä pitäisi määrittää ja piirtää kasvin tilavuus $V = V(t)$ ajan funktiona laskinta hyödyntäen. Tiedetään, että kasvin juurten tilavuus on aina kolmasosa kasvin koko tilavuudesta $V(t)$. Lisäksi tiedetään, että kasvin tilavuuden lisäys __________ lyhyenä aikavälinä ______________ on suoraan verrannollinen tuloon, jossa on tekijöinä aikavälin pituus ________, kasvin koko tilavuus _________ aikavälin alkuhetkellä ja ruukussa oleva juurista vapaa tilavuus __________ aikavälin alkuhetkellä. Tiedetään, että alussa kasvia istutettaessa $V(0)=10$ ja 30 päivää myöhemmin $V(30)=20$.

Tehtävä 9.7. Täydennä seuraava teksti sopivilla merkinnöillä.
Tarkastellaan viruksen leviämistä verkossa, johon on liitetty 10^8 tietokonetta. Olkoon viruksen saastuttamien koneiden lukumäärä ajan funktiona $n = n(t)$. Oletetaan, että lyhyenä aikavälinä _________ saastuneiden koneiden lukumäärän lisäys _______ on suoraan verrannollinen tuloon, jossa tekijöinä on aikavälin pituus ________ , saastuneiden koneiden lukumäärä __________ aikavälin alkuhetkellä ja saastumattomien koneiden lukumäärä ___________ aikavälin alkuhetkellä.
Muodosta saastuneiden koneiden lukumäärä koskeva differentiaaliyhtälö ja ratkaise se laskinta käyttäen. Määritä saastuneiden koneiden lukumäärä ajanhetkillä $t = 2, 3, 4, 5, ..., 12$ vrk, kun tiedetään, että $n(0) = 10$ ja $n(1) = 100$. Piirrä myös lukumääräfunktion kuvaaja.

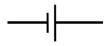
Tehtävä 9.8. Täydennä seuraava teksti sopivilla merkinnöillä.
Tarkastellaan vakiolämpöiseen $T_{jl}=100°C$ jäähdytyslaitteistoon asetetun kappaleen lämpötilan $T=T(t)$ muuttumista. Tiedetään, että lyhyenä aikavälinä ____________ kappaleen lämpötilan muutos _________ on suoraan verrannollinen kappaleen ja jäähdytyslaitteiston lämpötilaeroon ____________ sekä aikavälin pituuteen _________. Lisäksi tiedetään, että $T(0)=1100°C$ ja $T(5)=1000°C$. Määritä kappaleen lämpötila ajan funktiona ja piirrä lämpötilan kuvaaja.

10. Virtapiireistä

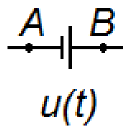
Virtapiirin ratkaisemisessa tarvittavan yhtälön muodostamiseksi tarvitaan

Kirchhoffin laki. Kierrettäessä suljettu virtapiiri potentiaalin muutosten summa on nolla.

Seuraavassa tarkastelemme virtapiirin eri komponenttien aiheuttamia potentiaalin muutoksia siirryttäessä komponentin päiden välillä.

Tässä esityksessä merkitsemme jännitelähdettä symbolilla  , vaikka kyseessä olisi vaihtojännitekin. Jos tämän jännitelähteen jännitteeksi ilmoitetaan $u(t)$, niin tulkitsemme, että potentiaali jännitelähteen pidemmän viivan puoleisessa navassa saadaan lisäämällä toisen navan potentiaaliin $u(t)$. Koska $u(t)$ voi olla negatiivinenkin (ainakin joillakin ajan *t* arvoilla), niin symbolin viivat eivät suoraan kerro kumman navan potentiaali on korkeampi.

