



SEINÄJOEN AMMATTIKORKEAKOULU  
SEINÄJOKI UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Tämä on alkuperäisen artikkelin rinnakkaistallenne (kustantajan versio).

**Viite:**

Perälä, M. 2020. Momenttimenetelmä Timoshenko-palkille. Teoksessa: S. Päälyssaho, P. Junell, J. Latvanen, S. Saarikoski & S. Uusimäki (toim.)  
Seinäjoen ammattikorkeakoulu 2020: Osaamista strategian vahvuusaloilla.  
Seinäjoki: Seinäjoen ammattikorkeakoulu. Seinäjoen ammattikorkeakoulun  
julkaisusarja A. Tutkimuksia 33, 394 - 401.



# MOMENTTIMENETELMÄ TIMOSHENKO-PALKILLE

*Martti Perälä, TkL, lehtori*

*SeAMK Tekniikka*

## 1 JOHDANTOA

Momenttimenetelmä on eräs perinteinen staattisesti määräämättömien sauvarakenteiden ratkaisumenetelmä, jota jollain rakenteiden mekaniikan perusopinjaksoilla yleensä käsitellään. Momenttimenetelmässä päädytään yhtälöryhmään, jossa tuntemattomina on sauvanpäämomentteja ja sauvakiertymiä. Momenttimenetelmän perusyhtälö esittää sauvan sauvanpääkiertymän sauvanpäämomenttien, sauvakiertymän ja sauvan kuormituksen avulla. Perusyhtälö perustuu Euler-Bernoullin palkkiteoriaan (teknilliseen taivutusteoriaan), missä sauvan leikkausmuodonmuutosten vaikutusta ei oteta huomioon. Palkkiteoriaa, joka huomioi em. leikkausmuodonmuutokset nimitetään Timoshenkon palkkiteoriaksi. Se kuvaa palkin toimintaa tarkemmin kuin Euler-Bernoullin palkkiteoria. (Salmi & Kuula 2012.)

Artikkelissa esitetään, miten momenttimenetelmän perusyhtälöä sauvanpääkiertymälle voidaan helposti muokata niin, että se huomioi myös leikkausmuodonmuutosten vaikutuksen. Artikkelissa esitetään myös momenttimenetelmän avulla johdettu ns. kolmen momentin yhtälö jatkuvien palkkien analysointiin. Kolmen momentin yhtälön yhteydessä havaitaan, että tietyllä taivutus- ja leikkausjäykkyiden suhteella osa muodostuvan yhtälöryhmän yhtälöistä voidaan ratkaista erillisinä. Esimerkkilaskelmissa verrataan Euler-Bernoullin ja Timoshenkon palkkiteorioiden antamia ratkaisuja erityisesti jatkuvien palkkien yhteydessä.

## 2 TIMOSHENKON PALKKITEORIA

Euler-Bernoullin palkkiteoriassa palkin taipuman  $v$  derivaatta  $v'$  on yhtäsuuri kuin poikkileikkaustason kiertymä  $\varphi$ . Timoshenkon palkkiteoriassa näin ei ole. Taipuman derivaatan ja kiertymän erotus on liukuma  $y$  eli  $y = v' - \varphi$ . Timoshenkon palkin toimintaa kuvaavat differentiaaliyhtälöt kiertymän ja taivutusmomentin  $M$  välille ja toisaalta taipuman ja leikkausvoiman  $Q$  välille ovat

$$\varphi' = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

$$v' = \varphi + \frac{Q}{\bar{GA}} \quad (2)$$

missä  $EI$  on taivutusjäykkyys ja  $\bar{GA} = kGA$  on leikkausjäykkyys, missä  $k$  on ns. leikkauskorjauskerroin. Poikkileikkausmuodosta riippuva leikkauskorjauskerroin ottaa huomioon vakioarvosta poikkeavan leikkausjännityksen jakauman. Esimerkiksi suorakaide-poikkileikkauksen tapauksessa  $k=5/6$  (Reivinen & Salonen 1994). Taivutusjäykkyys ja leikkausjäykkyys oletetaan tässä artikkelissa vakioiksi.

