Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

LAPLACE-MUUNNOS

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

samk

Esipuhe

Tämä Laplace-muunnosta ja sen soveltamista käsittelevä oppimateriaali on tarkoitettu sähkötekniikan insinöörikoulutukseen. Esitietoina tulisi tuntea esimerkiksi Ojalain laskuoppien opuksessa Differentiaaliyhtälöt esitetyt differentiaaliyhtälöiden yleiset käsitteet ja ratkaisumenetelmät sekä virtapiireissä käytetyt merkinnät ja virtapiireihin liittyvien yhtälöiden muodostaminen. Tarvittaessa lukijan tulee tutustua mainittuun opukseen. Molempien teosten sisältö on rajattu niihin asioihin, jotka allekirjoittaneista Timo Ojala on käsitellyt viimeksi omassa matematiikan opetuksessaan SAMK Tekniikka Porissa. Aineiston muokkaamiseen ja esimerkkien laskemiseen ovat osallistuneet sekä matematiikan ylioppilas Leena Ojala että matematiikan yliopisto-opettaja Timo Ranta.

Insinöörillä on matematiikan opiskelussa kolme tärkeää tavoitetta: asioiden ymmärtäminen, tarvittavien laskujen suorittaminen sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten esittäminen.

I: Insinöörin tulee ymmärtää matemaattisten käsitteiden oleellinen sisältö. Insinöörin pitää pystyä muuttamaan kohtaamansa reaalimaailman ongelma matemaattiseen muotoon ja ratkaisun jälkeen kriittisesti tulkitsemaan vastaus alkuperäisen ongelman kannalta.

II: Insinöörin tulee pystyä suorittamaan ne matemaattiset laskut, jotka ovat tarpeen matemaattiseen muotoon saattamansa ongelman ratkaisemiseksi. Keskimääräisellä insinööriopiskelijalla ei monista eri syistä johtuen enää ole mahdollisuuksia suorittaa esimerkiksi vaativia mekaanisia integrointeja käsin laskien. Insinöörillä ei siihen ole silti enää tänä päivänä mitään tarvettakaan. **Tehokkaat matematiikkaohjelmat ja symboliset laskimet pystyvät suorittamaan nopeammin ja luotettavammin kaikki ne mekaaniset laskutoimitukset, joihin parhaat insinöörit ovat milloinkaan pystyneet. Laskimet pystyvät vielä enempäänkin ja kaikki tämä tapahtuu ilman, että teknisen ongelmansa parissa työskentelevä insinööri mitään menettää. Niinpä insinöörin tulee jo opiskeluaikanaan oppia hyödyntämään tehokkaita apuvälineitä. Mekaanisten laskujen suorittaminen apuvälineitä käyttäen jättää opiskelussa enemmän aikaa myös kahteen muuhun tavoitteeseen pääsemiseen.**

III: Ongelmanratkaisussa käytetyt menetelmät ja laskinkomennot yms. on esitettävä niin hyvin dokumentoituina, että ulkopuolinenkin ymmärtää ratkaisun eri vaiheet ja voi ne toistaa. Suppean monisteen lyhyet esimerkkiratkaisut eivät tähän ehkä aina yllä, mutta tarkoitus onkin tarvittaessa käydä tällaiset esimerkit tunnilla opettajan selittäminä yksityiskohtaisesti lävitse.

Apuna esimerkeissä on käytetty symbolista laskinta TI-Nspire CX CAS. Annetuista ohjeista saa vinkkejä muidenkin symbolisten laskinten tai matematiikkaohjelmien hyödyntämismahdollisuuksista.

Monisteeseen on liitetty runsaasti harjoitustehtäviä. **Kaikki käsin laskettaviksi annetut tehtävät voi ja kannattaakin aina tarkistaa laskimella.** Kotitehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut on tarvittaessa tarkoitus käsitellä tunneilla samalla, kun tavoitteena olisi opettaa tulosten kriittistä arviointia. Monisteen lyhyt esitystapa ei ole antanut mahdollisuuksia sopivien arviointitapojen riittävään käsittelemiseen.

Kaikki halukkaat opettajat saavat kopioida tästä ja muistakin ”Ojalain laskuopeista” sekä omaan opetuskäyttöönsä että oppilailleen jaettavaksi mitkä tahansa sivut tai vaihtoehtoisesti kertoa opiskelijoilleen, mistä he voivat ilmaiseksi kopioida tai ladata käyttöönsä tarpeelliset sivut. Materiaalin voi tulostaa kaksipuolisiksi kopioiksi A4-arkeille siten, että keskeltä niiteillä nidottuna opiskelijalla on kätevä A5-kokoinen vihkonen. Materiaalin voi tietenkin tulostaa haluamassaan koossa myös kansioissa säilytettäville arkeille.

Oppimateriaalisarjan jatkokehittämistä varten otamme kiitollisina vastaan ilmoitukset painovirheistä ja parannusideat pienistä yksityiskohdista aina laajempiin kokonaisuuksiin asti. Samalla lausumme kiitokset myös ”Ojalain laskuoppien” aiemmille kehittäjille FM Marjo Ojalalle ja päämatemaatikko, SHV Lauri Ojalalle.

Porissa 27.2.2017

Timo Ojala	Leena Ojala	Timo Ranta
Emeritus yliopettaja	Matematiikan yo	Matematiikan yliopisto-opettaja
PTOL/SAMK 1977-2016	Åbo Akademi	TTY
timo.ojala@live.fi		timo.ranta@tut.fi

SISÄLLYSLUETTELO

1. Määritelmä ja perusfunktioiden $\mathcal{L}$-muunnoksia

Huomautus. Laplace-muunnosta käytetään useimmiten käytännön sovelluksissa ajasta riippuvien muutosilmiöiden tutkimiseen ja siksi vapaata muuttujaa merkitään symbolilla t matematiikassa tavallisesti käytetyn muuttujamerkinnän x asemasta.

Määritelmä. Funktion $f(t)$ **Laplace-muunnos** $F(s)$ määritellään integraalimuunnoksena

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

Huomautus. Funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s)$ on vain kertojafunktiossa e^{-st} olevan parametrin s funktio. Laplace-muunnoksessa ei enää esiinny aikaa t, sillä se häviää määritelmän mukaista määrättyä integraalia laskettaessa sijoitetaanhan integraalifunktioon muuttujan t paikalle rajoilla arvot ∞ ja 0.

Huomautus. Esimerkiksi funktioiden $g(t)$ ja $x(t)$ Laplace-muunnoksia merkitään vastaavilla isoilla kirjaimilla tai operaattorin $\mathcal{L}$ avulla

$$G(s) = \mathcal{L}(g(t)) \quad \text{ja} \quad X(s) = \mathcal{L}(x(t)).$$

Esimerkki. Vakiofunktion $f(t) = 1$ Laplace-muunnos voidaan laskea suoraan määritelmästä, jos parametri s oletetaan positiiviseksi:

$$\mathcal{L}(1) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \Big|_{t=0}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} = \lim_{M\to\infty} \Big|_{t=0}^{M} -\frac{1}{s} e^{-st} = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{s} \underbrace{e^{-sM}}_{\to \begin{cases} 0, \text{ jos } s>0 \\ \infty, \text{ jos } s<0 \end{cases}} + \frac{1}{s} e^{-s\cdot 0} \right) = \frac{1}{s}.$$

Jos parametri $s \le 0$, niin tässä esimerkissä laskettava integraali hajaantuu (eli saa arvon ∞) eikä sellaista tulosta voi hyödyntää, sillä se ei sisällä enää mitään yksityiskohtaista tietoa alkuperäisestä funktiosta $f(t) = 1$.

Huomautus. Funktion Laplace-muunnos ei riipu lainkaan funktion käyttäytymisestä negatiivisilla t:n arvoilla, koska määritelmän mukainen integraali lasketaan vain välillä $0 \le t < \infty$.

Huomautus. ”Tavallisen” funktion Laplace-muunnos on määritelty tarkalleen silloin, kun parametri s on suurempi kuin funktiossa mahdollisesti tekijänä olevan eksponenttifunktion e^{at} kerroin a. Niinpä me tulemme pian laskinta ja kaavoja käyttäen näkemään, että esimerkiksi

$$\mathcal{L}(4e^{5t}\sin(6t)) = \frac{24}{s^2-10s+61} = \frac{4\cdot 6}{(s-5)^2+6^2}, \text{kun } s>5$$

$$\mathcal{L}(4\sin(6t)) = \mathcal{L}(4\underbrace{e^{0t}}_{=1}\sin(6t)) = \frac{24}{s^2+36}, \text{kun } s>0$$

$$\mathcal{L}(4e^{-5t}\sin(6t)) = \frac{24}{s^2+10s+61} = \frac{4\cdot 6}{(s-(-5))^2+6^2}, \text{kun } s>-5.$$

Kannattaa huomata, että esimerkiksi Laplace-muunnos $\mathcal{L}(4e^{(t^2)}\sin(6t))$ ei ole lausuttavissa alkeisfunktioiden avulla millään parametrin s arvolla, mutta $e^{(t^2)}$ ei olekaan mikään tavallisia luonnonilmiöitä kuvaava funktio.

Huomautus. Laskimeen TI-Nspire CX CAS voi komennolla

$$\boxed{\text{Define lap}(y) = \int_0^\infty e^{-s\cdot t}y\,dt}$$

määritellä Laplace-muunnoksen laskevan funktion lap. Määrittelyn jälkeen muotoa

$$\text{lap}(y(t))\,|\,s>A$$

olevalla komennolla saadaan funktion $y(t)$ Laplace-muunnos edellyttäen, että

- laskin pystyy integroimaan funktion $e^{-s\cdot t}y(t)$
- with-ehdossa mainittu **lukuarvoinen** rajaluku A on vähintään funktiossa y mahdollisesti esiintyvän eksponenttifunktion e^{at} **lukuarvoisen** kertoimen a suuruinen.

Esimerkki. Huomautuksessa annetun määrittelyn jälkeen saat seuraavilla laskinsyötteillä jo edelläkin mainitut Laplace-muunnokset

$$\text{lap}(4e^{5t}\sin(6t))\,|\,s>5 \quad ↵ \quad \frac{24}{s^2-10s+61}$$

$$\text{lap}(4\sin(6t))\,|\,s>0 \quad ↵ \quad \frac{24}{s^2+36}$$

$$\text{lap}(4e^{-5t}\sin(6t))\,|\,s>-5 \quad ↵ \quad \frac{24}{s^2+10s+61}.$$

Samat muunnokset saat, vaikka with-ehto olisi voimakkaampikin: $|\,s>10000$.