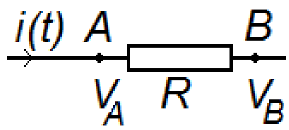
Kuvan mukaisessa tilanteessa potentiaalin muutos on



- pisteestä *A* pisteeseen *B* siirryttäessä $V_B - V_A = u(t)$
- pisteestä *B* pisteeseen *A* siirryttäessä $V_A - V_B = -u(t)$

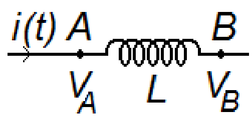
Virralle $i(t)$ merkitään kuvaan nuolella tietty suunta. Jos laskettaessa virralle saadaan (vaikkapa joillakin *t*:n arvoilla) negatiivinen arvo, niin silloin todellinen virta kulkee nuolelle vastakkaiseen suuntaan (kyseisillä *t*:n arvoilla).

Tarkastellaan vastusta, jonka resistanssi on *R.*
Silloin Ohmin lain mukaan vastuksen aiheuttama potentiaalin muutos on kuvan mukaisin merkinnöin



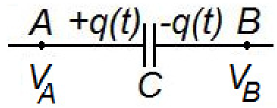
- virran suuntaan edettäessä $V_B - V_A = -Ri$
- virralle vastakkaiseen suuntaan edettäessä $V_A - V_B = Ri$

Itseinduktion vuoksi kelan *L* läpi kulkevan virran $i(t)$ muuttuminen synnyttää kelaan virran muutosta vastustavan lähdejännitteen, jonka aiheuttama potentiaalin muutos on



- virran suuntaan edettäessä $V_B - V_A = -L\dfrac{di}{dt} = -Li'(t)$
- virralle vastakkaiseen suuntaan edettäessä $V_A - V_B = L\dfrac{di}{dt} = Li'(t)$

Usein sanotaan, että kondensaattorin varaus on ajan funktiona $q=q(t)$. Tällaisessa tapauksessa me merkitsemme kuvaan $+q(t)$ kondensaattorin sen levyn puolelle, jonka varaus on $q(t)$, ja vastaavasti $-q(t)$ sen levyn puolelle, jonka varaus on $-q(t)$.



Jos kondensaattorin kapasitanssi on C ja varaus kuvan mukaisesti $q(t)$, niin kondensaattorin aiheuttama potentiaalin muutos on

- ”positiivisesta” navasta ”negatiiviseen” napaan siirryttäessä $V_B - V_A = -\dfrac{q}{C}$
- ”negatiivisesta” navasta ”positiiviseen” napaan siirryttäessä $V_A - V_B = \dfrac{q}{C}$

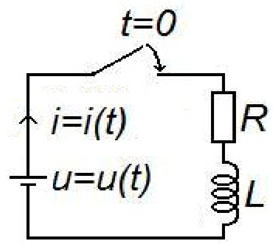
Jos virta $i(t)$ tulee $+q(t)$:llä merkittyyn kondensaattorin napaan, niin $q'(t)=i(t)$.
Jos virta $i(t)$ lähtee $+q(t)$:llä merkitystä navasta, niin $q'(t) = -\,i(t)$.

RL-piiri. Kuvan RL-piirille saadaan myötäpäivään kulkemalla differentiaaliyhtälö $u - Ri - Li' = 0$,
josta saadaan termejä järjestämällä edelleen

$$Li' + Ri = u \ .$$

Kelan ”hitaudesta” johtuen välittömästi kytkimen sulkemisen jälkeen piirissä kulkeva virta on nolla ts.

$$i(0^+) = 0.$$

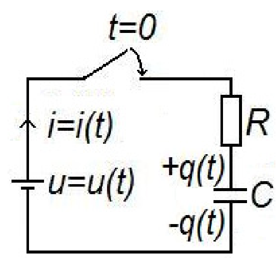


RC-piiri. Kuvan RC-piirille saadaan myötäpäivään kulkemalla yhtälö

$$u - Ri - \frac{q}{C} = 0,$$

josta saadaan derivoimalla ja termejä järjestämällä

$$Ri' + \frac{1}{C}q' = u'.$$



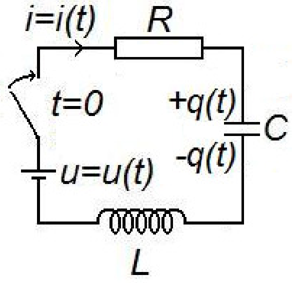
Koska merkitty virta suuntautuu kondensaattorin napaan, jonka varaus on $+q(t)$, niin $i = q'$ ja yhtälö muuttuu muotoon