Koska Euler-Bernoullin palkkiteoriassa  $\varphi=v'$  seuraa tästä, että differentiaaliyhtälön (1) paikalla on Euler-Bernoullin palkkiteoriassa tuttu taipuman differentiaaliyhtälö

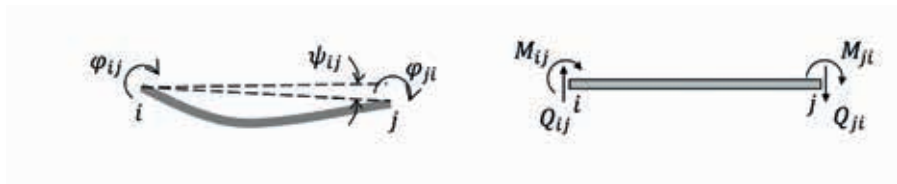
$$v'' = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

Jälkimmäistä differentiaaliyhtälöä (2) ei Euler-Bernoullin palkkiteoriassa esiinny. Leikkausvoima saadaan tasapainoyhtälöstä  $Q=M'$ . (Beer & Johnston 1992.)

## 3 MOMENTTIMENETELMÄ

### 3.1 Siirtymä- ja voimasuureet

Momenttimenetelmän siirtymäsuureina ovat sauvan  $i$ - $j$  sauvanpääkiertymät  $\varphi_{ij}$  ja  $\varphi_{ji}$  sekä sauvakiertymä  $\psi_{ij}$  (Kuvio 1). Sauvakiertymä kuvaa sauvan jäykän kappaleen liikettä. Siihen ei liity sauvan käyristymistä. Sauvakiertymän sijaan voidaan käyttää myös sauvan päiden  $i$  ja  $j$  poikittaissiirtymiä. Näin on tehty esimerkiksi lähteessä (Salmi & Kuula 2012). Voimasuureina ovat sauvanpäämomentit  $M_{ij}$  ja  $M_{ji}$  sekä sauvanpääleikkausvoimat  $Q_{ij}$  ja  $Q_{ji}$  (Kuvio 1).



Kuvio 1. Momenttimenetelmän siirtymä- ja voimasuureet.

## 3.2 Sauvanpääkiertymät

Momenttimenetelmän yhtälö sauvan  $i$ - $j$  sauvan alkupään  $i$  sauvanpääkiertymälle on

$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij}M_{ij} - \beta_{ij}M_{ji} + \psi_{ij} + \alpha_{ij}^0 \quad (4)$$

missä  $\alpha_{ij}$  ja  $\beta_{ij}$  ovat sauvan joustokertoimet ja  $\alpha_{ij}^0$  on kuormitustermi, joka huomioi sauvan poikkittaisen kuormituksen. Sauvan loppupään  $j$  sauvanpääkiertymän yhtälö saadaan yhtälöstä (4) vaihtamalla alaindeksien  $i$  ja  $j$  järjestystä.

Yhtälö (4) koostuu neljästä osasta, joista ensimmäinen kuvaa sauvan alkupään sauvanpäämomentin vaikutusta, toinen osa sauvan loppupään sauvanpäämomentin vaikutusta, kolmas osa sauvakiertymän vaikutusta ja viimeinen osa sauvan poikkittaisen kuormituksen vaikutusta sauvan alkupään  $i$  sauvanpääkiertymään.

## 3.3 Joustokertoimet ja kuormitustermi

Yhtälössä (4) esiintyvät joustokertoimet  $\alpha_{ij}$  ja  $\beta_{ij}$  riippuvat käytettävästä palkkiteoriasta. Tarkastellaan seuraavassa niiden johtamista Timoshenkon palkkiteorian tapauksessa. Erikoistapauksena saadaan joustokertoimet myös Euler-Bernoullin palkkiteorian saualle.

Annetaan aluksi sauvan alkupäälle  $i$  sauvanpäämomentti  $M_{ij}$  (Kuvion 2 vasemman-puoleinen tapaus). Tällöin sauvan taivutusmomentti on  $M(x) = M_{ij} - M_{ij}\frac{x}{L}$  ja leikkausvoima on  $Q(x) = -M_{ij}\frac{1}{L}$ . Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöihin (1) ja (2) ja huomioimalla tukiehdot  $v(0)=v(L)=0$ , saadaan kaksi tuntematonta integrointivakiota ratkaistua. Tämän jälkeen taipuman ja kiertymän lausekkeet ovat selvillä. Lopuksi kiertymälle sauvan alkupäässä saadaan laskemalla arvo

$$\varphi_{ij} = \left(\frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA}\right)M_{ij} \quad (5)$$

Ottamalla käyttöön saualle  $i$ - $j$  dimensioton suure  $\phi_{ij} = L^{-2}EI\sqrt{GA}$ , missä pituus ja jäykkyysuureet lasketaan ao. sauvan arvoilla, voidaan (5) esittää muodossa

$$\varphi_{ij} = (1 + 3\phi_{ij})\frac{L}{3EI}M_{ij} \quad (6)$$



Kuvio 2. Sauvan kuormituksena sauvanpäämomentit ja tasainen kuorma.

