

Metropolia Ammattikorkeakoulu  
Maanmittaustekniikan koulutusohjelma

**Ville Jussila**

**Stop & Go Scanning -menetelmän virhelähteet ja niiden  
vaikutus mittaustuloksen tarkkuuteen**

Insinööriö 20.4.2009

Ohjaaja: mittauspäällikkö Martti Mikkonen  
Ohjaava opettaja: yliopettaja Vesa Rope

Tekijä Otsikko	Ville Jussila Stop & Go Scanning-menetelmän virhelähteet ja niiden vaikutus mittaustuloksen tarkkuuteen
Sivumäärä Aika	71 sivua 20.4.2009
Koulutusohjelma	maanmittaustekniikka
Tutkinto	insinööri (AMK)
Ohjaaja Ohjaava opettaja	mittauspäällikkö Martti Mikkonen yliopettaja Vesa Rope
<p>Insinööriyössä tutkittiin Stop &amp; Go Scanning -menetelmässä ilmeneviä virhelähteitä ja niiden vaikutusta menetelmän mittaustuloksen tarkkuuteen. Stop &amp; Go Scanning on liikkuvan laserkeilaimen sovellus, jossa pistepilven tuottaminen tapahtuu ajoneuvon ollessa pysähdyksissä. Menetelmä eroaa muista liikkuvan laserkeilauksen sovelluksista siten, että siinä ei ole satelliittipaikannukseen tai inertiajärjestelmään perustuvaa paikannusmenetelmää, vaan ajoneuvon on kiinnitetty 4 kpl tähyksiä, jotka kartoitetaan takymetrillä ajoneuvon ollessa pysähdyksissä ja suorittaessa keilausta. Näin menetelmää voidaan käyttää peitteisessä maastossa, korkeiden rakennusten läheisyydessä tai maan alla.</p> <p>Työssä tutustuttiin laitevalmistajien antamiin mittaustarkkuuksiin takymetrin, heijastinprismojen ja laserkeilaimen osalta. Virhelähteiden syyt pyrittiin selvittämään tarkasti, kuitenkin syventymättä niihin perinpohjaisesti. Työssä myös tutustuttiin erilaisten laserkeilainten ominaisuuksiin ja mittaustapoihin.</p> <p>Valmistajien ilmoittamista laitteiden mittaustarkkuudesta muodostettiin laserkeilaimella mitatun pisteen sijainnin keskihajonnat takymetrillä käytössä olevaan taso- ja korkeuskoordinaatistoon neljässä eri tapauksessa. Ensimmäisessä tapauksessa (1) ajoneuvo oli 200 metrin päässä ja keilaus ajoneuvon eteen. Toisessa tapauksessa (2) ajoneuvon etäisyys oli 200 metriä ja keilaus tapahtui nyt alueen reunalle. Kolmannessa tapauksessa (3) etäisyys ajoneuvon oli 10 metriä ja keilaus tapahtui ajoneuvon eteen. Neljännessä tapauksessa (4) ajoneuvo oli 10 metrin etäisyydellä ja keilaus tapahtui keilausalueen reunalle. Keilausetäisyys ajoneuvon eteen oli 2,8 metriä ja keilausalueen reunalle 20,2 metriä. Laskentojen perustana käytettiin satunnaisvirheiden kasautumislakia, jonka pääkohtia selvitettiin työssä. Saaduille tuloksille muodostettiin myös todennäköisyydet tilastomatematiikkaan perustuen.</p> <p>Saatujen tulosten perusteella todettiin, että Stop &amp; Go Scanning -menetelmällä päästään alle 10 mm taso- ja korkeussijaintitarkkuuteen. Näin ollen se soveltuu käytettäväksi Moottoritie E18 välillä Lohja–Muurla -hankkeen päällysrakennekerroksen korkeuden mittaukseen.</p>	
Hakusanat	Stop & Go Scanning, satunnaisvirheen kasautuminen, laserkeilain, takymetri, kojevirheet, liikkuva laserkeilain, sijainnin keskihajonta

Author Title	Ville Jussila Stop & Go Scanning applications sources of the errors and their effect on the measuring precision
Number of Pages Date	71 20 April 2009
Degree Programme	Land Surveying
Degree	Bachelor of Engineering
Instructor Supervisor	Martti Mikkonen, Surveying Manager Vesa Rope, Principal Lecturer
<p>The purpose of this final year project was to find out sources of the errors in Stop &amp; Go Scanning and their effect on the result of measurement precision. Stop &amp; Go Scanning is an application of a moving laser scanner, where production of point clouds takes places when the vehicle is stationary. The application differs from other applications of moving laser scanners in that its positioning method does not base on GNSS or inertia-based system. There are four reflectors which have been added to the vehicle. The reflectors are mapped out with total station when the vehicle is stationary and carries out laser scanning. Thus, the method can be used on covered terrain, in the vicinity of tall buildings or under ground.</p> <p>In this project an effort was made to understand precision of the total station, the reflectors and the laser scanner based on information gathered from different manufacturers. Also, an effort was made to locate the sources of the errors accurately and find solutions for these problems. In addition, the various characteristics of laser scanners and measurement methods are explained.</p> <p>Finally, the law of the variance-covariance propagation and the computations based on it were introduced. Also, probabilities regarding the final result were formed by using principals of statistics.</p> <p>Uncertainties of equipments were used to compute standard deviation of the points produced by laser scanner. Points' uncertainties were dealt in total stations' plain and height coordinate systems in four different cases.</p> <p>The compute results of this study proved that Stop &amp; Go Scanning achieves less than 10 mm precision in plain and height position. Thus, it fulfills its purpose of use in Highway E18 between Lohja and Muurla project measuring the height of the superstructure.</p>	
Keywords	Stop & Go Scanning, the law of the variance-covariance propagation, laser scanner, total station, moving laser scanner, uncertainty of position