$$Ri' + \frac{1}{C}i = u'.$$

Jos kondensaattorin varaus q_0 tunnetaan kytkemishetkellä $t = 0$, niin tämän laatikon ylimmästä yhtälöstä saadaan virranvoimakkuudelle alkuehto

$$i(0^+) = \frac{u(0) - q_0/C}{R}.$$

RCL-piiri. Kuvan RCL-piiristä saadaan myötäpäivään kulkemalla



$(*)$ $$u - Ri - \frac{q}{C} - Li' = 0.$$

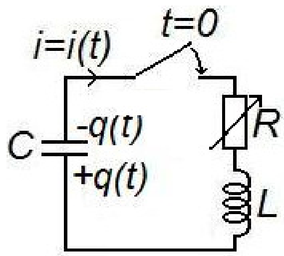
Koska merkitty virta suuntautuu kondensaattorin napaan, jonka varaus on $+q(t)$, niin $i = q'$.

Niinpä yo yhtälöstä saadaan derivoimalla ja termejä järjestämällä

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = u'.$$

Kelan aiheuttamasta hitaudesta johtuen $i(0^+) = 0$. Sijoittamalla yhtälöön $(*)$ tämä alkuehto ja kondensaattorin varaus kytkentähetkellä $q(0) = q_0$ saadaan toiseksi alkuehdoksi $i'(0^+) = \dfrac{u(0) - q_0/C}{L}$.

Esimerkki. Tarkastellaan RCL-piiriä, jossa $u = 0$, $L = 2{,}0\ \mathrm{H}$, $C = 0{,}0050\ \mathrm{F}$ ja kondensaattorin varaus kytkimen sulkemishetkellä $t=0$ on $q(0) = 0.01\ \mathrm{As}$. Määritetään virta ajan funktiona vastuksen R arvoilla
a) $0\,\Omega$ b) $4\,\Omega$ c) $20\,\Omega$ d) $40\,\Omega$ e) $50\,\Omega$.



Laskut suoritetaan ilman yksiköitä, joten vastauksen virran yksikkö on ampeeri. Merkitään kuvan mukaisesti virran suuntautuvan kondensaattorin sille puolelle, jossa on aluksi varaus $q(0) = 0.01\ \mathrm{As}$. Koska ainakin aluksi todellinen virta kulkee päinvastaiseen suuntaan, niin virralle saadaan heti kytkimen sulkemisen jälkeen laskemallakin negatiivisia arvoja, kuten lopuksi piirrettävistä virtafunktion kuvaajista ilmenee.

Jos virtapiiri kuljetaan myötäpäivään vasemmasta alanurkasta alkaen, niin Kirchhoffin lain mukaan $-\dfrac{q}{C} - Ri - Li' = 0$. Jatkossa tarkastelemme kuitenkin vastapäivään kiertämällä saatua ekvivalenttia yhtälöä

$(*)$ $$Li' + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Kelan hitaudesta johtuen $i(0^+) = 0$. Toinen alkuehto saadaan yhtälöstä $(*)$

$$i'(0^+) = \frac{-R \cdot i(0^+) - q(0^+)/C}{L} = \frac{-R \cdot 0 - 0.01/0.005}{2} = -1$$

kaikilla resistanssin R arvoilla. Koska virta on merkitty saapuvaksi kondensaattorin $+q$:lla merkittyyn napaan, niin $q'(t) = i(t)$ ja yhtälöstä $(*)$ saadaan derivoimalla

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = 0$$

a) Komponenttien arvot huomioiden derivoimalla saatu yhtälö muuttuu nyt muotoon $2i'' + 200i = 0$. Koska karakteristisen yhtälön $2r^2 + 200 = 0$ juuret ovat $r = \pm 10i$, niin yhtälön yleinen ratkaisu on $i = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t)$.