Esim. Edellä määritellyllä funktiolla lap voit syötteillä $\text{lap}(22) \mid s > 0$, $\text{lap}(\sin(a \cdot t)) \mid s > 0$, … , $\text{lap}(t \cdot e^{6t}) \mid s > 6$ laskea mm. seuraavat muunnokset:

$$\mathcal{L}(22) = \frac{22}{s} \qquad \mathcal{L}(\sin(a \cdot t)) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \mathcal{L}(t \cdot \cos t) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3} \qquad \mathcal{L}(e^{999t}) = \frac{1}{s - 999} \qquad \mathcal{L}(t \cdot e^{6t}) = \frac{1}{(s - 6)^2}$$

Huom. Määrittelemällämme lap-funktiolla ei voi laskea (käsinkin hyvin helposti laskettavaa) muunnosta $\mathcal{L}(e^{at})$, vaikka with-ehdossa kertoisikin tarvittavan ehdon $s > a$, koska käyttämämme laskinkomento edellyttää, että **kerroin *a* ja rajaluku *A* ovat lukuja.**

Huomautus. Vanhempiin TI-laskimiin TI-89 ja TI-89 Titanium voi määrittelyllä

$$\boxed{\text{Define lap}(y) = \int(e \,\hat{}\, (\text{-}s \cdot t) \cdot y, t, 0, \infty) \mid s > 10\hat{}100}$$

määritellä funktion lap, joka laskee funktion $y(t)$ Laplace-muunnoksen vastaavin edellytyksin kuin edelläkin. Näin vanhempia laskimia käytettäessä ei jokaisen Laplace-muunnoksen laskemiseen tarvinnut enää kirjoittaa omaa with-ehtoaan, koska se annettiin jo määrittelyssä. Kirjoittajien eri kokeiluista huolimatta **tämä määrittely ei ole onnistunut uudemmilla TI-laskimilla**.

Huomautus. Kaikkiin em. laskimiin voit määritellä joko yksirivisellä syötteellä

$$\text{Define lapet}(y) = -\int(e \,\hat{}\, (-s \cdot t) \cdot y \ , \ t) \mid t = 0$$

tai sopivan lausekemallin avulla

$$\boxed{\text{Define lapet}(y) = -\int\left(e^{-s \cdot t} \cdot y\right) \mathrm{d}t \mid t = 0}$$

funktion lap**<u>et</u>**(*y*), joka tuottaa ”tavallisille” ajasta *t* riippuville funktioille *y* oikean Laplace-muunnoksen matemaattisesti **<u>e</u>**pä**<u>t</u>**äsmällisellä tavalla.
Tämän laskukaavan epätäsmällisyys johtuu siitä, että muunnosta tällä funktiolla laskettaessa integraalifunktion oletetaan häviävän ylärajalla kuten muuttujan *s* suurilla arvoilla lausekkeen $e^{-s \cdot t}$ ja ”tavallista” luonnonilmiötä kuvaavan funktion *y* tulon integraalifunktiolle tapahtuukin. ”Epätavallisessa” funktiossa voi olla mukana vaikkapa tekijä $e^{(t^2)}$. Funktiota lapet käytettäessä argumentissa *y* saa esiintyä tekijänä symbolikertoiminenkin eksponenttifunktio $e^{a \cdot t}$.

Huomautus. Kuten aina integroitaessa laskin on pidettävä radiaanimoodissa laskettaessa $\mathcal{L}$-muunnoksia edellä esitetyillä lap- ja lapet-funktioilla.

Seuraavan lauseen mukaiset perusfunktioiden Laplace-muunnokset voi johtaa käsinkin laskien joko suoraan määritelmän mukaan integroiden tai käyttäen myöhemmin esitettäviä $\mathcal{L}$-muunnoksen ominaisuuksia.

Ensimmäiset ja viimeiset kaksi tulosta voi johtaa myös edellä määritellyllä lap-funktiolla vaatimalla $s > 0$. Keskimmäiset kaavat voi todeta lap-funktiolla oikeiksi yksittäisillä parametrien n ja a lukuarvoilla, mutta ei symboliarvoilla.

Kaksi ensimmäistä ja kolme viimeistä tulosta voi johtaa myös edellä määritetyllä lapet-funktiolla. Kolmannenkin kaavan voi todeta lapet-funktiolla oikeaksi yksittäisillä parametrin n lukuarvoilla, mutta ei symboliarvolla.

Lause 1.

$$\mathcal{L}(a) = \frac{a}{s}$$
$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$
$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ missä } n = 1, 2, 3, ...$$
$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$
$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}(\cos(at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Harjoitustehtäviä

1.1 Määritä (i) edellä olleen lauseen 1 kaavoilla
(ii) määritelmän perusteella käsin integroimalla
(iii) määritelmän perusteella laskimella integroimalla
(iv) laskimeen määrittelemälläsi lap-funktiolla
(v) laskimeen määrittelemälläsi lapet-funktiolla

a) $\mathcal{L}(e^{4t})$ b) $\mathcal{L}(t)$ c) $\mathcal{L}(\cos t)$

1.2 Määritä a) $\mathcal{L}(t^4)$ b) $\mathcal{L}(\sin(5t))$ sekä määritelmään perustuen laskimella integroiden että laskimeen määrittelemilläsi lap- ja lapet-funktiolla.

1.3 Määritä sekä lauseen 1 avulla että funktioita lap ja lapet käyttäen

$$\mathcal{L}(5),\ \mathcal{L}(t^2),\ \mathcal{L}(t^3),\ \mathcal{L}(e^{2t}),\ \mathcal{L}(e^{-4t}),\ \mathcal{L}(\sin(2t)),\ \mathcal{L}(\cos(5t)).$$

1.4 Yritä keksiä lauseen 1 tulosten avulla funktio, jonka Laplace-muunnos on

a) $\frac{2}{s}$ b) $\frac{1}{s-2}$ c) $\frac{1}{s+3}$ d) $\frac{2}{s-1}$ e) $\frac{6}{s^4}$ f) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$

g) $\frac{6}{s^2}$ h) $\frac{3}{s^2+9}$ i) $\frac{4}{s^2+4}$ j) $\frac{s}{s^2+4}$ k) $\frac{s}{s^2+2}$ l) $\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+2^2}$

Tarkista tuloksesi paikkansapitävyys laskemalla keksimäsi funktion Laplace-muunnos joko käsin tai laskimella.

2. Käänteismuunnos

Määritelmä. Jos $F(s)$ on funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, niin funktiota $f(t)$ sanotaan funktion $F(s)$ **käänteismuunnokseksi** ja merkitään

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))}.$$

Huomautus. Funktion $F(s)$ käänteismuunnoksen laskemiseksi ei ole helppoa muunnoskaavaa ja siksi käänteismuunnos päätellään yleensä aikaisemmin laskettujen Laplace-muunnosten avulla.

Esimerkki. Koska $\mathcal{L}(t^2) = \dfrac{2}{s^3}$, niin $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s^3}\right) = t^2$.

Huomautus. Koska funktion $\mathcal{L}$- muunnos ei riipu funktion käyttäytymisestä ajan t negatiivisilla arvoilla, niin edellisen esimerkin käänteisfunktioksi kelpaavat myös esimerkiksi seuraavat funktiot

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \begin{cases} 0, \text{ jos } t < 0 \\ t^2, \text{ jos } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \begin{cases} \sin t, \text{ jos } t < 0 \\ t^2, \text{ jos } t \geq 0 \end{cases}.$$

Koska $\mathcal{L}$- muunnosta käänteismuunnoksineen käytetään muutosilmiöiden (esim. piirissä kulkeva virta, kulkutaudin leviäminen) selvittämiseen **tietystä alkutilanteesta eteenpäin** ja aikaa mitataan tästä alkutilanteesta alkaen, niin ratkaisuna olevan käänteisfunktion arvoilla ennen alkutilannetta (eli ajanhetkeä $t = 0$) ei ole selvityksen kannalta merkitystäkään.

Harjoitustehtäviä

2.1 Määritä lauseen 1 avulla

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4}\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right), \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$

Tarkista vastauksesi laskimeen tallentamallasi lap- tai lapet-funktiolla!

3. Muunnosten lineaarisuus

Lause 2. Sekä Laplace-muunnos että sen käänteismuunnos ovat lineaarisia muunnoksia toteuttaen ehdot

(i) Summan muunnos on muunnosten summa eli

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(t) \pm g(t)\right) &= \mathcal{L}(f(t)) \pm \mathcal{L}(g(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(F(s) \pm G(s)\right) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \pm \mathcal{L}^{-1}(G(s))\end{aligned}}$$

(ii) Monikerran muunnos on muunnoksen monikerta eli

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\left(a \cdot f(t)\right) &= a \cdot \mathcal{L}(f(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(a \cdot F(s)\right) &= a \cdot \mathcal{L}^{-1}(F(s))\end{aligned}}$$

missä a on vakio.

Huomautus. Ominaisuudet (i) ja (ii) voidaan esittää yhdelläkin kertaa kaavoilla

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\left(a \cdot f(t) \pm b \cdot g(t)\right) &= a \cdot \mathcal{L}(f(t)) \pm b \cdot \mathcal{L}(g(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(a \cdot F(s) \pm b \cdot G(s)\right) &= a \cdot \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \pm b \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(s))\end{aligned}}$$

Todistus. Todistamme Laplace-muunnoksen lineaarisuutta koskevan tuloksen perustuen kertolaskun osittelulakiin ja integraalin lineaarisuuteen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(a \cdot f(t) \pm b \cdot g(t)\right) &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left(a \cdot f(t) \pm b \cdot g(t)\right) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \left(a \cdot e^{-st} f(t) \pm b \cdot e^{-st} g(t)\right) dt \\ &= a \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \pm b \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g(t)\, dt \\ &= a \cdot \mathcal{L}\left(f(t)\right) \pm b \cdot \mathcal{L}\left(g(t)\right)\end{aligned}$$

Esimerkki. $\mathcal{L}(4t + 5t^2 - 2\sin(3t)) = 4\mathcal{L}(t) + 5\mathcal{L}(t^2) - 2\mathcal{L}(\sin(3t))$

$$\begin{aligned}&= 4 \cdot \frac{1}{s^2} + 5 \cdot \frac{2}{s^3} - 2 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{4}{s^2} + \frac{10}{s^3} - \frac{6}{s^2 + 9} \\ &= \frac{-2s^3 + 10s^2 + 36s + 90}{s^5 + 9s^3}\end{aligned}$$

Mukavammin tietenkin laskimen lap- tai lapet-funktiolla!

Huomautus. Edellisen kaltaisen muunnostehtävän vastaus jätetään usein kolmanneksi tai toiseksi viimeiseen muotoon, jotka saadaan tarvittaessa yhdistettyä yhdeksi murtolausekkeeksi sopivasti laventamalla tai laskimen CommonDenominator-komennolla.

Esimerkki. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s}+\frac{8}{s^2}-\frac{12}{s^3}+\frac{6}{s+3}+\frac{8s+4}{s^2+4})$

$$=\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s})+8\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2})-6\mathcal{L}^{-1}(\frac{2!}{s^{2+1}})+6\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-(-3)})$$

$$+8\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+2^2})+2\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+2^2})$$

$$=3+8t-6t^2+6e^{-3t}+8\cos(2t)+2\sin(2t)$$

Harjoitustehtäviä

3.1 Muodosta seuraavat Laplace-muunnokset käsin sopivia lauseita käyttäen ja yhdistä kukin sitten yhdeksi murtolausekkeeksi käyttäen laskimen comDenom-komentoa (common denominator $\triangleq$ yhteinen nimittäjä):

$$\mathcal{L}(1+2t-3t^2)$$

$$\mathcal{L}(2e^{-3t}+3e^{2t})$$

$$\mathcal{L}\left(5\sin(3t)-4\cos(3t)\right)$$

$$\mathcal{L}\left(2-3t^3+4e^{2t}+3\sin(2t)-4\cos(5t)\right)$$

Määritä muunnokset myös laskimen lap- tai lapet-funktiota käyttäen.
Mitä voit sanoa osoittajan ja nimittäjän asteluvuista näiden ”tavallisten” funktioiden Laplace-muunnoksina olevissa murtofunktioissa?