# Sisällys

Tiivistelmä  
Abstract

1 Johdanto .....	6
2 Stop & Go Scanning.....	8
2.1 Menetelmäkuvaus .....	8
2.2 Ajoneuvon ja kehikon tiedot.....	11
2.3 Käyttökohteet ja muunneltavuus .....	12
2.4 Laitetiedot .....	13
2.4.1 Takymetri .....	13
2.4.2 Tähykset .....	14
2.4.3 Laserkeilain .....	15
3 Takymetri .....	17
3.1 Takymetrin kehitys .....	17
3.2 Takymetrin vaaka- ja pystykulmat .....	17
3.3 Elektro-optinen etäisyysmittaus.....	18
3.3.1 Amplitudimoduloitu .....	19
3.3.2 Pulssimoduloitu.....	20
3.3.3 Etäisyysmittauksen epävarmuus .....	21
3.4 Elektroninen kulmanmittaus .....	21
3.4.1 Kulmanmittauksen periaate ja kulmakehien rakenne .....	21
3.4.2 Kulmanmittauksen epävarmuus .....	23
3.5 Koordinaattien määrittäminen .....	24
3.5.1 Vaakaetäisyys.....	24
3.5.2 Säteittäinen mittaus .....	24
3.5.3 Trigonometrinen korkeuden mittaus .....	25
3.5.4 Pistein koordinaatit.....	26
4 Tähykset .....	27
4.1 Heijastinprisma .....	27
4.2 Prisman nollapistevirhe .....	27
4.3 Kohdistuksen epävarmuus .....	28
5 Laserkeilain .....	29
5.1 Laserkeilaimen ero takymetriin .....	29
5.2 Jaottelu käyttötarkoituksen mukaan .....	30
5.3 Jaottelu toimintaperiaatteen mukaan .....	31
5.4 Jaottelu etäisyysmittauksen mukaan.....	34
5.4.1 Pulssilaser (Pulse time of Flight) .....	34
5.4.2 Vaihe-ero (Jatkuva-aaltainen laser) .....	35
5.4.3 Yhteenveto .....	35
5.5 Pistein mittaaminen.....	36
5.6 Laserkeilaimen tarkkuuteen vaikuttavat ominaisuudet .....	37
5.7 Laserkeilaimen yleiset ominaisuudet.....	38

5.8 Signaalin intensiteetti.....	39
6 Virheiden luonne ja kasautuminen .....	40
6.1 Virhelajit .....	40
6.2 Satunnaisvirheen kasautuminen.....	41
6.3 Satunnaisvirheen kasautumislaki.....	42
7 Epävarmuuden tutkiminen satunnaisvirheen kasautumislain avulla.....	46
7.1 Pisteiden epävarmuuden määrittämisen periaate.....	46
7.2 Takymetrillä mitattujen prismojen sijainnin epävarmuus .....	46
7.3 Laserkeilattujen pisteiden sijainnin epävarmuus .....	47
8 Epävarmuuden luotettavuuden havainnollistaminen.....	49
8.1 Todennäköisyydet.....	49
8.2 Pisteen sijainnin epävarmuuden osoittaminen.....	50
8.3 Pistekeskivirhe .....	51
8.4 Kojeen tarkkuuden tutkiminen .....	53
9 Tulokset .....	54
9.1 Laskennan periaate .....	54
9.2 Laskennan tulokset .....	55
9.3 Tuloksien toistettavuus .....	55
10 Yhteenveto .....	56
Lähteet .....	58
Liitteet	
Liite 1: LaserControl-ohjelman tiedosto tähysten sijainnista keilaimen koordinaatistossa.....	60
Liite 2: LaserControl-ohjelman esimerkkitiedosto pistepilvien kääntämisestä KKJ:ään takymetrillä kartoitettujen tähysten avulla.....	61
Liite 3: Laskennan välivaiheet; ajoneuvo 200 metrin päässä takymetristä.....	65
Liite 4: Laskennan välivaiheet; ajoneuvo 10 metrin päässä takymetristä.....	67
Liite 5: Laskennan välivaiheet; Laserkeilaukset .....	69
Liite 6: Laskennan välivaiheet; Yhdistetyt tulokset.....	71

# 1 Johdanto

Tämän insinööriyön tarkoitus on tarkastella Stop & Go Scanning -menetelmällä muodostettujen pistepilvien pisteiden sijainnin epävarmuuden suuruutta. Sijainnin epävarmuutta on tarkasteltu menetelmässä käytettävien geodeettisten mittalaitteiden satunnaisvirheiden kannalta. Työssä on myös pyritty selittämään mahdollisimman hyvin virhelähteiden alkuperä. Mahdolliset sääkorjaukset on jätetty huomioimatta ja käytetty runkoverkko on oletettu virheettömäksi.

Insinööriyö toimii samalla todistuksena Stop & Go Scanning -menetelmällä saavutettavasta tarkkuudesta. Stop & Go Scanning on oululaisen rakennusmittausyrityksen Mitta Oy:n ja Lemminkäinen-konserniin kuuluvan yhdyskuntarakentamiseen keskittyneen Lemminkäinen Infra Oy:n vuonna 2007 aloittama hanke, jossa perinteinen maalaserkeilain on yhdistetty liikkuvaan alustaan.

Suomen valtakunnan tieliikenneverkkoa hallinnoiva ja ylläpitävä Tiehallinto on pyytänyt laitteen kehittäjiä tarkastelemaan menetelmällä saatujen pisteiden sijainnin epävarmuuksia. Tarkastelun avulla pyritään määrittämään, täyttääkö menetelmä sille annetut tarkkuusvaatimukset Moottoritie E18 välillä Lohja–Muurla -hankkeen päällysrakennekerroksen korkeuden mittauksessa. Tiehallinnon asettama korkeustarkkuusvaatimus on 15 mm.

Stop & Go Scanning -menetelmä on toteutettu Mitta Oy:n toimesta. Menetelmässä käytössä olevat geodeettiset mittalaitteet ja ajoneuvo ovat heidän omistuksessaan. Mitta Oy on myös kehittänyt menetelmää uusiin kohteisiin ja tarkoituksiin soveltuvaksi. Tämä insinööriyö tulee myös Mitta Oy:n käyttöön heidän markkinoidessaan menetelmää uusiin mittauskohteisiin.

Tarve menetelmän kehittämiseen on tullut Tiehallinnon tilaaman Moottoritie E18 välillä Lohja–Muurla -hankkeen yhteydessä. Projektissa rakennettiin uutta kaksiajorataista moottoritietä 67 kilometriä. Stop & Go Scanning -menetelmällä suoritettiin

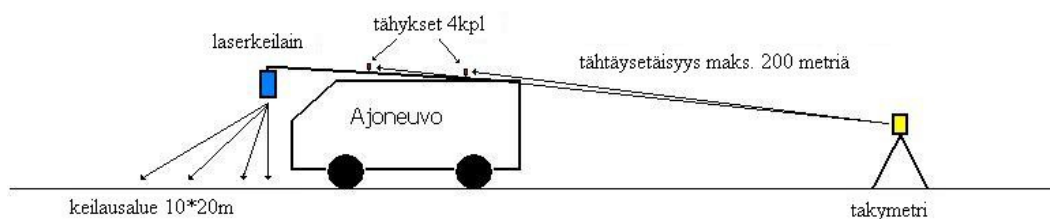
päällysrakennekerroksen korkeusaseman mittaaminen. Menetelmä korvasi perinteisen takymetrikartoituksen. Tulevaisuudessa menetelmälle on käyttöä ainakin Moottoritie E18:n painuman tarkkailussa.