Edellä esitetyt alkuehdot $i(0^+)=0$ ja $i'(0^+)=-1$ toteuttavaksi yksityisratkaisuksi saadaan tietenkin mukavimmin laskimella

$$i = -0.1\sin(10t).$$

b) Nyt $2i'' + 4i' + 200i = 0$. Koska karakteristisen yhtälön juuret ovat $r = -1 \pm 3\sqrt{11} \cdot i$, niin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $i = e^{-t}\left(C_1 \sin(3\sqrt{11}t) + C_2 \cos(3\sqrt{11}t)\right)$ ja alkuehdot toteuttava yksityisratkaisu on

$$i = -\frac{\sqrt{11}}{33} e^{-t} \sin(3\sqrt{11}\,t) \approx -0.1005 e^{-t} \sin(9.95t)$$

c) Kuten kohdassa b nytkin saadaan samantyyppinen ratkaisu

$$i \approx -0.11547 e^{-5t} \sin(8.66t)\ .$$

d) Nyt $2i'' + 40i' + 200i = 0$. Koska karakteristisella yhtälöllä on reaalinen kaksoisjuuri $r_1 = r_2 = -10$, niin yhtälön yleinen ratkaisu on $q = C_1 e^{-10t} + C_2 t e^{-10t}$. Alkuehdot toteuttava yksityisratkaisu on

$$i = -te^{-10t}\ .$$

e) Nyt $2i'' + 50i' + 200i = 0$. Koska karakteristisella yhtälöllä on eri suuret reaalijuuret $r_1 = -5$ ja $r_2 = -20$, niin yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa $q = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-20t}$. Alkuehdot toteuttava yksityisratkaisu on

$$i = -\frac{1}{15} e^{-5t} + \frac{1}{15} e^{-20t} \approx -0.06667 e^{-5t} \underbrace{(1 - e^{-15t})}_{\substack{=0,\ \text{kun}\ t=0 \\ \to 1,\ \text{kun}\ t\to\infty}}.$$