3.2 Määritä $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s+6}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{15}{s^2+5}\right)$.

Tarkista vastauksesi oikeellisuus laskimen lap- tai lapet-funktiolla.

3.3 Määritä $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2+3s-4}{s^3}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s-6}{s^2+1}\right)$.

Tarkista vastauksesi oikeellisuus laskimen lap- tai lapet-funktiolla.

4. Osamurtokehitelmistä

Rationaalisen murtofunktion (eli kahden polynomin osamäärän) käsittely (esimerkiksi integrointi tai käänteismuunnoksen $\mathcal{L}^{-1}$ määrittäminen) helpottuu usein, jos murtofunktio ensin paloitellaan pienempiin osiin eli osamurtoihin seuraavasti:

Osamurtoihin jaon vaiheet

Vaihe 1. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa tai määräämättömien kertoimien menetelmällä tai laskimen funktiolla properFraction, jolloin saadaan

$$\frac{\text{jaettava } P(x)}{\text{jakaja } Q(x)} = \text{vaillinainen osamäärä } V(x) + \frac{\text{jakojäännös } R(x)}{\text{jakaja } Q(x)}$$

Huomautus. Tavallisten Laplace-muunnosten käänteismuuntamisessa ei tarvita vaiheen 1 jakolaskua, koska ”tavallisen” funktion Laplace-muunnoksessa osoittajan aste on jo valmiiksi alempi kuin nimittäjän aste.

Vaihe 2. Jakojäännökseen liittyvä osamäärä $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ voidaan jakaa osamurtoihin seuraaviin välivaihein:

Vaihe 2.1. Jaetaan nimittäjä $Q(x)$ tekijöihin

- erottamalla yhteinen tekijä, esimerkiksi $x^2 - 5x = x(x-5)$
- kaavoja käyttäen, esimerkiksi $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, $x^2 \pm 2ax + a^2 = (a \pm x)^2$
- nollakohtiensa avulla algebran kurssista tutulla tavalla:
    - reaalista nollakohtaa x_0 vastaa ensiasteinen tekijä $x - x_0$
    - n-kertaista reaalista nollakohtaa x_0 vastaa n-kertainen tekijä $(x - x_0)^n$
    - kompleksista nollakohtaparia $\alpha \pm \beta i$ vastaa kompleksisten tekijöiden tulo $(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i)$, josta saadaan aukikertomalla reaalialueella jaoton toisen asteen tekijä
    - useammankertaista kompleksista nollakohtaparia vastaa kompleksisten tekijöiden useammankertainen tulo, josta saadaan reaalialueella useammankertainen jaoton toisen asteen tekijä
- laskimen komennolla factor

Vaihe 2.2. Kirjoitetaan määräämättömiä kertoimia käyttäen osamäärälle $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ seuraavan taulukon mukainen osamurtokehitelmä, jossa on toistaiseksi tuntemattomat kertoimet *A*, *B*, …

Nimittäjän tekijä	Osamurtokehitelmään tulevat termit
$x+a$	$\dfrac{A}{x+a}$
$(x+a)^2$	$\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}$
$(x+a)^3$	$\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}+\dfrac{C}{(x+a)^3}$
...	...
x^2+px+q (jaoton)	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^2$	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2}$
...	...

Vaihe 2.3. Kerrotaan nimittäjät pois lausekkeen $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ ja muodostetun osamurtokehitelmän välisestä yhtälöstä.

Vaihe 2.4. Määritetään tuntemattomat kertoimet *A, B, C, …*

- sijoittamalla muodostettuun yhtälöön muuttujalle *x* sellaisia arvoja, jotka tekevät kertoimien *A, B, C, …* kerroinlausekkeita nolliksi, jolloin saadaan välittömästi yksittäisten kertoimien arvoja
- vertaamalla yhtälössä olevien aukikerrottujen lausekkeiden vastintermien kertoimia, joiden on oltava pareittain yhtä suuria. Helpoimmat yhtälöt saadaan yleensä korkeimman ja matalimman asteen termien kertoimista.

Vaihe 2.5. Kirjoitetaan osamurtokehitelmä ratkaistuine kertoimineen.

Esimerkki. Jos lausekkeessa $\dfrac{x^{10}+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)^2}$ suoritetaan ensin jakolasku ja sitten jakojäännöksen osamurtoihinjako, niin tuloksena saatavat termit ovat muotoa

$$Ax+B+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}+\frac{Hx+I}{x^2+x+1}+\frac{Jx+K}{(x^2+x+1)^2}\quad .$$

Jotkin kertoimista $A-K$ voivat tietenkin osoittautua nolliksi.

Esimerkki. Jaa osamurtoihin $\dfrac{2x+3}{x^4-16}$.

Koska jakaja $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$, niin taulukon mukaan

$$\frac{2x+3}{x^4-16}\equiv\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\quad\Big|\cdot(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\begin{aligned}0x^3+0x^2+2x+3&\equiv A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x-2)(x+2)\\&\equiv Ax^3+4Ax+2Ax^2+8A+Bx^3+4Bx-2Bx^2-8B+Cx^3-4Cx+Dx^2-4D\\&\equiv(A+B+C)x^3+\ldots+(8A-8B-4D)\end{aligned}$$

Sijoittamalla $x=-2$:
Sijoittamalla $x=2$:
Vertaamalla x^3:n kertoimia:
Vertaamalla vakiotermejä:

$$\begin{cases}2(-2)+3=B(-2-2)(4+4)\\2\cdot2+3=A(2+2)(4+4)\\0=A+B+C\\3=8A-8B-4D\end{cases}\quad\overset{\text{tuntematon kerrallaan tai laskimella}}{\Leftrightarrow}\quad\begin{cases}A=7/32\\B=1/32\\C=-1/4\\D=-3/8\end{cases}$$

Vastaus: $\dfrac{2x+3}{x^4-16}\equiv\dfrac{7/32}{x-2}+\dfrac{1/32}{x+2}+\dfrac{-1/4\cdot x-3/8}{x^2+4}$

Huomautus. Rationaalisen murtofunktion jakolaskun ja osamurtoihinjaon saa TI-laskimen komennolla

expand(lauseke, muuttuja).

Vaikka laskimen ohjeiden mukaan muuttujan voi jättää ilmoittamattakin, niin se kannattaa ilmoittaa, koska tällöin (riittävän helpon lausekkeen) osamurtaminen suoritetaan mahdollisimman pitkälle aina irrationaalikertoimisiin osamurtoihin asti.

Esimerkki. Edelliseen esimerkkiin sopiva laskinsyöte on $\text{expand}\left(\dfrac{2x+3}{x^4-16},x\right)$.

Edellisen sivun alimmassa esimerkissä saadaan laskimella esimerkiksi kertoimelle H arvo 29/9 . Testaapa tulos laskimellasi!

Huomautus. Mutkikkaan $\mathcal{L}$-muunnoksen $F(s)$ käänteismuuntamiseksi lauseke jaetaan ensin osamurtoihin joko käsin tai mieluummin laskimella. Käänteismuunnoksen lineaarisuuden perusteella käänteismuuntaminen voidaan sitten suorittaa osamurto kerrallaan taulukoita apuna käyttäen.

Esimerkki. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s(s+3)}\right)\overset{\text{expand}}{=}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}-\frac{2}{s+3}\right)$$
$$\overset{\text{lineaarisuus}}{=} 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-3)}\right)\overset{\text{taulukot}}{=} 2\cdot 1-2\cdot e^{-3t}=2-2e^{-3t}$$

Esimerkki. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7s^2+27s+96}{s^3+5s^3+9s+45}\right)\overset{\text{expand}}{=}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2+9}+\frac{12}{s^2+9}+\frac{4}{s+5}\right)$$
$$=3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right)$$
$$=3\cos(3t)+4\sin(3t)+4e^{-5t}$$

Harjoitustehtäviä

4.1 Jaa sekä käsin että laskimella osamurtoihin

a) $\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$ b) $\dfrac{x^2-4}{x^3+4x}$ c) $\dfrac{x+2}{x^3+2x^2+x}$

4.2 Esitä määräämättömiä kertoimia käyttäen, millaisia termejä saadaan lausekkeesta a) $\dfrac{2x^{12}+3x^6+4}{(x+3)^3(x^2+4)(x^2+1)^2}$ b) $\dfrac{x^6+x^5+2x^4+3x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+1)(x+1)}$,

kun ensin suoritetaan jakolasku ja sitten osamurtoihin jakaminen. Varmista lopuksi laskimen expand-komennolla, että olet löytänyt kaikki mahdolliset termityypit. Miksi b-kohdan hajotelmassa ei laskimen mukaan olekaan kaikkia sellaisia termejä, joita sinun mielestäsi siellä voisi olla?

4.3 Etsi käänteismuunnokset laskinta tehokkaasti hyödyntäen

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s-18}{s^2-2s-3}\right)$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5s^2+7s+80}{s^3+16s}\right)$

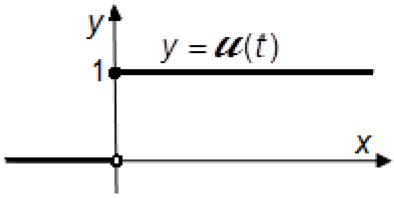
c) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s^5+12s^4+68s^3+48s^2+96s+192}{s^6+2s^5+4s^4+8s^3}\right)$$

Tarkista lopuksi tuloksesi käyttäen apuna laskimeen määrittelemääsi lap- tai lapet-funktiota.

5. Erikoisfunktioita

Määritelmä. Yksikköaskelfunktio $\boldsymbol{u}(t)$ tarkoittaa funktiota

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{cases} 1\,, \text{kun } t \geq 0 \\ 0\,, \text{kun } t < 0 \end{cases}$$

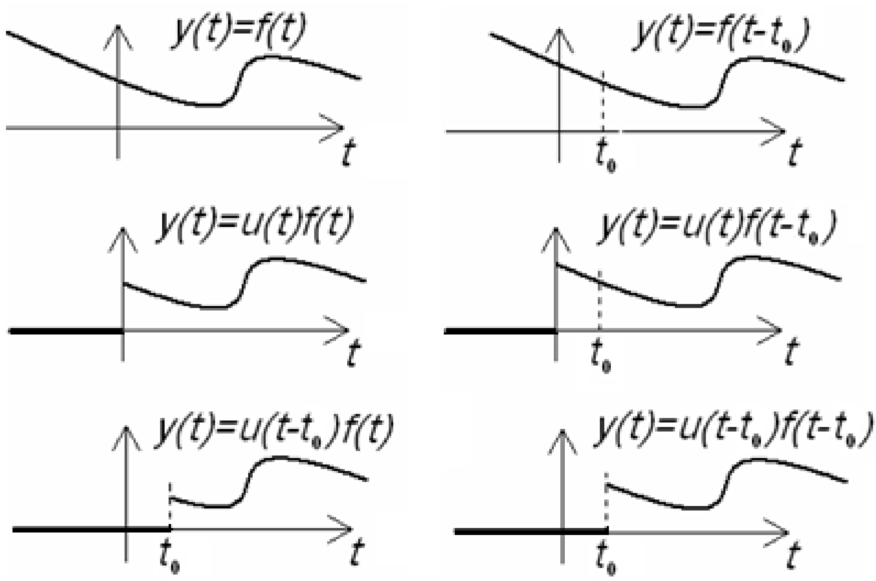


Huom. Jännitteestä käytetään jatkossa merkintää $u(t)$.