## 2 Stop & Go Scanning

### 2.1 Menetelmäkuvaus

Stop & Go Scanning on liikkuvan laserkeilaimen sovellus, missä pistepilven tuottaminen tapahtuu liikkuvan alustan ollessa pysähdyksissä. Mittaustapahtuma on nopea verrattuna normaaliin terestriaalisen laserkeilaukseen, jossa keilainta joudutaan siirtämään paikasta toiseen. Ilma-aluksesta tapahtuvaan laserkeilaukseen verrattuna Stop & Go Scanning ei ole yhtä nopea, mutta saatu pisteaineisto on huomattavasti tarkempaa, noin kertaluokkaa suurempi. Pisteiden lukumäärä ja pistetiheys ovat myös suurempia. Menetelmän käyttäessä paikannukseen muuta kuin satelliittipaikannusta ja inertiajärjestelmää voidaan sitä käyttää myös peitteisessä maastossa, kaupunkialueella tai maan alla.

Menetelmä eroaa normaalista maalaserkeilauksesta siinä, että laserkeilain ja mittausdatan rekisteröimiseen ja yhdistämiseen tarvittavat heijastinprismat on sijoitettu ajoneuvon katolla olevaan kehikkoon. Normaalissa laserkeilauksessa joudutaan keilausalueelle asettelemaan tähyksiä ja kartoittamaan ne takymetrillä. Menetelmän nimen mukaisesti laserkeilaus tapahtuu ajoneuvon ollessa pysähdyksissä. Samoin heijastinprismojen kartoitus operaattorin toimesta auton sisältä etäkäytössä olevalla takymetrillä (kuva 1). Laserkeilauksen ja prismojen kartoituksen suorittuaan ajaa operaattori ajoneuvo uuteen asemaan.



Kuva 1. Stop & Go Scanning -menetelmän periaate.



Ajoneuvon katolle on rakennettu kiilamainen kehikko, johon laserkeilain ja heijastinprismat on asennettu. Keilain on kehikon kärjessä ylösalaisin ja sen tähtäysakseli on 2,8 metrin korkeudelle maanpinnasta. Heijastinprismat on asetettu kahteen riviin kehikon keski- ja takaosaan. Vierekkäiset heijastinprismat ovat 3,0 metrin etäisyydellä ja prismarivit 3,6 metrin etäisyydellä toisistaan. Neljä prismaa muodostaa näin suorakaiteen. (Kuva 2.)



*Kuva 2. Laserkeilaimen ja tähysten sijoittelu.*

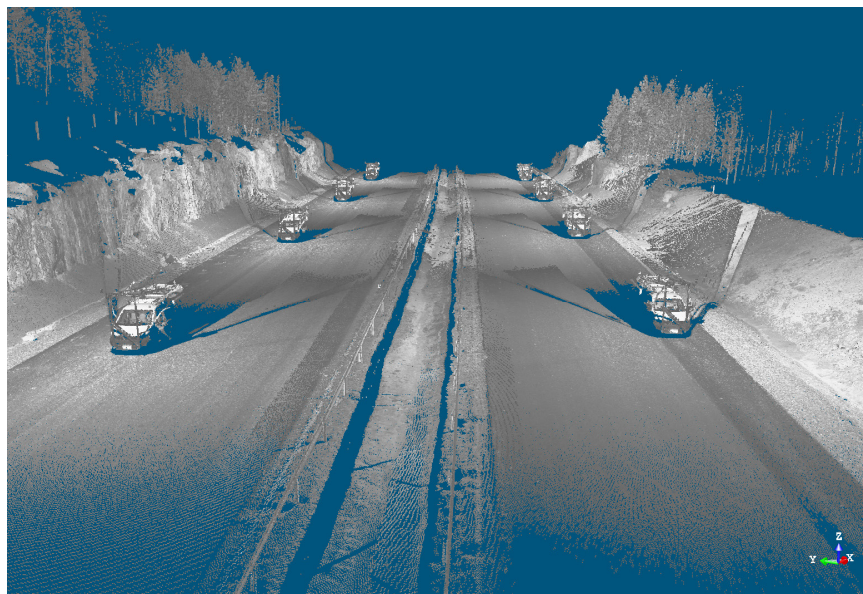
Prismojen keskinäisen sijoittelun ja tästä muodostuvan huonon orientointiverkon geometrian takia on laserkeilausalueeksi määritelty auton etupuolella oleva 20 metriä \* 10 metriä alue. Alue käsittää mittauksen välisen etenemän ja päällysrakennekerroksen leveyden. Laserkeilaus ja prismojen kartoitus suoritetaan näin 20 metrin välein. Takymetrin mittausetäisyys on rajattu 200 metriin, joten yhdeltä kojeasemalta voidaan mitata maksimissaan 400 metriä yhtä kaistaa. Tosin tien mahdolliset kaarteet ja mutkat voivat asettaa poikkeuksia.

Perinteisessä laserkeilauksessa mittausalueelle sijoitellaan tähyksiä, joiden sijainti määritetään paikalliseen koordinaatistoon orientoidulla takymetrillä. Tähyksien sijaintitiedon avulla saatu pistepilvi käännetään haluttuun koordinaatistoon. Stop & Go Scanning -menetelmässä keilausalueelle ei sijoitella tähyksiä, vaan saatu pistepilvi käännetään haluttuun koordinaatistoon kehikossa olevien heijastinprismojen avulla, joiden koordinaatit laserkeilaimen koordinaatistossa on tunnetut ja vakiot jokaisessa keilauksessa (kuva 3).



Kuva 3. Pistepilvien kääntäminen tähysten avulla.

Jokaiseen keilauksesta saatuun pistepilveen ladataan LaserControl-ohjelmalla tiedosto (liite 1), joka sisältää heijastimien x-, y- ja z-koordinaatit keilaimen koordinaatistossa. Samalla ohjelmalla suoritetaan pistepilven kääntäminen paikalliseen koordinaatistoon, lataamalla ohjelmaan tiedosto (liite 2), jossa tähysten koordinaatit ovat paikallisessa koordinaatistossa. Samalla saadaan yhdistettyä laserkeilausaineisto koko alueen kattavaksi pistepilveksi (kuva 4).



*Kuva 4. Stop & Go Scanning -menetelmällä saatuja yhdistettyjä pistepilviä.*

## **2.2 Ajoneuvon ja kehikon tiedot**

Stop & Go Scanning -menetelmän liikkuvana alustana toimii Volkswagen Transporter vm. 2002. Kehikko, johon aktiiviprismat ja laserkeilain on kiinnitetty, on valmistettu 80 \* 120 mm:n alumiinikotelopalkista. Kehikon keskelle on asetettu puolipallon muotoinen tähyys, jonka avulla seurataan laserkeilaimen ja kehikon painosta johtuvaa kehikon taipumaa. Taipumaa tarkkaillaan laserkeilausaineistosta saadulla tähyksen sijainnin ja sen todellisen sijainnin koordinaattierotuksella. Taipumaa ei tosin ole havaittu tapahtuvan. Kehikko on tuettu auton etupuskurin päältä tienpintaan umpikumipyörillä liikkumisen estämiseksi. (Kuva 5.)