Annetaan seuraavaksi sauvan loppupäälle  $j$  sauvanpäämomentti  $M_{ji}$  (Kuvion 2 keskimäinen tapaus). Tällöin sauvan taivutusmomentti on  $M(x) = -M_{ji} \frac{x}{L}$  ja leikkausvoima on  $Q(x) = -M_{ji} \frac{1}{L}$ . Menettelemällä kuten edellä, saadaan kiertymälle sauvan alkupäässä arvo

$$\varphi_{ij} = -(1 - 6\phi_{ij}) \frac{L}{6EI} M_{ji} \quad (7)$$

Tarkastellaan lopuksi poikittaisen kuorman vaikutusta sauvan alkupään  $i$  sauvanpääkiertymään. Kuormitustapaukseksi on valittu tasainen kuorma (Kuvan 2 oikeanpuoleinen tapaus). Tällöin sauvan taivutusmomentti on  $M(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2$  ja leikkausvoima on  $Q(x) = \frac{1}{2}qL - qx$ . Kiertymälle sauvan alkupäässä saadaan differentiaaliyhtälöiden (1) ja (2) avulla arvoksi

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI} \quad (8)$$

Saaduista tuloksista voidaan todeta, että joustokertoimet ovat Timoshenkon palkkiteoriassa

$$\alpha_{ij} = (1 + 3\phi_{ij}) \frac{L}{3EI}, \quad \beta_{ij} = (1 - 6\phi_{ij}) \frac{L}{6EI} \quad (9)$$

Euler-Bernoullin palkkiteoriassa  $\phi_{ij} = 0$ , jolloin joustokertoimet pelkistyvät momenttimenetelmälle tyypillisiin arvoihin

$$\alpha_{ij} = \frac{L}{3EI}, \quad \beta_{ij} = \frac{L}{6EI} \quad (10)$$

Kuormitustermille saatiin edellä  $\alpha_{ij}^0 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI}$ . Kuormitustermi  $\alpha_{ij}^0$  kertoo ao. kuormituksen aiheuttaman sauvanpääkiertymän suuruuden sauvan alkupäässä ja kuormitustermi  $\alpha_{ji}^0$  sauvanpääkiertymän sauvan loppupäässä. Symmetriselle kuormitukselle  $\alpha_{ji}^0 = -\alpha_{ij}^0$ .

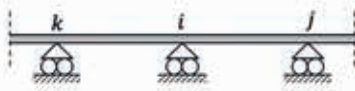
## 4 KOLMEN MOMENTIN YHTÄLÖ

### 4.1 Yhtälön johto

Tarkastellaan jatkuvan palkin välitukeen  $i$  liittyvien sauvojen sauvanpääkiertymiä. Kuvion 3 merkinnöillä ja kaavan (4) avulla niille saadaan

$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} - \beta_{ij} M_{ji} + \alpha_{ij}^0 \quad (11)$$

$$\varphi_{ik} = \alpha_{ik} M_{ik} - \beta_{ik} M_{ki} + \alpha_{ik}^0 \quad (12)$$



**Kuvio 3. Jatkuvan palkin välituki i ja sen viereiset sauvat.**

Koska sauvalla on yksikäsitteinen kiertymä välituella  $i$ , on siinä voimassa sauvanpääkiertymien välinen yhteensopivuusyhtälö

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ik} \quad (13)$$

Sauvalla on myös yksikäsitteinen taivutusmomentin arvo välituella  $i$ , joten lisäksi on voimassa sauvanpäämomenttien välinen tasapainoyhtälö

$$M_{ij} + M_{ik} = 0 \quad (14)$$

Sijoittamalla sauvanpääkiertymät (11) ja (12) yhteensopivuusyhtälöön (13), ottamalla huomioon momenttitasapainoyhtälö (14) ja järjestelemällä termejä saadaan

$$\beta_{ik}M_{ki} + (\alpha_{ik} + \alpha_{ij})M_{ij} - \beta_{ij}M_{ji} = \alpha_{ik}^0 - \alpha_{ij}^0 \quad (15)$$