Laskinlaskut. Virran lauseke tapauksissa a) – e) saadaan, kun komennon

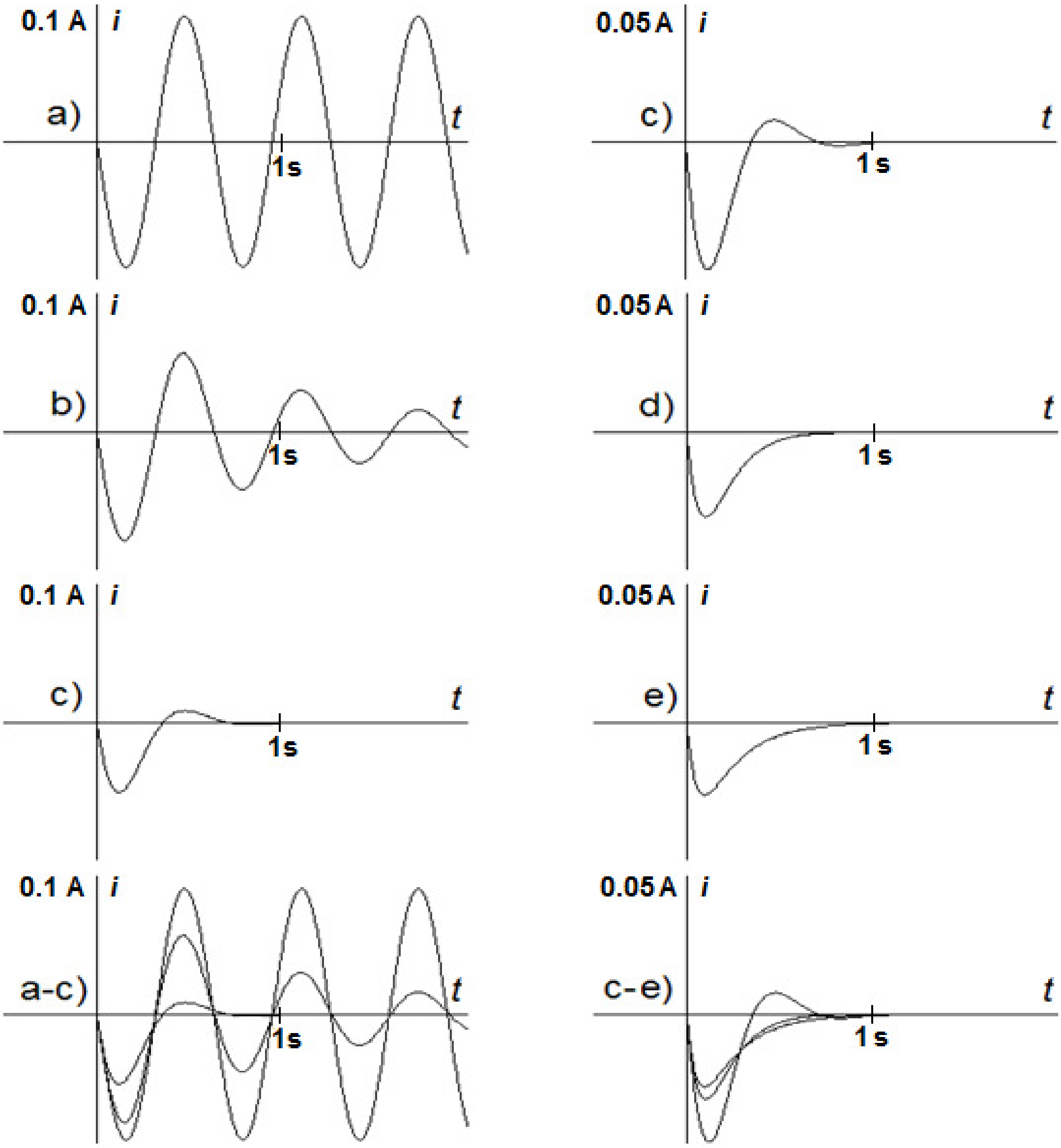
deSolve$(2i'' + R \cdot i' + i/0.005 = 0$ and $i(0) = 0$ and $i'(0) = -1, t, i)$

loppuun sijoitetaan with-operaattoria | käyttäen resistanssin R arvo.

Seuraavan sivun kuvat esittävät virtafunktion kuvaajia eri tilanteissa.

Kohdan a) virtaa esittää vaimenematon siniaalto, koska piirissä ei ole vastusta, jossa energiaa muuttuisi lämmöksi. Energia muuttuu vuoronperään kondensaattorin potentiaalienergiasta kelan magneettiseksi energiaksi ja takaisin.

Kohdissa b) ja c) kondensaattorin energiasta osa muuttuu vastuksessa lämmöksi, mutta osa energiasta varastoituu kelassa kulkevan virran magneettiseksi energiaksi, jonka voimin virta jatkaa kulkuaan kondensaattorin tyhjennyttyäkin ja pystyy varaamaan kondensaattorin uudelleen tosin alkuperäistä varausta pienempään varaukseen, joka on alkuperäiselle varaukselle vastakkaismerkkinen. Sitten kondensaattori alkaa purkautua uudelleen ja energiaa varastoituu jälleen kelaan. Tätä toistuu loputtomasti, joskin virta heikkenee eksponentiaalisesti, koska osa energiasta muuttuu vastuksessa lämmöksi.



Kohtien a) – c) siniaaltojen kulmanopeuksia 10, 9.95 ja 8.66 vertaamalla nähdään, että vastuksen resistanssin kasvaessa siniaallon kulmanopeus pienenee eli kondensaattorin tyhjenemiseen ja uudelleen varautumiseen kuluu pidempi aika, mikä näkyy selvimmin kohtien a) – c) yhteisestä kuvasta.