*Kuva 5. Käytetty ajoneuvo ja kehikko.*

### **2.3 Käyttökohteet ja muunneltavuus**

Stop & Go Scanning -menetelmä soveltuu käytettäväksi taajama- ja kaupunkialueiden maastomallien tuottamiseen, tiealueiden maastomallien ja vauriokartoitusten tekemiseen ja yhdyskuntarakentamisessa eri rakennekerrosten laadunvalvontaan ja tarkastusmittauksiin. Menetelmä soveltuukin hyvin kohteisiin, joissa mobiili- tai helikopteriskannauksella saatava sijaintitarkkuus ei ole riittävä, eli noin alle 20 mm.

Stop & Go Scanning -menetelmällä on mitattu Moottoritie E18 välillä Lohja–Muurla -hankkeessa rakennettu päällysrakennekerros. Myöhempanä ajankohtana on tarkoitus mitata valmistunut moottoritie uudelleen mahdollisten painumien tutkimiseksi.

Keväällä 2009 Stop & Go Scanning -menetelmää käytetään Jyväskylässä rautatietunneleiden mittaukseen. Mitattavaa tunnelia on yhteensä 8 kilometriä, ja se joudutaan mittaamaan kolmeen otteeseen saneeraustyön erivaiheissa. Menetelmä on muutettu ajoneuvon katolta toimivasta kiskoilla liikkuvaksi yksiköksi (kuva 6).



*Kuva 6. Stop & Go Scanning -menetelmän muunneltavuus. Rautatietunneleiden kartoitukseen suunniteltu alusta.*

## 2.4 Laitetiedot

### 2.4.1 Takymetri

Heijastinprismojen mittaamiseen käytetään Trimble Ltd:n valmistamaa Trimble S6 High Precision -takymetriä (kuva 7). Takymetrin laitetiedot on esitetty taulukossa 1.

*Taulukko 1. Trimble S6 HP -takymetrin laitetiedot (17, s. 2).*

	$\sigma$ (valm. ilm.)	$\sigma_{200\pm}$ (mm)
kulmanmittaustarkkuus	1"	0,97
etäisyysmittaustarkkuus	1mm + 1ppm	1,02



*Kuva 7. Trimble S6 -takymetri (1).*

## 2.4.2 Tähykset

Heijastinprismoina toimivat Trimble Ltd:n kehittämät MultiTrack Target -aktiiviprismat (kuva 8). Aktiiviprismojen käytettäessä takymetri kykenee kohdistumaan automaattisesti oikeaan heijastinprismaan.

Kohdistustarkkuus: < 2 mm / 200 m.

- Kohdistamistarkkuus on lineaarinen

(17, s. 2.)



Kuva 8. MultiTrack Target -aktiiviprisma (1).

### 2.4.3 Laserkeilain

Pistepilvet tuotetaan Zöller & Fröhlich GmbH:n ZF Imager 5006 vaihe-ero terestriaalilaserkeilaimella (kuva 9). Laserkeilain käyttää kupolimaista mittaustapaa ja pyörivää vinopeilisovellusta. Laserkeilaimen mittaustarkkuudet on lueteltu taulukossa 2. Taulukkoon on myös laskettu epävarmuuksien vaikutus 25 metrin etäisyydellä.

Taulukko 2. Laserkeilaimen laitetiedot (20, s. 1–2).

	$\sigma$ (valm. llm.)	$\sigma_{25\pm}$ (mm)
etäisyysmittaustarkkus	< 3 mm / 25 m	3,00
kulmanmittaustarkkuus:		
<i>vaakakulma (V)</i>	0,007°	3,05
<i>pystykulma (Hz)</i>	0,007°	3,05
mittaussäteen hajoamiskulma	0,22mrad	5,50
kulmaresulaatio:		
<i>vaakakulma (V)</i>	0,0018°	0,79
<i>pystykulma (Hz)</i>	0,0018°	0,79

Laserkeilaimen muut ominaisuudet ja tiedot ovat taulukossa 3.

*Taulukko 3. Laserkeilaimen yleiset tiedot (20, s. 1–2).*

mittaustaajuus	Middle: 22 milj. Pistettä
mittausaika (Middle)	1 min 40 sek
mittauskulma:	
<i>vaakakulma (V)</i>	360°
<i>pystykulma (Hz)</i>	310°
etäisyysmittauksen toistettavuus	< 1 mm / 50 m
mittauksen hajonta:	
<i>kohteen heijastuvuus 10 % (must.)</i>	3,0 mm
<i>kohteen heijastuvuus 20 % (harm.)</i>	2,0 mm
<i>kohteen heijastuvuus 100 % (valk.)</i>	1,0 mm



*Kuva 9. Imager 5006 -laserkeilain (21).*



## 3 Takymetri

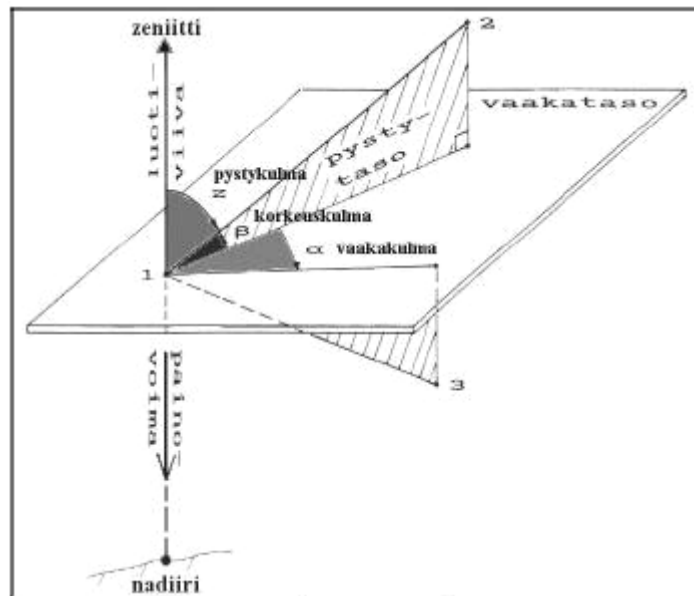
### 3.1 Takymetrin kehitys

Takymetri on nykyaikainen geodeettinen mittauskoje, jonka avulla havaitaan pysty- ja vaakakulmia, sekä mitataan vinoetäisyyksiä kohteeseen elektro-optisen etäisyydenmittauksen avulla (13, s. 102). Nykyisissä takymetreissä on myös sisäinen tietokone, jonka avulla havaituista suureista voidaan laskea koordinaatteja, korkeuksia ja muita suureita, sekä tallentaa mitatut tiedot. Aikaisemmin erilliset maastotallennin ja maastotietokone löytyvätkin nykyään takymetreistä itsestään. (14, s. 229.)