Koska välituen  $j$  momenttitasapainoyhtälön mukaan on oltava  $M_{ji} = -M_{js}$ , saadaan yhtälö (15) lopulliseen muotoon

$$\beta_{ik}M_k + (\alpha_{ik} + \alpha_{ij})M_i + \beta_{ij}M_j = \alpha_{ik}^0 - \alpha_{ij}^0 \quad (16)$$

missä yksialaindeksiset momentit  $M_k, M_i$  ja  $M_j$  ovat suoraan jatkuvan palkin taivutusmomentit kyseisten välitukien kohdilla. Saatu tulos (16) on kolmen momentin yhtälö jatkuvan palkin analysointiin. Se käy yhtähyvin Timoshenkon palkille kuin Euler-Bernoulli palkille kunhan joustokertoimet huomioidaan käytettävän palkkiteorian mukaisesti.

Kun yhtälöä (16) sovelletaan päistään vapaasti tuetun jatkuvan palkin välituilla, saadaan aikaan yhtälöryhmä, josta palkin taivutusmomenttien arvot välituilla voidaan ratkaista. Saadun yhtälöryhmän kerroinmatriisin nolasta eroavat alkioit ovat keskittyneet matriisin lävistäjälle ja sen viereisiin paikkoihin.

## 4.2 Erikoistapaus

Kun tarkastellaan joustokertoimen  $\beta_{ij}$  kaavaa (9), huomataan että dimensiottoman suureen arvolla  $\phi_{ij} = 1/6$  joustokerroin häviää. Tässä tapauksessa yhtälöstä

(16) jää vastaava osa pois. Jos yhtälön (16) sekä  $\beta_{ik}$  että  $\beta_{ij}$  jäävät pois, päädytään yhtälöön, josta saadaan välittömästi ratkaistua taivutusmomentti  $M_i$  välituella  $i$ .

Käytännön palkkirakenteilla dimensiottoman suureen arvo  $1/6$  ei kuitenkaan ole realistinen. Se havaitaan, kun tarkastellaan dimensiottomaan suureeseen vaikuttavia tekijöitä esimerkiksi suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa. Kimmomoduulin ja leikkaus-moduulin suhde on  $\frac{E}{G} = 2(1 + \nu)$ , jäyhyysmomentin ja poikkileikkausalan suhde on  $\frac{I}{A} = h^2/12$  jolloin dimensiottomalle suureelle saadaan kaava

$$\phi_{ij} = \frac{EI}{L^2GA} = \frac{1+\nu}{6k} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (17)$$

missä  $\nu$  on materiaalin suppeuskerroin ja  $h$  on poikkileikkauksen korkeus. Kaavasta (16) havaitaan, että mitä suurempi on poikkileikkauksen korkeus verrattuna sauvan pituuteen, sitä suurempi vaikutus on sauvan dimensiottomalla suureella. Käytännössä sauvan pituus on huomattavasti suurempi kuin poikkileikkauksen korkeus, jolloin neliötermille saadaan pieni arvo, suuruusluokaltaan  $1/100$ . Neliötermin edessä oleva termi on suuruusluokaltaan ykkösen luokkaa.

## 5 LASKUESIMERKIT

Laskuesimerkeiksi on valittu kaksi palkkitehtävää, jotka havainnollistavat momentti-menettelyn soveltamista. Ensimmäinen esimerkki on hyvin yksinkertainen ulokepalkkitehtävä, jonka vapaassa päässä on pistekuorma. Toinen esimerkki on kolmiaukkoinen jatkuva palkki. Laskelmissa esitetään välivaiheiden pääkohdat ja lopputulokset.

### 5.1 Ulokepalkki

Kuvion 4 ulokepalkin tapauksessa taivutusmomentin jakauma voidaan helposti selvittää tasapainotarkastelulla. Näin sauvanpäämomentit ovat  $M_{12} = -FL$  ja  $M_{21} = 0$ . Sauvan alkupäässä kiertymää ei ole ja lisäksi sauva on sivusiirtävä, jolloin yhtälö (4) menee muotoon

$$\varphi_{12} = \alpha_{12}M_{12} + \psi_{12} = 0 \quad (18)$$

josta sauvakiertymälle saadaan helposti ratkaisuksi

$$\psi_{12} = -\alpha_{12}M_{12} = (1 + 3\phi_{12})\frac{FL^2}{3EI} \quad (19)$$

ja edelleen palkin taipumaksi vapaassa päässä

$$v_2 = L\psi_{12} = (1 + 3\phi_{12}) \frac{FL^3}{3EI} \quad (20)$$



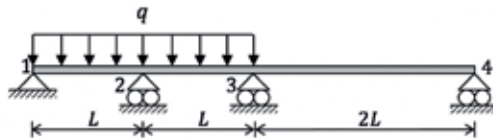
Kuvio 4. Pistekuormitettu ulokepalkki.