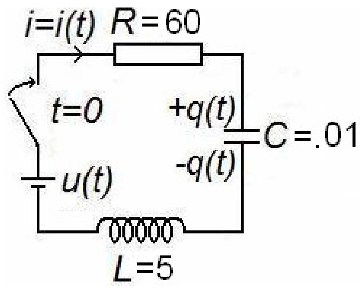
Kohdassa d) vastuksen resistanssi on juuri ja juuri niin suuri, että kondensaattorin tyhjenemiseen kuluu äärettömän pitkä aika, ts. kondensaattorin purkautuessa sen potentiaalienergiasta vain niin pieni osa muuttuu kelan magneettiseksi energiaksi, että tämä magneettinenkin energia kuluu kondensaattorin ensimmäiseen täydelliseen purkamiseen ilman että kondensaattoria pystytään enää uudelleen varaamaan.

Kohdassa e) kondensaattorin varaus purkautuu vielä hitaammin kuin d-kohdassa johtuen vastuksen suuremmasta resistanssista.

Huomaa, että virran yksikköjana on oikeanpuoleisissa kuvissa pidempi kuin vasemmalla!

Esimerkki. Tarkastellaan viereisessä piirissä kulkevaa virtaa, kun alussa kondensaattorissa ei ole varausta ja jännitelähteen jännite on

$$u(t)=\begin{cases}20t \text{ , kun } 0<t\le 1\\ 0 \text{ muulloin .}\end{cases}$$



Kulkemalla vasemmasta ylänurkasta myötäpäivään saadaan Kirchhoffin lain mukaan

$$(*)\qquad -Ri(t)-\frac{q(t)}{C}-Li'(t)+u(t)=0\,.$$

Koska virta on merkitty saapuvaksi kondensaattorin $+q$:lla merkittyyn napaan, niin $q'(t)=i(t)$ ja edellisestä yhtälöstä saadaan termien merkit vaihtamalla, derivoimalla ja termit uudelleen järjestämällä

$$(**)\qquad Li''(t)+Ri'(t)+\frac{i(t)}{C}=u'(t)\,.$$

Kelan hitaudesta johtuen saadaan alkuehto $i(0^+)=0$. Toiseksi alkuehdoksi saadaan yhtälöstä $(*)$

$$i'(0^+)=\frac{u(0^+)-Ri(0^+)-q(0^+)/C}{L}=0\,.$$

Aikavälillä $0<t\le 1$ saadaan yhtälöön $(**)$ perustuvasta syötteestä

$$\text{deSolve}(5i''+60i'+100i=20 \text{ and } i(0)=0 \text{ and } i'(0)=0,\, t,\, i\,)$$

virralle lauseke

$$i=-\frac{e^{-2t}}{4}+\frac{e^{-10t}}{20}+\frac{1}{5}\,.$$

ja erityisesti

$$i(1)=-\frac{e^{-2}}{4}+\frac{e^{-10}}{20}+\frac{1}{5}\approx 0.166\ .$$

Kondensaattorin varaus hetkellä $t=1$ on

$$q(1)=\int_{\tau=0}^{1} i(\tau)d\tau=\int_{\tau=0}^{1}\left(-\frac{e^{-2\tau}}{4}+\frac{e^{-10\tau}}{20}+\frac{1}{5}\right)d\tau\approx 0.0969\,.$$

Arvoilla $t>1$ virtapiirin differentiaaliyhtälö on $5i''+60i'+100i=0$.