Nykyaikaiset takymetrit syntyivät yhdistämällä teodoliitti ja elektro-optinen etäisyydenmittauslaite (13, s. 102). Aikaisemmin takymetrimittaus vaati kaksi ihmistä operointiin, mutta nykyään takymetrit toimivat mittausrobotteina, joiden hallinnoimiseen tarvitaan vain yksi ihminen. Takymetreillä voidaan myös suorittaa laserskannausta ja ottaa valokuvia mitattavasta kohteesta. (14, s. 282–286.)

### 3.2 Takymetrin vaaka- ja pystykulmat

Takymetrin vaakakulmalukema ( $\alpha$ ) on kahden vaakakehähavainnon erotus. Normaalisti ( $\alpha$ ) on orientoinnissa saadun nollasuunnan, eli karttapohjoissuunnan ja kohteen tähtäyssuunnan välinen ero. Vaakakulmalukema luetaan kojeen vaakatasossa sijaitsevalta vaakakehältä. Pystykulma ( $z$ ) on luotiviivan ja tähtäyskaukoputken tähtäysakselin välinen kulma. Pystykulmalukema luetaan pystykehältä. Toisinaan on käytettävä korkeuskulmaa ( $\beta$ ), joka on vallitsevan vaakatason ja tähtäysakselin välinen kulma (Kuva 10). (14, s. 53–54.)



Kuva 10. Takymetrin vaaka- ja pystykulmat (14, s. 54).

### 3.3 Elektro-optinen etäisyysmittaus

Takymetrillä tapahtuva etäisyyden määrittäminen perustuu elektro-optiseen etäisyysmittaukseen. Mittausalgoritmeja on kaksi; amplitudimoduloitu ja pulssimoduloitu mittaussignaali. Yleisimmin takymetrit käyttävät amplitudimoduloitua mittaussignaalia, jota käytetään mitattaessa heijastinprismaan. Mitattaessa kohteen pintaan käytetään pulssimoduloitua mittaussignaalia. (14, s. 235–236.)

Pulssimoduloidussa mittauksessa kanta-aallonpituus käytetään näkyvää valoa, jonka aallonpituus on 550-630 nm. Amplitudimoduloidussa mittauksessa taas kanta-aallon muodostaa ihmissilmälle näkymätön infrapunainen valo, jonka aallonpituus on 900 nm. Aallonpituuden puolikasta kutsutaan yksikköjanaksi. (14, s. 235.)

### 3.3.1 Amplitudimoduloitu

Etäisyysmittaus tapahtuu vaihe-eromittauksella. Mittauksessa lasketaan signaalin edestakaisin kulkemaan matkaan sisältyvien kokonaisten aallonpituuksien lukumäärä ja osa-aallonpituuden suuruus eli vaihe-ero. Osa-aallonpituuksia havaitaan, koska harvemmin etäisyys on aallonpituuden kokonaislukukerrannainen. (Kuva 11.) Aallonpituudet ja osa-aallonpituus lasketaan ns. pulssilaskimella. (14, s. 236.)

Mittaus aloitetaan karkealla mittauksella, jossa käytetään niin pitkää yksikköjanoa, että osa-aallonpituus määrittää mitattavan matkan yksikäsitteisesti. Tämän jälkeen aallonpituutta lyhennetään vaiheittain. Lopullinen mittaus, eli hieno mittaus suoritetaan mahdollisimman lyhyellä yksikköjanoalla. Vaihe-ero mittaukseen kuluu takymetreiltä useita sekunteja ja sen antama lopputulos on keskiarvo sadoista mittauksista. Mittausetäisyys ( $D$ ) muodostetaan kaavalla

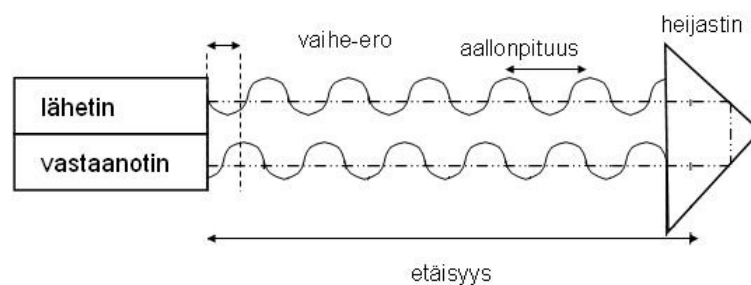
$$D = \frac{n * \lambda + \Delta\varphi}{2} \quad (1)$$

$\Delta\varphi$  on vaihe-ero

$\lambda$  on aallonpituus

$n$  on aallonpituuksien lukumäärä

Saatujen yksikköjanojen ja osa-aallonpituuksien lukumäärä tulee jakaa kahdella (2), jotta saadaan matka kohteeseen. Muuten saatu matka on edestakainen. (3, s. 2.)



Kuva 11. Amplitudimoduloitu mittausalgoritmi.

### 3.3.2 Pulssimoduloitu

Menetelmä on yksinkertaisempi kuin amplitudimoduloitu mittausta. Mittausalgoritmi perustuu mittaussignaalin kulkuajan määrittämiseen. Mittausignaalin kulkiessa valonnopeudella ( $c = \sim 300\,000\text{ km/s}$ ) vaaditaan takymetriltä erityisen tarkkaa kellolaitetta, joka havaitsee signaalin käyttämän ajan kohteeseen ja takaisin. (3, s. 1; 14, s. 236.)

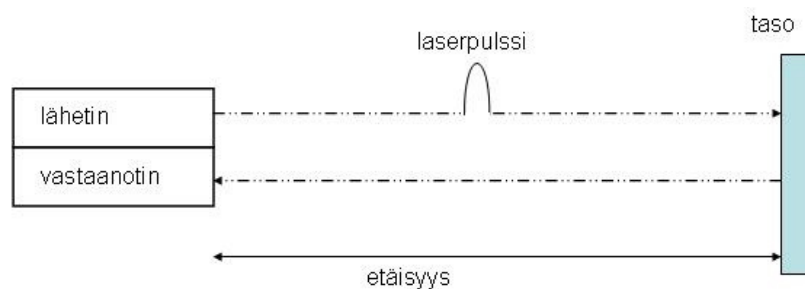
Pulssimoduloidussa mittaussignaalin etäisyysmittari lähettää lyhytkestoisen valopulssin kohteeseen (kuva 12), jonka kulku-aika mitataan ja muunnetaan matkaksi ( $D$ ) kaavalla

$$D = c * \frac{T}{2} \quad (2)$$

*T on mitattu pulssin kulku-aika*

*c on valonnopeus*

Mitattu pulssin kulku-aika ( $T$ ) tulee jakaa kahdella (2), jotta saadaan aika kohteeseen, eikä edestakainen aika. (3, s. 1.)