Koska funktion Laplace-muunnos ei riipu funktion käyttäytymisestä negatiivisilla muuttujan *t* arvoilla, niin

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}(t)) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \;.$$

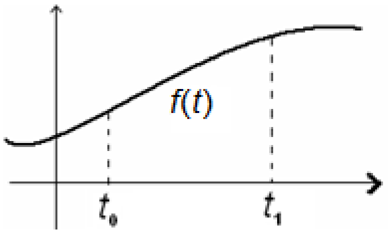
Seuraava kuvasarja esittää erästä ajasta riippuvaa funktiota $f(t)$ sekä siitä yksikköaskelella kertomalla ja ajallisesti jollakin lailla viivästämällä saatavia uusia funktioita. Huomaa, että tulofunktion $y(t) = \boldsymbol{u}(t)\,f(t)$ lausekkeessa on viivettä ilmoittava positiivinen luku t_0 vähennettävä niiden tekijäfunktioiden muuttujasta *t,* joiden osuutta halutaan viivästyttää. Huomaa, että funktion kuvaaja siirtyy oikealle, mikäli ilmiö viivästyy ajallisesti.

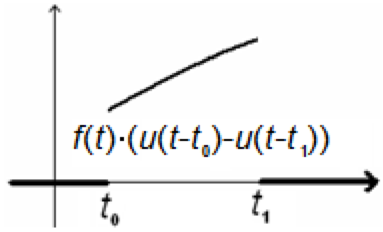


Huomaa, että funktioita $y(t) = f(t)$ ja $y(t) = f(t - t_0)$ esittävät muodoltaan samanlaiset mutta sijainniltaan eri viivat ylimmän kuvaparin mukaisesti. Sama koskee funktioita $y(t) = \boldsymbol{u}(t)\,f(t)$ vasemmalla keskellä ja $y(t) = \boldsymbol{u}(t - t_0)\,f(t - t_0)$ oikealla alinna.

Esimerkki. Annettu funktio $f(t)$ voidaan "nollata" välin $[t_0,\, t)$ ulkopuolella kertomalla funktion lauseke yksikköaskelten erotuksella

$$\mathcal{u}(t-t_0)-\mathcal{u}(t-t_1)=\begin{cases}1 \text{, jos } t_0 \le t < t_1\\ 0 \text{ muulloin}\end{cases}$$

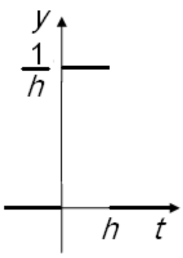




Huomautus. Funktion arvoilla yksittäisissä pisteissä ei ole merkitystä laskettaessa tavallisiin funktioihin liittyviä määrättyjä integraaleja, jotka esittävät vaikkapa käyrän alla olevaa pinta-alaa tai tietyllä aikavälillä johtimessa siirtynyttä varausta. Niinpä sillä ei ole yleensä merkitystä, tuleeko edellisen esimerkin kaltaisessa tilanteessa funktio nollattua välin päätepisteessä vai ei. Poikkeuksena on jatkossa käsiteltävä impulssifunktio, jota käytetään tarkasteltaessa esimerkiksi "pistemäistä massaa", jossa tietty nollasta eroava massa on keskittynyt nollan suuruiseen tilavuuteen tai nollan pituiselle välille.

Yksikköimpulssia johdettaessa tarkastellaan apuna funktioita

$$\boxed{\delta_h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h} \text{, jos } 0 \le t < h\\ 0 \text{ muulloin}\end{cases}}$$



ts.

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}\big(u(t)-u(t-h)\big),$$

missä h on pieni positiiviluku. Kaikkien näiden apufunktioiden kuvaajien alle jää yhden yksikön suuruinen pinta-ala ts.

$$\int_{t=a}^{b} \delta_h(t)\,dt = 1, \text{ jos väli } [0,h) \text{ sisältyy integroimisväliin.}$$

Määritelmä. Yksikköimpulssi tarkoittaa "funktiota"

$$\boxed{\delta(t)=\lim_{h\to 0^+} \delta_h(t)}\ .$$

Huomautus. Yksikköimpulssille $\delta(t)$ ja vakiolle k on voimassa

1) $$\boldsymbol{\delta}(t)=\begin{cases}0\text{ , jos } t\neq 0\\ \infty\text{ , jos } t=0\end{cases} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\delta}(t-t_0)=\begin{cases}0\text{ , jos } t\neq t_0\\ \infty\text{ , jos } t=t_0\end{cases}$$

2) $$\int_{t=a}^{b} k\cdot\boldsymbol{\delta}(t)\,dt=\begin{cases}k\text{ , jos origo kuuluu integroimisväliin}\\ 0\text{ muulloin}\end{cases}$$

$$\int_{t=a}^{b} k\cdot\boldsymbol{\delta}(t-t_0)\,dt=\begin{cases}k\text{ , jos } t_0 \text{ kuuluu integroimisväliin}\\ 0\text{ muulloin}\end{cases}$$

3) $$\mathcal{L}(\boldsymbol{\delta}(t))=1 \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{\delta}(t-t_0))=e^{-t_0 s}$$

Esimerkki. Tarkastellaan x-akselin välillä $2\,\text{m}\le x\le 10\,\text{m}$ olevaa sauvaa sähkövarauksineen. Sauvan kohdassa $x=6\,\text{m}$ on pistemäinen varaus suuruudeltaan 5 nC. Sauvan alkupään $2\,\text{m}\le x<6\,\text{m}$ varaus on homogeeninen ja kaikkiaan 8 nC. Sauvan loppupään $6\,\text{m}<x\le 10\,\text{m}$ varaus on myös homogeeninen ja kaikkiaan 12 nC. Sauvan kokonaisvaraus on selvästi $(5+8+12)\,\text{nC}=25\,\text{nC}$.

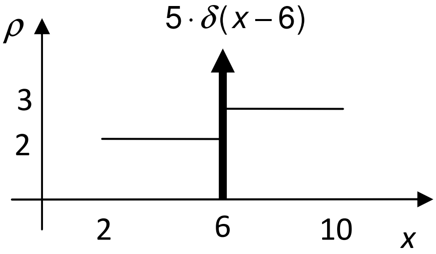
Seuraavassa muodostetaan varaustiheyden lauseke ja lasketaan kokonaisvaraus harjoituksen vuoksi myös integroimalla varaustiheyden lauseke.

Sauvan varaustiheys (eli pituusvaraus) voidaan esittää yksikköaskelfunktion ja yksikköimpulssin avulla muodossa

$$\rho=\rho(x)=2\big(\boldsymbol{u}(x-2)-\boldsymbol{u}(x-6)\big)+5\cdot\boldsymbol{\delta}(x-6)+3\big(\boldsymbol{u}(x-6)-\boldsymbol{u}(x-10)\big)$$

yksikkönä nC/m. Sauvan varaustiheyttä havainnollistaa alla oleva kuva.

Sauvan varaus saadaan joko yo. yksinkertaisella päättelyllä tai dx-pituisten pätkien varauksien $\rho(x)\,dx$ summana ts. integroimalla:



$$q=\int_{x=2}^{10}\rho(x)dx$$

$$=\int_{x=2}^{10}\Big(2\big(\boldsymbol{u}(x-2)-\boldsymbol{u}(x-6)\big)+5\cdot\boldsymbol{\delta}(x-6)+3\big(\boldsymbol{u}(x-6)-\boldsymbol{u}(x-10)\big)\Big)dx$$

$$=\int_{x=2}^{10}2\underbrace{\big(\boldsymbol{u}(x-2)-\boldsymbol{u}(x-6)\big)}_{=\begin{cases}1,\text{ kun } 2\le x\le 6\\ 0\text{ muulloin}\end{cases}}dx+\int_{x=2}^{10}5\cdot\boldsymbol{\delta}(x-6)\,dx+\int_{x=2}^{10}3\underbrace{\big(\boldsymbol{u}(x-6)-\boldsymbol{u}(x-10)\big)}_{=\begin{cases}1,\text{ kun } 6\le x<10\\ 0\text{ muulloin}\end{cases}}dx$$

$$=\int_{x=2}^{6}2\,dx+\int_{x=2}^{10}5\cdot\boldsymbol{\delta}(x-6)\,dx+\int_{x=6}^{10}3\,dx=2\cdot(6-2)+5+3\cdot(10-6)=25\ .$$

Sauvan kokonaisvaraus saadaan myös varaustiheyden kuvaajan alle jäävän "pinta-alan" avulla muistaen, että yksikköimpulssin $\boldsymbol{\delta}(x)$ alle jää "ala" 1. Impulssin $5\cdot\boldsymbol{\delta}(x-6)$ alle jää silloin "ala" 5.
Vastauksen yksikkö on akseleiden yksiköiden tulo $\mathrm{m}\cdot\mathrm{nC/m}=\mathrm{nC}$, joten sauvan kokonaisvaraus on 25 nC.

Harjoitustehtäviä

5.1 Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat sekä käsin että laskimella. Yksikköaskelfunktion voit määritellä komennolla Define $u(t)=\mathrm{ifFn}(t<0,0,1)$. Myöhempää käyttöä varten voit antaa laskimeen määrittelemällesi funktiolle pidemmän nimen vaikkapa unitstep.

a) $y_1(t)=t,\quad y_2(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot t,\quad y_3(t)=\boldsymbol{u}(t-3)\cdot t,$
$y_4(t)=t-3,\quad y_5(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot(t-3),\quad y_6(t)=\boldsymbol{u}(t-3)\cdot(t-3)$

b) $y_1(t)=\sqrt[3]{t},\quad y_2(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot\sqrt[3]{t},\quad y_3(t)=\boldsymbol{u}(t-2)\cdot\sqrt[3]{t},$
$y_4(t)=\sqrt[3]{t-2},\quad y_5(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot\sqrt[3]{t-2},\quad y_6(t)=\boldsymbol{u}(t-2)\cdot\sqrt[3]{t-2}$

5.2 Kirjoita seuraavien funktioiden lausekkeet käyttäen apuna yksikköaskelia sekä niiden summia ja erotuksia. Piirrä funktioiden kuvaajat laskimella käyttäen apuna edellisessä tehtävässä määriteltyä yksikköaskelfunktiota. Tässä tehtävässä ei ole merkitystä sillä, miten kuvaaja piirretään määrittelyn vaihtumiskohdassa.

a) $f(t)=\begin{cases} t^2+2t\text{, kun } 5\le t<7 \\ t^2\text{, kun } 2\le t<5 \text{ tai } 7\le t<10 \\ 0 \text{ muulloin}\end{cases}$ b) $g(t)=\begin{cases} \sin t \text{, kun } \pi\le t<2\pi \\ \sin(2t)\text{, kun } 3\pi\le t<4\pi \\ 0 \text{ muulloin}\end{cases}$

5.3 Olkoon $t_0>0$. Laske $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}(t-t_0))$ suorittamalla Laplace-muunnoksen määritelmän mukainen integrointi kahdessa osassa laskinta hyödyntäen.