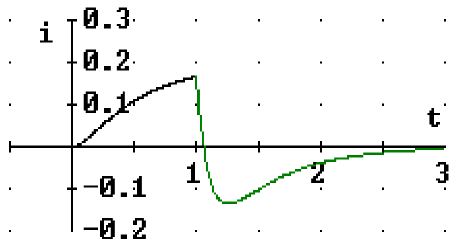
Kelan hitauden perusteella saadaan alkuehto $i(1^+)=i(1)\approx 0.166$.
Yhtälöstä $(*)$ saadaan toinen alkuehto

$$i'(1^+)=\frac{u(1^+)-Ri(1^+)-q(1^+)/C}{L}\approx\frac{0-60\cdot 0.166-0.0969/0.01}{5}\approx -3.93$$

Syötteellä $\text{deSolve}(5i''+60i'+100i=0 \text{ and } i(1)=0.166 \text{ and } i'(1)=-3.93,\, t,\, i)$ saadaan virralle ajan hetkillä $t>1$ lauseke

$$i\approx 9910e^{-10t}-2.10e^{-2t}\,.$$

Viereinen kuvaaja esittää virtaa kun $t \geq 0$.



Kondensaattorin varaus on suurimmillaan, kun hetken $t = 1$ jälkeinen virta häviää eli kun

$$i \approx 9910e^{-10t} - 2.10e^{-2t} = 0 \iff t = 1.057.$$

Tällöin kondensaattorin varaus on suurimmillaan ja on

$$q(1.057) = q(1) + \int_{t=1}^{1.057} i(t)\,dt = q(1) + \int_{t=1}^{1.057} (9910e^{-10t} - 2.10e^{-2t})\,dt$$

$$= 0.0969 + 0.0042 = 0.101$$

Tämä varaus purkautuu jatkossa virran mukana pois kondensaattorista, koska

$$\int_{t=1.057}^{\infty} i(t)\,dt = \int_{t=1.057}^{\infty} (9910e^{-10t} - 2.10e^{-2t})\,dt = -0.101$$

Tehtävä 10.1. Tarkastellaan RL-piiriä, jossa $L = 5$, $R = 100$ ja $u = u(t) = 230\sin(100\pi t)$. Määritä sähkövirran voimakkuus ajan t funktiona, kun kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$.

Tehtävä 10.2. Jännitteeseen u_0 varattu kondensaattori, jonka kapasitanssi on C, puretaan vastuksen R läpi. Määritä virta ajan t funktiona, kun kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$.

Tehtävä 10.3. Tarkastellaan RCL-piiriä, jossa $u = 0$, $L = 5$ H, $C = 0.001$ F ja kondensaattorin varaus kytkimen sulkemishetkellä $t = 0$ on $q(0) = 0.2$ As. Millä resistanssin R arvoilla piiriin muodostuva virta on a) vaimenematon b) eksponentiaalisesti vaimeneva sinimuotoinen virta?

Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjaan kuuluvassa teoksessa Differentiaaliyhtälöt on pyritty huomioimaan insinööriopetuksessa tapahtunut lähiopetuksen voimakas vähentyminen. Matematiikassa on nyt keskityttävä kaikkein oleellisimpaan: käsitteiden hallitsemiseen, apuvälineiden tehokkaaseen hyödyntämiseen mekaanisen käsinlaskennan asemasta sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten selkeään esittämiseen.

Yhden kirjoittajan omat opiskelijat ovat viime vuodet käyttäneet TI-Nspire CX CAS -laskimia. Siksi teoksessa on hyödyllisiä ohjeita kyseisen laskimen käytöstä. Monet opiskelijat ovatkin tyytyväisinä todenneet ”oppineensa näkemään metsän puilta”. Myös muiden symbolisten laskimien ja matematiikkaohjelmien käyttäjät saavat kirjasta ideoita oman apuvälineensä hyödyntämiseen.

Jo aiemmin ilmestyneiden teosten Algebra, Geometria sekä Differentiaali- ja integraalilaskenta lisäksi tekijöiltä ilmestyy vielä erityisesti sähkötekniikan opiskelijoille tarkoitettu differentiaaliyhtälöitä toisin menetelmin tarkasteleva teos nimellä Laplace-muunnos.

Kaikki sarjan teokset ovat vapaasti tulostettavissa ja jaettavissa koko sivun kopioina opetuskäyttöön.

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit C1
ISSN 2323-8364
ISBN 978-951-633-210-2

Julkaisija
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi

samk