Kuva 12. Pulssimoduloitu mittausalgoritmi.

### 3.3.3 Etäisyysmittauksen epävarmuus

Elektro-optisen etäisyysmittauksen epävarmuus on nykyisillä takymetreillä yleensä 1–5 mm. Laitevalmistajat antavat mittauksen tarkkuuden muodossa,

$$a \text{ mm} + b \text{ ppm}$$

jossa  $a$  on etäisyydestä riippumaton osa ja  $b$  on etäisyyden kerrannainen, jonka yksikkö on ppm (parts per million,  $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$ ). Matkasta riippumattomaan epävarmuuteen ( $a$ ) vaikuttavat elektro-optinen etäisyysmittaus ja kojeen sisäinen nolapistevirhe.

Etäisyyden kerrannaisen epävarmuus ( $b$ ) liittyy refraktiokertoimen (sääkorjauksen) ja mittaustaajuuden vaihteluihin. (14, s. 237.)

$a$  ja  $b$  ovat satunnaisvirheitä ja etäisyyshavainnon arvioitu keskiarvo ( $\sigma$ ) saadaan satunnaisvirheiden yhdistämissäännön perusteella

$$\sigma = \sqrt{a^2 + (b * L)^2} \quad (3)$$

*a on etäisyydestä riippumaton epävarmuus (sääkorjaus)*

*b on etäisyyden kerrannainen*

*L on mittausetäisyys*

(13, s. 38; 14, s. 237.)

## 3.4 Elektroninen kulmanmittaus

### 3.4.1 Kulmanmittauksen periaate ja kulmakehien rakenne

Takymetrin pysty- ja vaakakehän kulmanmittaus suoritetaan automaattisesti perinteiseen teodoliittiin verrattuna. Kulmanmittaus tapahtuu sähköisesti kulmakehiltä,

jotka rakentuvat vuorotellen valoa läpäisevistä ja ei-läpäisevistä samanlevyisistä väleistä, jakoviivoista. Kulma- eli jakokehiä kutsutaan myös inkrementaalikehiksi. Takymetriä käännettäessä pysty- tai vaakakehän ympäri laskee anturi, pulssilaskin, ohitettujen jakoviivojen lukumäärän ja muuntaa saadun arvon kulman lukuarvoksi. (14, s. 233.)

Takymetrit jaotellaan sekunti- ja minuuttikojeiksi perustuen antureiden lukumäärään jakokehällä. Minuuttikojeissa jakokehällä on vain yksi anturi, kun sekuntikojeissa antureita on kaksi tai useampia. Minuuttikojeissa kulmanmittauksen tarkkuus on huonompi, kun jakokehiltä ei saada kuin yksi arvo, jota ei voida vertailla mihinkään. Sekuntikojeissa eli diametrikokeissa on kaksi anturia jakokehän vastakkaisilla puolilla. Molemmat anturit laskevat oman kulmalukemansa, joiden keskiarvona saadaan tähtäyssuunnan kulmalukema. (4, s. 41.)

Diametrisessä kulmanluvussa saadaan eliminoitua ajan myötä käytössä siirtyvä takymetrin jakokehän keskipiste. Keskipisteen siirtyessä vääristyy kulmanmittauksen tarkkuus. (18, s. 88.) Nykyisissä teollisuusmittaukseen suunnitelluissa takymetreissä on olemassa neljä anturia jakokehällä, jotka parantavat lukutarkkuutta paljon diametriseen kulmalukuun verrattuna (8, s. 9).

Normaalisti takymetrin kulmanlukuanturin kulmanerotuskyky on 0.0001 gon eli 0.1 mgon. Teollisuusmittauskojeiden kulmanlukuerotuskyky voi olla kymmenesosa tästä, eli 0.01 mgon. Valmistajat ilmoittavat takymetrin kulmanlukulaitteen erotuskyvyksi yleensä 0.1 mgon tai 1", jotka ovat pienimmät maanmittaustekniikassa käytetyt kulmanmäärittämysyksiköt. (14, s. 233.)

Kulmanmittauksen epävarmuuteen vaikuttavat jakokehän valmistuksessa tuleva jaotuksen epävarmuus, pulssianturin epävarmuudesta havaita jakoviivat ja akselivirheistä, eli akselit eivät ole kohtisuorasti toisiinsa nähden.

Kulmanmittaustarkkuuteen vaikuttaa myös anturien lukumäärä jakokehällä. (8, s. 9; 16, 167–169; 18, s. 92.)

### 3.4.2 Kulmanmittauksen epävarmuus

Nykyisten takymetriä laitevalmistajat ilmoittavat yleensä vaak- ja pystykehien epävarmuudet samalla luvulla. Kulmamittauksen epävarmuus on nykyään luokkaa 0,3 mgon – 1,0 mgon. (8, s. 9.)

Kulmamittauksen epävarmuus siirtää havaittua pistettä sivu- ja pystysuunnassa oikeasta kohdasta riippuen kohteen etäisyydestä. Sivu- pystysuunnan siirtymä saadaan laskettua trigonometrisen peruskaavan mukaisesti

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad (4)$$

*a on kulmamittauksen epävarmuus*

*b on etäisyys kohteeseen*

Sivu- ja pystysuunnan siirtymä (*a*) saadaan laskettua johtamalla kaavaa (4)

$$a = b * \tan(\alpha) \quad (5)$$

(2, s. 197; 13, s. 117.)

## 3.5 Koordinaattien määrittäminen

### 3.5.1 Vaakaetäisyys

Takymetrillä havaitun pystykulman ( $z$ ) ja vinoetäisyyden ( $v$ ) avulla voidaan laskea vaakaetäisyys ( $s$ ) havaittuun kohteeseen

$$s = v * \sin(z) \quad (6)$$

(13, s. 54.)