5.4 Olkoon $t_0>0$. Yksikköpenger $r(t)$ määritellään ehdosta $r(t)=t\cdot\boldsymbol{u}(t)$. Piirrä funktion $y(t)=r(t-t_0)$ kuvaaja ja määritä sen $\mathcal{L}$-muunnos suorittamalla Laplace-muunnoksen määritelmän mukainen integrointi kahdessa osassa laskinta hyödyntäen.

5.5 Kirjoita virran lauseke yksikköaskelen ja yksikköimpulssin avulla, jos aikavälillä $5\,\mathrm{s}\le t\le 10\,\mathrm{s}$ johtimen läpi kulkee 20 coulombin varaus tasaisena virtana ja lisäksi hetkellä $t=6\,\mathrm{s}$ johtimen läpi kulkee 10 coulombin varaus.

6. Siirto-ominaisuudet

Lause 3. (Aikaviiveominaisuus) Jos $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ ja $t_0>0$, niin

$$\boxed{\mathcal{L}\left(u(t-t_0)f(t-t_0)\right)=e^{-t_0 s}F(s)}$$

ts. jos funktioon $u(t)\,f(t)$ tulee t_0 :n suuruinen viive, niin sen Laplace-muunnos tulee kerrottua $e^{-t_0 s}$:llä.

Esimerkki. Olemme jo aiemmin todenneet seuraavat aikaviiveominaisuuden mukaiset tulokset (vrt. tehtävä 5.3 ja sivun 18 huomautuksen kohta 3)

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}\left(u(t-t_0)\right)=\frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right)=1 \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}\left(\delta(t-t_0)\right)=e^{-t_0 s}$$

Lause 4 (Siirtosääntö). Jos $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$, niin

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at}\cdot f(t))=F(s-a)}$$

ts. jos ajan funktio $f(t)$ kerrotaan lausekkeella e^{at}, niin $\mathcal{L}$ -muunnoksessa on jokaisesta s:stä vähennettävä a.

Siirtosäännön todistus. Koska oletuksen mukaan $F(s)=\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$, niin

$$\mathcal{L}(e^{at}\cdot f(t))=\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-st}\cdot\left(e^{at}\cdot f(t)\right)dt=\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\cdot f(t)\,dt=F(s-a)$$

Esimerkki. Koska $\mathcal{L}(\cos(3t))=\dfrac{s}{s^2+3^2}$, niin

$$\mathcal{L}(e^{2t}\cos(3t))=\frac{s-2}{(s-2)^2+3^2}=\frac{s-2}{s^2-4s+13}\ .$$

Huomaa, että aiemmista esimerkeistä poiketen $\mathcal{L}$ -muunnoksen nimittäjänä on nyt jaoton täydellinen toisen asteen polynomi.

Esimerkki. Jos $\mathcal{L}(f(t))=\dfrac{2s+3}{s^2-1}$, niin $\mathcal{L}(e^{-1\,t}\,f(t))=\dfrac{2(s-(-1))+3}{(s-(-1))^2-1}=\dfrac{2s+5}{s^2+2s}$

Ohje. Jos käänteismuunnettavana on osamurto, jonka nimittäjä on täydellinen toisen asteen polynomi as^2+bs+c, niin täydennä nimittäjä ensin neliöksi joko käsin laskien tai hyödyntäen laskimen completeSquare-komentoa ja käytä sen jälkeen monisteen lopussa olevan kaavakokoelman oikeaa puolta, joka on laadittu erityisesti käänteismuunnoksen suorittamista varten.

Esimerkki. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5s+14}{s^2+8s+20}\right)$

$s^2+8s+20=s^2+2\cdot s\cdot 4+20$

$=(s^2+2\cdot s\cdot 4\underline{\underline{+4^2}})+20\underline{\underline{-4^2}}=(s-(-4))^2+2^2$

Tai: completeSquare$(s^2+8s+20,s)$

Jaa $5s+14$ kahdessa osassa nimittäjällä

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(5\cdot\frac{s}{(s-(-4))^2+2^2}+14\cdot\frac{1}{(s-(-4))^2+2^2}\right)$$

$$=5\cdot\left(e^{-4t}\cos(2t)+\frac{-4}{2}\cdot e^{-4t}\sin(2t)\right)+14\cdot\frac{e^{-4t}\sin(2t)}{2}$$

$$=5e^{-4t}\cos(2t)-3e^{-4t}\sin(2t)$$

Tulos kannattaa tietenkin tarkistaa laskimeen määrittelemälläsi lapet-funktiolla!

Esimerkki. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^3+10s^2-6s+15}{s^4-2s^3+5s^2}\right)\overset{\text{expand-komennolla}}{=}\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+7}{s^2-2s+5}+\dfrac{3}{s^2}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+7}{(s-1)^2+4}+\frac{3}{s^2}\right)$$

Ensimmäinen nimittäjä on neliöity laskimen completeSquare-komennolla

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^2+2^2}+7\cdot\frac{1}{(s-1)^2+2^2}+3\cdot\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\left(e^{1t}\cos(2t)+\frac{1}{2}e^{1t}\sin(2t)\right)+\frac{7e^{1t}\sin(2t)}{2}+3t$$

$$=e^{t}\cos(2t)+4e^{t}\sin(2t)+3t$$

Tarkista lapet- ja comDenom-funktioilla!

Harjoitustehtäviä

6.1 Määritä a) $\mathcal{L}\left(2e^{3t}\sin(4t)-4e^{-3t}\cos(5t)\right)$ b) $\mathcal{L}\left(t^2\cdot e^{-4t}\right)$

6.3 Määritä a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6}{s^2+6s+10}\right)$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{12s}{s^2-4s+13}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{8}{s^2-4s+4}\right)$ (Opastus: $\mathcal{L}(t)=\dfrac{1}{s^2}$) d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^3+s^2+7s+15}{s^4+6s^2+25}\right)$

7. Ajalla *t* kerrotun funktion $\mathcal{L}$- muunnos

Lause 5. Jos $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, niin

$$\boxed{\mathcal{L}(t \cdot f(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)}$$

ts. jos funktio $f(t)$ kerrotaan ajalla *t*, niin funktion $\mathcal{L}$-muunnos derivoidaan ja sen merkki muutetaan. Esitettyä tulosta voi toistaa useampiakin kertoja:

$$\mathcal{L}(t^2 \cdot f(t)) = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{L}(t^n \cdot f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Todistus. Koska summa derivoidaan termeittäin ja koska integraalia voidaan pitää summana, niin sekin voidaan (tietyin edellytyksin) derivoida "termeittäin"

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(f(t))\right) = \frac{d}{ds}\left(\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt\right) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\,dt\right)$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} -t \cdot e^{-st}f(t)\,dt = -\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left(t \cdot f(t)\right)dt = -\mathcal{L}\left(t \cdot f(t)\right)$$

Esimerkki. $\mathcal{L}(t \cdot e^t) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^2}$.

Toisin: Merkitään $f(t) = t$, jolloin $F(s) = \frac{1}{s^2}$ ja siirtosäännön (lause 4) mukaan

$$\mathcal{L}(t \cdot e^t) = \mathcal{L}(e^{1t} \cdot f(t)) = F(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Esimerkki. $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t \cdot 1) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(1)) = -D\left(\frac{1}{s}\right) = -D\left(s^{-1}\right) = -(-1)s^{-2} = \frac{1}{s^2}$

$$\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}(t \cdot t) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(t)) = -D\left(\frac{1}{s^2}\right) = -D\left(s^{-2}\right) = -(-2)s^{-3} = \frac{2}{s^3}$$

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 7.1 Määritä sekä kaavojen avulla että määrittelemilläsi lap- ja lapet-funktioilla a) $\mathcal{L}\left(t \cdot \sin(4t)\right)$ b) $\mathcal{L}(t^2 \cdot \cos t)$ c) $\mathcal{L}\left(t^3 \cdot e^{5t}\right)$ d) $\mathcal{L}(t \cdot e^{3t}\cos t)$
Huomaa, että kohta c voidaan laskea kaavoja käyttäen kahdellakin eri tavalla.

8. Derivaatan ja integraalin $\mathcal{L}$- muunnokset

Seuraavaa lausetta käytetään ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä ja differentiaaliyhtälöryhmiä.

Lause 6. Jos $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= sF(s) - f(0)\\
\mathcal{L}(f''(t)) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\\
\mathcal{L}(f'''(t)) &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\cdots\\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),\ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

ts. derivaattafunktion $\mathcal{L}$-muunnos on s kertaa itse funktion $\mathcal{L}$-muunnos vähennettynä funktion arvolla alkuhetkellä.

Todistus. Ensimmäinen kaava saadaan soveltamalla osittaisintegrointikaavaa

$$\int_{t=a}^{b} u(t)\, v'(t)\, dt = \Big|_{t=a}^{b} u(t)\, v(t) - \int_{t=a}^{b} u'(t)\, v(t)\, dt$$

vasemmanpuolen lausekkeeseen

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\cdot f'(t)\cdot dt \qquad \begin{array}{ccc} u = e^{-st} & + & v' = f'(t) \\ u' = -se^{-st} & - & v = f(t) \end{array}$$

$$= \Big|_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) - \int_{t=0}^{\infty} -se^{-st}\cdot f(t)\cdot dt = \overbrace{(\lim_{t\to\infty}(e^{-st}f(t))}^{=0,\text{ kun } s \text{ riittävän suuri ja } f \text{ "tavallinen" funktio}} - f(0)) + s\cdot\mathcal{L}(f(t)) = sF(s) - f(0)$$

Seuraavaksi johdamme toisen derivaatan muunnoskaavan ensimmäisen avulla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f''(t)) &\overset{\text{Merk. } f'=g}{=} \mathcal{L}(g'(t)) = sG(s) - g(0) = s\mathcal{L}(g(t)) - g(0)\\
&= s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) = s\big(sF(s) - f(0)\big) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

Seuraavat kaavat voidaan johtaa samalla periaatteella aina edellisestä.

Esim. Jos muunnos $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(at)) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ oletetaan tunnetuksi, niin

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}f'(t)\right) = \frac{1}{a}(sF(s) - f(0)) = \frac{1}{a}\left(s\cdot\frac{a}{s^2+a^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Seuraavaa tulosta käytetään puolestaan integraaliyhtälöitä ratkaistaessa.

Lause 7. Jos $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, niin

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}\cdot F(s)}$$

Huomautus. Derivaattafunktion $\mathcal{L}$-muunnosta laskettaessa itse funktion $\mathcal{L}$-muunnos mm. kerrottiin s:llä. Siten on luonnollista, että integraalifunktion $\mathcal{L}$-muunnosta laskettaessa itse funktion $\mathcal{L}$-muunnos jaetaan s:llä, ovathan kertominen ja jakaminen sekä derivointi ja integrointi käänteisiä toimituksia.