## 5.2 Kolmiaukkoinen jatkuva palkki

Kuvion 5 kolmiaukkoisen jatkuvan palkin tapauksessa on voimassa sauvanpäämomenttien osalta palkin päissä  $M_{1,2} = M_{4,3} = 0$ . Soveltamalla kolmen momentin yhtälöä (16) palkin välituilla, pisteissä 2 ja 3, saadaan seuraavat yhtälöt palkin momenttien  $M_2$  ja  $M_3$  ratkaisemiseksi

$$(\alpha_{21} + \alpha_{23})M_2 + \beta_{23}M_3 = \alpha_{21}^0 - \alpha_{23}^0 \quad (21)$$

$$\beta_{32}M_2 + (\alpha_{32} + \alpha_{34})M_3 = \alpha_{32}^0 \quad (22)$$



Kuvio 5. Kolmiaukkoinen jatkuva palkki.

Edellä joustokertoimet ovat

$$\alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = (1 + 3\phi_{21}) \frac{L}{3EI}, \quad \beta_{23} = \beta_{32} = (1 - 6\phi_{23}) \frac{L}{6EI} \quad (23)$$

sekä

$$\alpha_{34} = (1 + 3\phi_{34}) \frac{2L}{3EI} \quad (24)$$

ja kuormitustermit ovat

$$\alpha_{23}^0 = -\alpha_{21}^0 = -\alpha_{32}^0 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI} \quad (25)$$

Valitaan palkiksi teräspalkki IPE 300, jonka  $E=210$  GPa,  $G=81$  GPa,  $I=8356 \cdot 10^4$  mm<sup>4</sup>,  $A=5380$  mm<sup>2</sup>,  $k \approx \frac{A_w}{A} = 0,4033$  ja  $L=5,0$  m. Kuormitus on  $q=60$  kN/m. Taulukossa 1 on esitetty laskentatulokset taiputusmomenteille välituilla sekä



tukireaktioille laskettuna sekä Timoshenkon palkkiteorialla (lyhenne Tim) että Euler-Bernoullin palkkiteorialla (lyhenne E-B).

**Taulukko 1. Laskentatulokset taivutusmomenteille ja tukireaktioille.**

	$M_2$	$M_3$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
Tim	-177,209 kNm	-33,472 kNm	114,558 kN	364,189 kN	124,600 kN	-3,347 kN
E-B	-179,348 kNm	-32,609 kNm	114,130 kN	365,217 kN	123,913 kN	-3,261 kN

## 6 JOHTOPÄÄTÖKSET

Timoshenkon palkkiteoria ottaa huomioon myös leikkausmuodonmuutosten vaikutuksen. Se kuvaa palkin toimintaa tarkemmin kuin tavanomainen Euler-Bernoullin palkkiteoria. Momenttimenetelmä on eräs perinteisen staattisesti määräämättömien sauvarakenteiden ratkaisumenetelmä, jonka yhtälöt sauvanpääkiertymille esitetään yleensä perustuen Euler-Bernoullin palkkiteoriaan. Artikkelissa esitettiin, miten sauvanpääkiertymien yhtälöitä muokataan niin että ne huomioivat myös Timoshenkon palkkiteorian. Momenttimenetelmän yhtälöistä johdettiin edelleen kolmen momentin yhtälöt jatkuvan palkin analysointiin. Saatuja yhtälöitä sovellettiin kahden palkkitehtävän ratkaisussa.

## LÄHTEET

Beer, F. P. & Johnston, E. R. Jr. 1992. Mechanics of materials. 2. ed. New York: McGraw-Hill.

Reivinen, M. & Salonen, E.-M. 1994. Palkin poikkiopin siirtymäkertoimesta. Rakenteiden mekaniikka 27 (2), 30 - 40.

Salmi, T. & Kuula, K. 2012. Rakenteiden mekaniikka. Tampere: Pressus.