### 3.5.2 Säteittäinen mittaus

Takymetrillä suoritettu koordinaattien kartoitus- tai merkintämittaus perustuu säteittäiseen mittaukseen. Säteittäinen mittaus on yksinkertainen mittausmenetelmä, jossa mitataan tunnetun lähtösivun suhteen vaakakulma ja vaakaetäisyys määritettävään kohteeseen. Pisteiden koordinaatit saadaan geodeettisena päätehtävänä tunnettujen kaavojen (7–8) avulla.

$$X_p = X_1 + s_{1p} * \cos(t_{1p}) \quad (7)$$

$$Y_p = Y_1 + s_{1p} * \sin(t_{1p}) \quad (8)$$

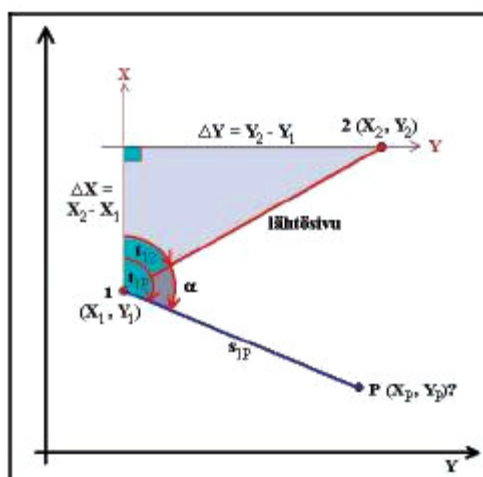
$$t_{12} = \arctan\left(\frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)}\right) \quad (9)$$

$$t_{1p} = t_{12} + \alpha \quad (10)$$



$X_1$  ja  $Y_1$  ovat asemapisteen koordinaatit,  $X_2$  ja  $Y_2$  ovat liitospisteen koordinaatit ja  $X_p$  ja  $Y_p$  mitattavan pisteen koordinaatit.  $t_{12}$  on lähtösivun suuntakulma,  $\alpha$  on lähtösivun ja havaitun pisteen välinen kulma,  $t_{1p}$  havaitulle pisteelle laskettu suuntakulma ja  $s_{1p}$  on havaitun pisteen vaakaetäisyys, joka on saatu kaavalla (6) havaitusta vinoetäisyydestä ( $v$ ). (Kuva 13.)

Suoritettaessa kartoitusta tai merkintää takymetrillä koje orientoidaan haluttuun koordinaatistoon vaakakehän osoittaessa nollasuunnan käytetyn koordinaatiston pohjoissuuntaan. Toimenpide poistaa laskennassa ja havainnoissa tarvittavan  $\alpha$ :n määrittämisen ja kojeella havaitaan vain suuntakulmia ja vinoetäisyyksiä kohteeseen. (14, s. 55–56.)



Kuva 13. Säteittäinen mittaus (14, s. 55).

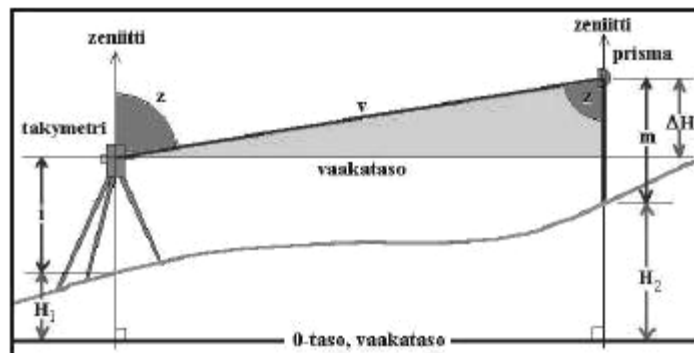
### 3.5.3 Trigonometrinen korkeuden mittaus

Tehtäessä kartoitus- tai merkintämittausta takymetrillä saadaan tasokoordinaatit  $x$  ja  $y$  säteittäisestä mittauksesta. Korkeuskoordinaatin ( $h$ ) määrittäminen tapahtuu havaitulle pisteelle trigonometrisellä korkeudenmittauksella.

Suoritettaessa rakentamisen mittauksia orientoidaan takymetri yleensä vapaalle asemapisteele. Orientoinnin tuloksena kojeen tähtäysakselille saadaan korkeus  $H_1$ . Havaitun vinoetäisyyden ( $v$ ) ja pystyikulman ( $z$ ) ja kojekorkeuden ( $H_1$ ) avulla voidaan määrittää kartoitetulle tai merkitylle pisteelle korkeus kaavan 11 mukaisesti. (Kuva 14.)

$$H_2 = H_1 + v \cdot \cos(z) \quad (11)$$

(14, s. 56.)



Kuva 14. Trigonometrinen korkeudenmittaus (14, s. 56).

### 3.5.4 Pisteen koordinaatit

Takymetrillä saadaan säteittäisen mittauksen ja trigonometrin korkeudenmittauksen tuloksena x- ja y-koordinaatteja paikallisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa ja h-koordinaatteja määritellyssä korkeusjärjestelmässä. Kyseessä eivät ole aidosti kolmiulotteiset koordinaatit, vaikka koordinaattiakseleita onkin kolme. Takymetrin tapauksessa saadaankin kaksiulotteisia tasokoordinaatteja ja yksiulotteisia korkeuskoordinaatteja.

## 4 Tähykset

### 4.1 Heijastinprisma

Elektro-optisessa etäisyysmittauksessa käytettäessä amplitudimoduloitua mittausalgoritmia täytyy mitattavaan kohteeseen sijoittaa heijastin mittaussignaalin palautumiseksi vastaanottimelle. Pulssimoduloidussa mittausalgoritmissa yksittäinen mittauspulssi heijastuu mitattavan kohteen pinnasta ja ei näin tarvitse erillistä heijastinta.

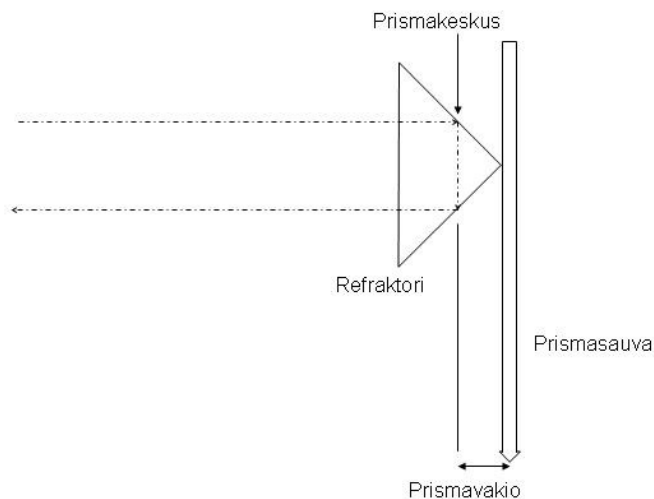
Heijastimena käytetään lasista tai muovista valmistettua heijastinprismaa, joka muodostuu kolmesta heijastavasta pinnasta, jotka ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Prismän särmät muodostavat näin joka suuntaan näkyvän prismakeskuksen, johon mittauskaukoputken hiusristikko kohdistetaan.

Heijastinprisman toisiinsa kohtisuorasti olevat pinnat mahdollistavat, ettei sitä tarvitse suunnata täydellisesti kohti takymetriä mittaussignaalin palautumiseksi. Heijastinprisma voi olla hieman kääntynyt takymetriin nähden verrattuna tavalliseen tasomaiseen heijastavaan pintaan esimerkiksi peiliin. Prismän tarkalla suuntaamisella ei ole juurikaan merkitystä etäisyydenmittauksen tarkkuuteen, mutta suuntien määrittämiseen kyllä. (14, s. 254.)