Esimerkki. Johdetaan funktioiden $g(t) = t$ ja $h(t) = t^2$ Laplace-muunnokset käyttäen apuna kaavaa $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$.

Jos $f(t) = 1$, niin $F(s) = \frac{1}{s}$ ja lauseen 7 mukaan

$$\mathcal{L}(t) \overset{\substack{\text{totea oikeaksi laskemalla}\\ \text{oikealla oleva integraali}}}{=} \mathcal{L}\left(\int_{\tau=0}^{t} 1\,d\tau\right) = \mathcal{L}\left(\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{s}\cdot F(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Jos $g(t) = t$, niin $G(s) = \frac{1}{s^2}$ ja edelleen lauseen 7 mukaan

$$\mathcal{L}(t^2) \overset{\substack{\text{totea oikeaksi laskemalla}\\ \text{oikealla oleva integraali}}}{=} \mathcal{L}\left(2\int_{\tau=0}^{t} \tau\,d\tau\right) = 2\cdot\mathcal{L}\left(\int_{\tau=0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right) = 2\cdot\frac{1}{s}\cdot G(s) = 2\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

Huomaa, että luvun 7 viimeisessä esimerkissä samaa asiaa tarkasteltiin selvästi helpommin keksittävällä tavalla.

Harjoitustehtäviä

8.1 Tiedetään, että $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \dfrac{s-2}{s^2-4s+13}$ ja $f(0) = 1$. Määritä $\mathcal{L}\left(f'(t)\right)$

a) lausetta 6 käyttäen

b) etsimällä ensin funktio $f(t)$ käänteismuunnosta käyttäen.

8.2 Tiedetään, että $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \dfrac{2}{s^2-6s+13}$. Määritä $\mathcal{L}\left(\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right)$

a) lausetta 7 käyttäen

b) etsimällä ensin funktio $f(t)$ käänteismuunnosta käyttäen.

9. Laplace-muunnoksen käytöstä

Laplace-muunnosta käytetään esimerkiksi sähkötekniikassa vakiokertoimisten lineaaristen differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ja -yhtälöryhmien ratkaisemiseen, sillä $\mathcal{L}$-muunnos soveltuu juuri tuntemattoman funktion lineaaristen lausekkeiden käsittelyyn lauseen 2 mukaisella tavalla.

Rajoittuminen pelkästään vakiokertoimisiin differentiaaliyhtälöihin ei ole sähkötekniikassa kovin rajoittavaa, koska yhtälön kertoimet saadaan piirin komponenteista, jotka useimmiten ovat likimain ajasta riippumattomia vakioita. Tarkalleen ottaen tämä ei kuitenkaan aina pidä paikkaansa, sillä ajan kuluessa esimerkiksi vastus lämpenee, mikä aiheuttaa resistanssin muuttumista.

Huomautus. Jos differentiaaliyhtälö ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla, niin lauseen 6 edellyttämällä tavalla on tunnettava tuntemattomaan funktioon liittyvät alkuehdot hetkellä $t = 0$. Tarvittaessa voidaan kuitenkin lisätä yhtälön kertaluvun mukainen määrä yleisiä alkuehtoja $y^{(i)}(0) = C_i$, jolloin haetaankin differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua.

Laplace-muunnoksen käyttö edellä mainituissa tilanteissa on aina päävaiheiltaan samanlainen:

Vaiheessa 1 otetaan yhtälön / yhtälöiden molemmista puolista $\mathcal{L}$-muunnokset.

Vaiheessa 2 edellä saadusta algebrallisesta yhtälöstä / yhtälöryhmästä ratkaistaan tuntemattoman funktion / tuntemattomien funktioiden $\mathcal{L}$-muunnokset algebrasta tutulla tavalla tai vaikkapa laskimen solve-komennolla.

Vaiheessa 3 edellä löydetyt $\mathcal{L}$-muunnokset jaetaan osamurtoihin vaikkapa laskinta käyttäen.

Vaiheessa 4 etsitään osamurtokehitelmien käänteismuunnokset, jolloin olemmekin löytäneet etsityn funktion / etsityt funktiot.

Esimerkki. Ratkaistaan edellä esitetyin vaihein alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y''(t) - 3y' + 2y = 12e^{4t} \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 13 \end{cases} \quad \Big| \ \mathcal{L}, \text{ lineaarinen muunnos!}$$

$$\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 12\mathcal{L}(e^{4t}) \quad \Big| \ \text{Merk. } Y = \mathcal{L}(y)$$

$$\left(s^2 Y - sy(0) - y'(0)\right) - 3\left(sY - y(0)\right) + 2Y = 12 \cdot \frac{1}{s-4}$$

$$s^2 Y - 6s - 13 - 3(sY - 6) + 2Y = 12 \cdot \frac{1}{s-4}$$

$$Y = \frac{\frac{12}{s-4} + 6s + 13 - 3 \cdot 6}{s^2 - 3s + 2} \overset{\substack{\text{laskimen} \\ \text{expand-} \\ \text{komennolla}}}{=} \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-4}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-4}\right) = 3e^{t} + e^{2t} + 2e^{4t}$$

Huomautus. Edellä ollut differentiaaliyhtälö ratkeaa myös laskimen deSolve-komennolla tai karakteristisen yhtälön ja fiksun yritteen avulla. Katso tarkemmin Ojalain laskuoppien opuksesta Differentiaaliyhtälöt.

Esimerkki. Tässä esimerkissä tarkastellaan integraaliyhtälöä, jolloin haetaan funktiota, joka integraaleineen toteuttaa ko. yhtälön. Integraaliyhtälö ratkaistaan Laplace-muunnosta käyttäen samoin vaihein 1 - 4 kuin differentiaaliyhtälökin.

$$y(t) + 4\int_{\tau=0}^{t} y(\tau)\,d\tau = 3e^{2t} \quad \Big| \ \mathcal{L}\text{ , lineaarisuus ja lause 4}$$

$$Y + 4 \cdot \frac{1}{s} Y = 3 \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$Y = \frac{\frac{3}{s-2}}{1 + \frac{4}{s}} = \underbrace{\frac{3s}{(s-2)(s+4)}}_{\text{tämä on turha välivaihe}} \overset{\substack{\text{expand-komennolla jo} \\ \text{ensimmäisestä } Y\text{:lle} \\ \text{saadusta lausekkeesta}}}{=} \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s-2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+4} + \frac{1}{s-2}\right) = 2e^{-4t} + e^{2t}$$

Huomautus. Edellä ollut integraaliyhtälö voidaan derivoimalla muuntaa differentiaaliyhtälöksi käyttäen seuraavaa lausetta.

Lause 8. $$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau=a}^{t} y(\tau)d\tau\right) = y(t)$$

ts.
määrätyn integraalin derivaatta ylärajan suhteen = integroitava funktio ylärajalla

Todistus. Jos funktion $y(\tau)$ jokin integraalifunktio on $Y(\tau)$, niin

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau=a}^{t} y(\tau)d\tau\right) = \frac{d}{dt}\left(\Big|_{\tau=a}^{t} Y(\tau)\right) = \frac{d}{dt}\left(Y(t)-Y(a)\right) = Y'(t)-0 = y(t)$$

Esimerkki. Edellisen lauseen mukaan $\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau=0}^{t} \sin\tau\, d\tau\right) = \sin t$.

Saman tuloksen saa työläämminkin ensin integroimalla ja sitten derivoimalla:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau=0}^{t} \sin\tau\, d\tau\right) = \frac{d}{dt}\left(\Big|_{\tau=0}^{t} -\cos\tau\right) = \frac{d}{dt}\Big(-\cos t - (-\underbrace{\cos 0}_{=\text{ vakio 1}})\Big) = \sin t$$

Esimerkki. Edellä olleesta integraaliyhtälöstä

$$y(t) + 4\int_{\tau=0}^{t} y(\tau)d\tau = 3e^{2t}$$

saadaan muuttujan *t* suhteen derivoimalla differentiaaliyhtälö

$$y'(t) + 4y(t) = 6e^{2t}.$$

Tarvittava alkuehto saadaan sijoittamalla $t = 0$ integraaliyhtälöön ja ottamalla huomioon, että funktion *y* integraali nollan mittaisella välillä on tietenkin nolla:

$$y(0) + 4\cdot 0 = 3\cdot e^{0} \Leftrightarrow y(0) = 3 \;.$$

Tämän jälkeen differentiaaliyhtälöstä saadaan $\mathcal{L}$-muuntamalla

$$sY(s) - 3 + 4Y(s) = 6\cdot\frac{1}{s-2} \quad\Leftrightarrow\quad Y(s) = \frac{\frac{6}{s-2}+3}{s+4} \overset{\text{expand}}{=} \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = 2e^{-4t} + e^{2t}$$

Huomautus. Edellisessä esimerkissä johdettu differentiaaliyhtälö ratkeaa myös laskimen deSolve-komennolla tai käsin karakteristisen yhtälön ja yritteen avulla.

Esimerkki. Ratkaistaan differentiaali-integraaliyhtälö

$$\begin{cases} y'(t) - 4 \int\limits_{\tau=0}^{t} y(\tau)d\tau = 3e^t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Big| \ \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}(y') - 4\mathcal{L}\left(\int\limits_{\tau=0}^{t} y(\tau)d\tau \right) = 3\mathcal{L}(e^t)$$

$$(sY-1) - 4\left(\frac{1}{s}Y\right) = 3 \cdot \frac{1}{s-1} \quad \Big| \ \text{Tästä voit ratkaista } Y\text{:n käsin tai laskimen solve-komennolla}$$

$$Y = \frac{\frac{3}{s-1}+1}{s-\frac{4}{s}} \overset{\text{laskimella expand}}{=} \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right) = 2e^{2t} - e^t$$

Esimerkki. Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) + x(t) + 2y(t) = 4\sin t + 2\cos t \\ 2x'(t) - y'(t) - 2x(t) + y(t) = 4\sin t + 6\cos t \\ x(0) = -2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On siis etsittävä sellaiset funktiot $x = x(t)$ ja $y = y(t)$, jotka derivaattoineen toteuttavat molemmat differentiaaliyhtälöt ja alkuehdot.

Aluksi otetaan kummastakin yhtälöstä $\mathcal{L}$-muunnos:

$$\begin{cases} sX + 2 + sY - 1 + X + 2Y = 4\frac{1}{s^2+1} + 2\frac{s}{s^2+1} \\ 2(sX+2) - (sY-1) - 2X + Y = 4\frac{1}{s^2+1} + 6\frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

Saadusta algebrallisesta yhtälöparista ratkaistaan vaikkapa laskimen solve-komennolla Laplace-muunnokset X ja Y, jotka jaetaan osamurtoihin kään-teismuuntamista varten:

$$\begin{cases} X = \frac{-2s+1}{s^2+1} = -2\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \\ Y = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \end{cases} \quad \Big| \ \mathcal{L}^{-1}$$

$$\begin{cases} x = -2\cos t + \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$$

Harjoitustehtäviä

9.1 Ratkaise $\mathcal{L}$-muunnosta käyttäen ajan t funktiot $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ alla annetuista yhtälöistä ja yhtälöparista.
Tarkista kohtien a – d ratkaisut TI-laskimen komennolla deSolve.
Muunna kohdan e integraaliyhtälö myös differentiaaliyhtälöksi, jonka ratkaiset sekä $\mathcal{L}$-muunnoksella että TI-laskimen komennolla deSolve.

a) $y' - 3y = 4$, $y(0) = 5$

b) $y' + 2y = 3\cos(4t)$, $y(0) = 5$

c) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

d) $y'' - 2y' + y = 3t + 2\sin 4t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

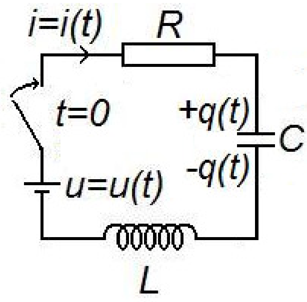
e) $y(t) + 2\int_{\tau=0}^{t} y(\tau)d\tau = 3t + 4$

f) $\begin{cases} 2x' - y' + 3x + 2y = -7e^{2t} + 13e^{t} \\ x' + 2y' - x + 3y = -e^{2t} + 15e^{t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 3$

10. Virtapiirin Laplace-muunnos

Esimerkki. Kuvan RCL-piiristä saadaan Kirchhoffin lain perusteella myötäpäivään kulkemalla yhtälö

$$u - Ri - \frac{q}{C} - Li' = 0.$$



Jos kondensaattori on tyhjä kytkintä suljettaessa, niin kondensaattorin varaus myöhempänä hetkenä t on kondensaattoriin aikavälillä $[0,\, t]$ saapuneiden varausten summa ja saadaan siis integroimalla $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)\, d\tau$. Edellinen yhtälö voidaan nyt muuttaa muotoon

$$u - Ri - \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau) d\tau - Li' = 0.$$

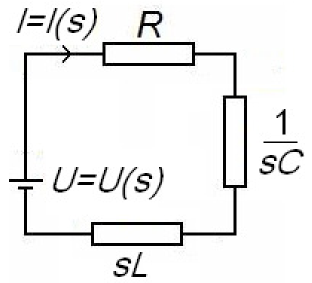
Alkuehto $i(0^+) = 0$ saadaan kelan aiheuttamasta hitaudesta. Laplace-muuntamalla em. yhtälöstä saadaan lauseilla 6 ja 7

$$\mathcal{L}\left(u(t)\right) - R\cdot\mathcal{L}\left(i(t)\right) - \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(i(t)\right) - L\cdot s\mathcal{L}\left(i(t)\right) = 0$$

eli

$$U(s) - R\cdot I(s) - \frac{1}{sC}\cdot I(s) - sL\cdot I(s) = 0.$$

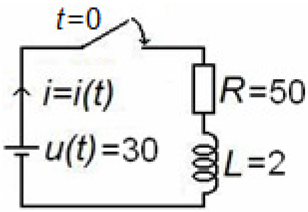
Huomautus. Käytännössä edellä differentiaaliyhtälöstä $\mathcal{L}$-muuntamalla saatu yhtälö voidaan kirjoittaa suoraan viereisen **vastinpiiri**n avulla ilman differentiaaliyhtälön muodostamista. Vastinpiiri saadaan korvaamalla todellisen piirin kondensaattori ja kela seuraavan taulukon mukaisilla vastuksilla ja jättämällä kytkin pois, sillä $\mathcal{L}$-maailmassa ei tunneta aikaa, joten siellä ei voi edes olla olemassa kytkimiä, jotka olisivat eri ajanhetkinä eri asennoissa.

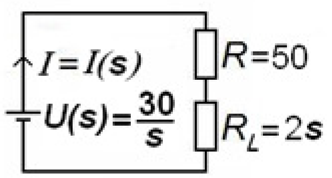


Virtapiirissä	Vastinpiirissä
Virta $i(t)$	Vastinvirtana virran $\mathcal{L}$-muunnos $I(s) = \mathcal{L}\left(i(t)\right)$
Jännitelähde $u(t)$	Vastinjännitelähteenä jännitteen $\mathcal{L}$-muunnos $U(s) = \mathcal{L}\left(u(t)\right)$
Vastus R	Vastus R
Kondensaattori C	Vastus $\frac{1}{sC}$
Kela L	Vastus sL

Lause 9. Jos mielivaltaisessa virtapiirissä olevien kondensaattorien varaukset ja keloissa kulkevat virrat ovat nollia alkuhetkellä $t = 0$, niin piirissä arvoilla $t \geq 0$ kulkevien virtojen Laplace-muunnokset voidaan ratkaista niistä yhtälöistä, jotka saadaan tasajännitteitä ja tasavirtoja koskevien lakien mukaan edellisen taulukon mukaisesti muodostetusta vastinpiiristä, jossa vastinjännitelähteiden lisäksi on vain vastuksia.

Esim. Ratkaistaan viereisessä RL-piirissä kulkeva virta kytkimen sulkemisen jälkeen.





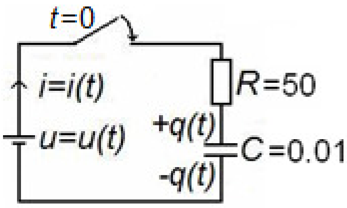
Muodostetaan vastinpiiri edellisen taulukon mukaan, joten kelaa L vastaa vastus $R_L = sL = 2s$ ja jännitelähdettä sen $\mathscr{L}$-muunnos $\mathscr{L}(u(t)) = \mathscr{L}(30) = 30/s$. Vastinpiiristä saadaan välittömästi

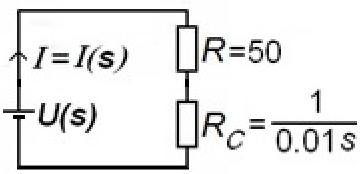
$$I = \frac{U(s)}{R + R_L} = \frac{30/s}{50 + 2s} \overset{\text{expand}}{=} 0.6\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+25}\right).$$

Tästä saadaan käänteismuuntamalla

$$i = 0.6(1 - e^{-25t}).$$

Esim. Ratkaistaan viereisessä RC-piirissä kulkeva virta kytkimen sulkemisen jälkeen, kun $u(t) = 30\sin t$.





Muodostetaan vastinpiiri edellä olleen taulukon mukaisesti. Kondensaattoria C vastaa vastus $R_C = \dfrac{1}{sC} = \dfrac{1}{0.01s}$ ja vaihtojännitelähdettä tasajännite $U(s) = \mathscr{L}(30\sin t) = 30 \cdot \dfrac{1}{s^2 + 1^2}$, jonka lausekkeessa ei todellakaan esiinny aikaa t. Vastinpiiristä saadaan välittömästi

$$I = \frac{U(s)}{R + R_C} = \frac{\dfrac{30}{s^2+1}}{50 + \dfrac{1}{0.01s}} \overset{\substack{\text{Laskimella} \\ \text{expand}}}{=} 0.24 \cdot \frac{s}{s^2+1} + 0.12 \cdot \frac{1}{s^2+1} - 0.24 \cdot \frac{1}{s+2}$$

Tästä saadaan käänteismuuntamalla

$$i = 0.24 \cdot \cos t + 0.12 \cdot \sin t - 0.24e^{-2t} = 0.268\sin(t + 1.11) - 0.24e^{-2t}$$

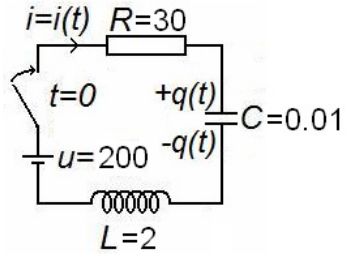
missä trigonometriset funktiot on lopuksi yhdistetty yhdeksi siniaalloksi laskimen komennolla tCollect.

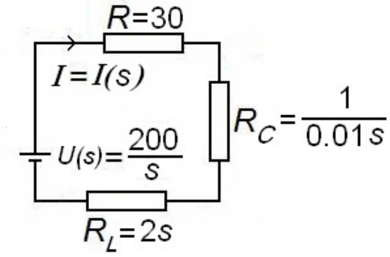
Esim. Tarkastellaan kuvan RCL-piiriä, missä $R=30$, $C=0.01$, $L=2$, $u(t)=200$ ja kytkin suljetaan hetkellä $t=0$, jolloin kondensaattorissa ei ole varausta. Vastinpiirissä on seuraavat komponentit

$$R_C=\frac{1}{sC}=\frac{100}{s}$$

$$R_L=sL=2s$$

$$U(s)=L(u(t))=L(200)=\frac{200}{s}.$$

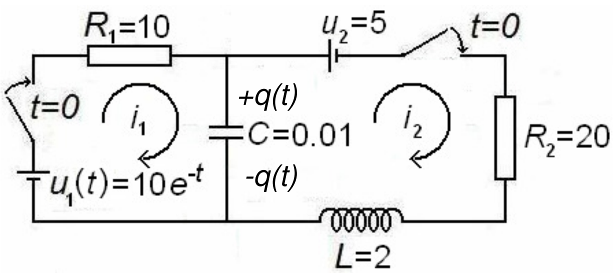


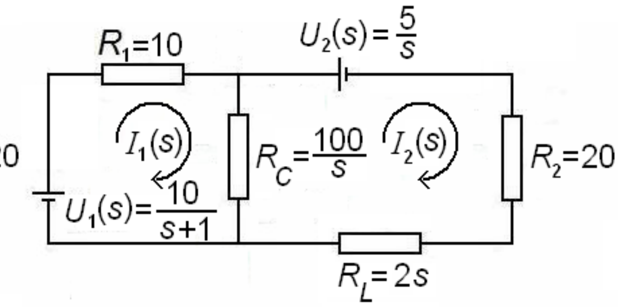


Koska vastinpiirissä $I(s)=\dfrac{U(s)}{R+R_C+R_L}=\dfrac{\frac{200}{s}}{30+\frac{100}{s}+2s}\overset{\text{expand}}{=}\dfrac{20}{z+5}-\dfrac{20}{z+10}$, niin

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{20}{s+5}-\frac{20}{s+10}\right)=20(e^{-5t}-e^{-10t})$$

Esimerkki. Tarkastellaan alla vasemmalla olevaa kahdesta silmukasta muodostuvaa virtapiiriä, jossa kondensaattorin varaus ja kelan virta ovat nollia hetkellä $t=0$. Tarkoituksena on laskea kuvanmukaiset silmukkavirrat $i_1=i_1(t)$ ja $i_2=i_2(t)$, kun $t\geq 0$, sekä kondensaattorin varauksen raja-arvo, kun $t\to\infty$.





Oikeanpuoleinen vastinpiiri on muodostettu aiemman taulukon mukaisesti. Vastinpiirin pikkusilmukoista saadaan myötäpäivään kiertämällä

$$\begin{cases}\dfrac{10}{s+1}-10I_1-(I_1-I_2)\dfrac{100}{s}=0\\[2mm] -\dfrac{5}{s}-20I_2-2sI_2-(I_2-I_1)\dfrac{100}{s}=0\end{cases}$$

Ratkaistaan tämä yhtälöpari ensin laskimella ja lopuksi ratkaisut osamurretaan yksitellen expand-komennolla, jolloin saadaan

$$\begin{cases}I_1=\dfrac{s^3+10s^2+25s-25}{s(s^3+21s^2+170s+150)}=\dfrac{0.854s}{s^2+20s+150}+\dfrac{6.39}{s^2+20s+150}+\dfrac{0.313}{s+1}-\dfrac{0.167}{s}\\[3mm] I_2=\dfrac{-5(s^2-9s+10)}{2s(s^3+21s^2+170s+150)}=\dfrac{-0.215s}{s^2+20s+150}-\dfrac{6.42}{s^2+20s+150}+\dfrac{0.382}{s+1}-\dfrac{0.167}{s}\end{cases}$$

Koska toisen asteen nimittäjä voidaan käsin tai laskimella neliöidä muotoon $(s+10)^2+50=(s-(-10))^2+7.071^2$, niin virtojen Laplace-muunnokset ovat

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{0.854s}{((s-(-10))^2+7.07^2}+\dfrac{6.39}{((s-(-10))^2+7.07^2}+\dfrac{0.313}{s+1}-\dfrac{0.167}{s} \\ I_2=\dfrac{-0.215s}{((s-(-10))^2+7.07^2}-\dfrac{6.42}{((s-(-10))^2+7.07^2}+\dfrac{0.382}{s+1}-\dfrac{0.167}{s} \end{cases}$$

Näistä saadaan monisteen lopussa olevan muunnostaulukon kahden viimeisen kaavan avulla

$$\begin{cases} i_1=\underbrace{0.854\cdot e^{-10t}\left(\cos(7.07t)+\dfrac{-10}{7.07}\sin(7.07t)\right)+6.39\cdot\dfrac{e^{-10t}\sin(7.07t)}{7.07}}_{\text{Ota } e^{-10t} \text{ tekijäksi ja yhdistä muu osa komennolla tCollect kummassakin lausekkeessa}}+0.313e^{-1t}-0.167 \\ i_2=\overbrace{-0.215\cdot e^{-10t}\left(\cos(7.07t)+\dfrac{-10}{7.07}\sin(7.07t)\right)-6.42\cdot\dfrac{e^{-10t}\sin(7.07t)}{7.07}}+0.382e^{-1t}-0.167 \end{cases}$$

Suorittamalla kerrotut toimenpiteet saadaan

$$\begin{cases} i_1=0.907e^{-10t}\sin(7.07t+1.91)+0.313e^{-t}-0.167 \\ i_2=0.64e^{-10t}\sin(7.07t-2.80)+0.382e^{-t}-0.167 \end{cases}$$

Kondensaattorin lopullinen varaus saadaan integroimalla (eli $\int$ummaamalla yhteen) kaikki aikavälillä $[0,\infty)$ saapuneet osavaraukset:

$$q(\infty)=\int_{t=0}^{\infty}\left(i_1(t)-i_2(t)\right)dt=0.0164\ .$$

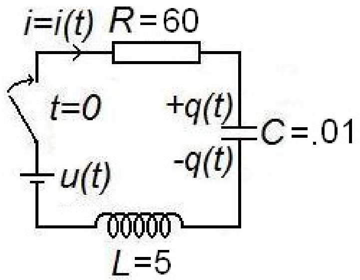
Kondensaattorin napojen välinen lopullinen jännite on

$$\frac{q(\infty)}{C}=\frac{0.0164}{0.01}=1.64\ .$$

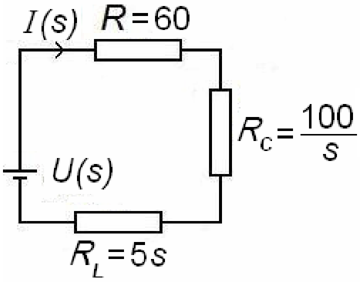
Vaikka edellisen esimerkin numeeristen laskujen suorittaminen on laskinta hyödyntäenkin työlästä, niin tehtävän periaatteellinen suorittaminen on kuitenkin hyvin yksinkertaista:

1) Muodostetaan todellisen virtapiirin vastinpiiri annetun taulukon mukaisesti
2) Kirjoitetaan vastinvirtoja koskevat yhtälöt piireistä, joissa on vain vastinjännitelähteitä ja vastuksia
3) Ratkaistaan vastinvirrat laskimella
4) Vastinvirrat osamurretaan laskimella
5) Osamurtojen toisen asteen nimittäjät täydennetään neliöiksi laskimella
6) Osamurrot käänteismuunnetaan taulukoiden avulla

Esimerkki. Tarkastellaan viereisen piirin virtaa, kun jännite on $u(t)=\begin{cases}20t\text{ , kun } 0<t\le 1\\ 0 \text{ muulloin}\end{cases}$ ja kytkintä suljettaessa kondensaattorissa ei ole varausta.



Alle piirretyssä vastinpiirissä



$$U(s)=\mathcal{L}\left(u(t)\right)=\mathcal{L}\Big(20t\cdot\left(\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}(t-1)\right)\Big)$$

Tämä päälleviivattu termi oli jo edellä

$$=\mathcal{L}\Big(20t\cdot\boldsymbol{u}(t)\ \ \overline{\underline{\underline{-20}}(t\underline{\underline{-1)\cdot\boldsymbol{u}(t-1)}}}\ \ \underline{\underline{-20\cdot\boldsymbol{u}(t-1)}}\Big)$$

...............Lisätty................ ja ......vähennetty......
sama tuplasti alleviivattu termi $20\boldsymbol{u}(t-1)$

$$=20\cdot\frac{1}{s^2}-20\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-1s}-20\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-1s}$$

Vastinpiirin virta saadaan jakamalla vastinjännite $U(s)$ sarjassa olevien vastusten resistanssien R, R_C ja R_L summalla

$$I(s)=\frac{U(s)}{60+\frac{100}{s}+5s}=\underbrace{\frac{20\cdot\frac{1}{s^2}}{60+\frac{100}{s}+5s}}_{\text{expand!}}-\underbrace{\frac{20\cdot(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})}{60+\frac{100}{s}+5s}}_{\text{expand!}}\cdot e^{-s}$$

$$=\left(\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{s+10}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}\right)-\left(\frac{-9}{20}\cdot\frac{1}{s+10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-s}$$

Jälkimmäinen termi voidaan käänteismuuntaa käyttäen aikaviiveominaisuutta

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{u}(t-t_0)f(t-t_0)\right)=e^{-t_0 s}F(s)$$

takaperin, jolloin kaiken kaikkiaan saadaan

$$\underline{\underline{i(t)\ =\ \frac{1}{20}e^{-10t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{5}-\boldsymbol{u}(t-1)\left(\frac{-9}{20}e^{-10(t-1)}+\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}+\frac{1}{5}\right)}}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{20}e^{-10t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{5}\ =\ \underline{\underline{0.05e^{-10t}-0.25e^{-2t}+0.2\ ,\quad \text{jos }\ 0<t\le 1}}\\[2ex] \frac{1}{20}e^{-10t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{5}-\left(\frac{-9}{20}e^{-10(t-1)}+\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}+\frac{1}{5}\right)\\[2ex] \quad =\frac{1}{20}e^{-10t}\left(1+9e^{10}\right)-\frac{1}{4}e^{-2t}\left(1+e^{2}\right)\approx\underline{\underline{9910e^{-10t}-2.10e^{-2t}\text{, jos } t>1}}\end{cases}$$

Sama tulos on saatu Ojalain laskuoppien teoksessa Differentiaaliyhtälöt käyttäen differentiaaliyhtälöiden perinteellisempiä ratkaisutapoja.

Harjoitustehtäviä.

Seuraavissa tehtävissä oletetaan, että kelojen virrat ja kondensaattorien jännitteet ovat nollia alkuhetkellä $t=0$, jolloin kytkin suljetaan.

10.1 Tarkastellaan RL-piiriä, jossa $L=5$, $R=100$ ja
a) $u=50$ b) $u=u(t)=300\sin(100\pi t)$.
Määritä piirin virta ajan funktiona, kun kytkin suljetaan hetkellä $t=0$.

10.2 Tarkastellaan LC-piiriä, jossa $L=5$, $C=0.00002$ ja jännitelähteen jännite $u(t)$ on a) $10\sin(90t)$ b) $10\sin(100t)$ c) $10\sin(110t)$.
Ratkaise piirin virta, kun kytkin suljetaan hetkellä $t=0$.

10.3 Tarkastellaan RC-piiriä, jossa $R=20$, $C=0.001$ ja
a) $u=10$ b) $u=u(t)=10\sin(2t)$.
Ratkaise piirin virta, kun kytkin suljetaan hetkellä $t=0$.

10.4 Tarkastellaan RCL-piiriä, missä $R=40, C=0.00002$, $L=5$ ja
a) $u=200$ b) $u=u(t)=300\sin(100t)$.
Määritä piirin virta, kun kytkin suljetaan hetkellä $t=0$.

$\mathcal{L}$– ja $\mathcal{L}^{-1}$–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$	$F(s)$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	1
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^2}$	t
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{1}{s^2+b^2}$	$\frac{\sin(bt)}{b}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$
$t\cdot f(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$	$-\frac{1}{2b^2}\ t\ \cos(bt)+\frac{1}{2b^3}\sin(bt)$
$e^{at}\cdot f(t)$	$F(s-a)$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$	$\frac{1}{2b}\ t\sin(bt)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$		
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$e^{at}t$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{e^{at}t^2}{2}$
$\int\limits_{\tau=0}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\mathcal{u}(t-t_0)f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$	$\frac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}$
		$\frac{s}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos(bt)+\frac{a}{b}e^{at}\sin(bt)$

Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjaan kuuluva teos Laplace-muunnos on tarkoitettu sähkötekniikan insinööriopiskelijoille differentiaaliyhtälöiden kurssin täydennysmateriaaliksi. Laplace-muunnos yhdessä tehokkaan apuvälineen kanssa tarjoaa yksinkertaisen menetelmän virtapiireihin liittyvien differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ja -yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

Sarjan kaikissa teoksissa on pyritty huomioimaan lähiopetuksen voimakas vähentyminen. Siksi matematiikassakin on keskityttävä kaikkein oleellisimpaan: käsitteiden hallitsemiseen, apuvälineiden tehokkaaseen hyödyntämiseen mekaanisen käsinlaskennan asemasta sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten selkeään esittämiseen.

Yhden kirjoittajan omat opiskelijat ovat viime vuodet käyttäneet TI-Nspire CX CAS -laskimia. Siksi teoksessa on hyödyllisiä ohjeita kyseisen laskimen käytöstä. Monet opiskelijat ovatkin tyytyväisinä todenneet ”oppineensa näkemään metsän puilta”. Myös muiden symbolisten laskimien ja matematiikkaohjelmien käyttäjät saavat kirjasta ideoita oman apuvälineensä hyödyntämiseen.

Kaikki sarjassa ilmestyneet teokset Algebra, Geometria, Differentiaali- ja integraalilaskenta, Differentiaaliyhtälöt sekä Laplace-muunnos ovat vapaasti tulostettavissa ja jaettavissa koko sivun kopioina opetuskäyttöön.

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit C2
ISSN 2323-8364
ISBN 978-951-633-210-8

Julkaisija
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi

samk