### 4.2 Prismän nollapistevirhe

Prismavakio on prismän nollapistevirhe, eli heijastava pinta ja heijastinprisman todellinen keskikohta eivät ole samalla kohdalla (kuva 15). Tämä ero pitää ottaa huomioon amplitudimoduloidulla mittausalgoritmillä mitattaessa. Nykyisten takymetriä etäisyys- ja kulmanmittauksen epävarmuuksien ollessa pienet voi väärin

määritelty prismavakio antaa täydellisesti väärän kuvan mitatun pisteen sijainnista. (14, s. 254.)



Kuva 15. Prismen nollapistevirhe, eli prismavakio.

### 4.3 Kohdistuksen epävarmuus

Kohdistusvirhe on etäkäytöllä olevan takymetrin epävarmuus kohdistaa itsensä heijastinprisman keskelle. Takymetrin sisällä on CCD-kenno, joka tunnistaa heijastinprisman sen muodosta ja heijastuneisuudesta. Tunnistettuaan heijastinprisman takymetri kykenee seuraamaan liikkuvaa kohdetta. Kohdistusvirhe ilmoitetaan yleensä suhteessa etäisyyteen, eli mitä kauempana kohde on takymetristä, sitä suurempi on hiusristikon sivuttaissiirtymä heijastinprismassa. (16, s. 154; 18, s. 105.)

Kohdistuksen epävarmuus aiheuttaa mitatulle pisteelle siirtymää ( $a$ ) sivu- ja pystysuunnassa kaavasta 4 johdetun kaavan 5 avulla. Tässä tapauksessa  $b$  on prisman etäisyys takymetriin ja ( $\alpha$ ) on kohdistuksen epävarmuus kulmayksiköissä. Kohdistusvirhe on lineaarinen, eli etäisyyden ( $b$ ) pienentyessä myös epätarkkuus ( $a$ ) pienenee. (5.)

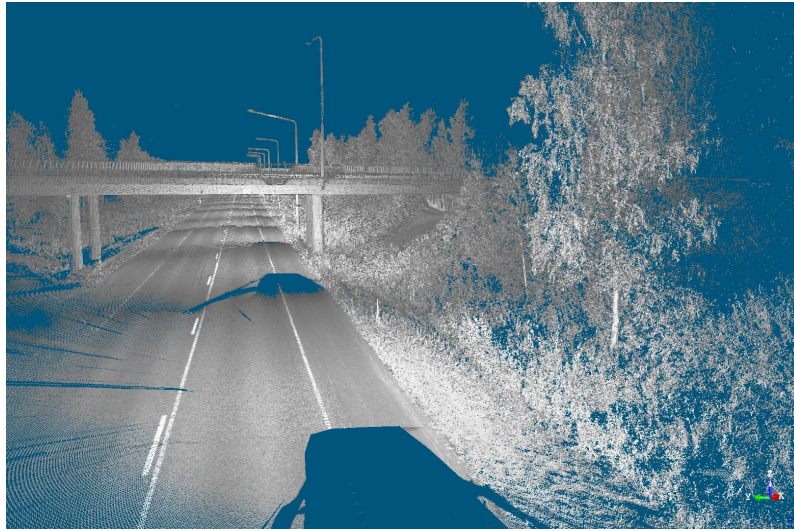
## 5 Laserkeilain

### 5.1 Laserkeilaimen ero takymetriin

Laserkeilain on mittauslaite, jolla voidaan mitata kohdetta koskematta sitä, eli mittausperiaate on sama kuin prismattomasti mitaavalla takymetrillä. Mitattavalle kohteelle ei tarvita tähystä, vaan mittaus perustuu signaalin heijastumiseen kohteesta takaisin. Takymetrin tavoin laserkeilain mittaa etäisyyden lisäksi pysty- ja vaakakulmia, joista johtamalla saadaan pisteille kolmiulotteiset x-, y- ja z-koordinaatit. (7, s. 1; 8, s. 1.)

Laserkeilaimen ero takymetriin verrattuna on sen mittausnopeus ja mitattujen pisteiden lukumäärä. Laserkeilaimelle määritellään mitattava alue, jonka se automaattisesti käy läpi. Vastaavasti takymetrillä tulee jokainen havainto suunnata käyttäjän toimesta. Uusimmilla takymetreillä voidaan myös tehdä hidastempoista "laserkeilausta", jossa määritellään mitattava alue ja koje mittaa sen itsenäisesti. (14, s. 283.) Laserkeilauksen etu perustuukin pääasiassa sen nopeuteen ja mitattujen pisteiden lukumäärään (7, s. 1).

Laserkeilauksen lopputuloksena saadaan pistepilvi (kuva 16), joka sisältää satoja tuhansia pisteitä riippuen keilaimelle annetuista keilausasetuksista. Uusimmilla laserkeilaimilla päästäänkin yli 200 000 pisteen mittaamiseen sekunnissa. (7, s. 2.)



*Kuva 16. Stop & Go Scanning -menetelmällä saatu pistepilvi.*

Laserkeilaimen heikkoutena voidaan pitää sen käyttöä vain mittaustiedon keräämiseen. Laitteilla ei voida määrittää sijaintia halutussa koordinaatissa, vaan pistepilvet ovat aina keilaimen omassa keilainkeskeisessä koordinaatistossa. Laserkeilainta ei orientoida takymetrin tavoin, vaan keilauksen tuloksena saatu pistepilvi käännetään haluttuun koordinaatistoon tunnettujen tai takymetrillä mitattujen referenssipisteiden kautta.

## 5.2 Jaottelu käyttötarkoituksen mukaan

**Kaukartoituslaserkeilaimien** mittausetäisyys vaihtelee 100 metrillä 100 kilometriin, ja niitä käytetään ilma-aluksista (lentokone tai helikopteri) tai avaruus-aluksilta (satelliitit) tapahtuvaan kartoitukseen. Kaukartoituslaserkeilaimelle mitatun pisteen tarkkuus on yleensä alle 10 senttimetriä.

**Teollisuuslaserkeilaimet** on tarkoitettu suurta tarkkuutta vaativaan mallintamiseen ja teollisuuden ja rakentamisen deformaatioiden mittaamiseen alle 30 metrin etäisyydelle. Teollisuuslaserkeilaimilla päästään millimetrin osien tarkkuuksiin.

**Maalaserkeilaimia (terrestriaali)** käytetään alle 300 metrin etäisyyksille, ja niiden mittaustarkkuus on yleensä alle 2 senttimetriä. Terrestriaalilaserkeilaimia käytetään

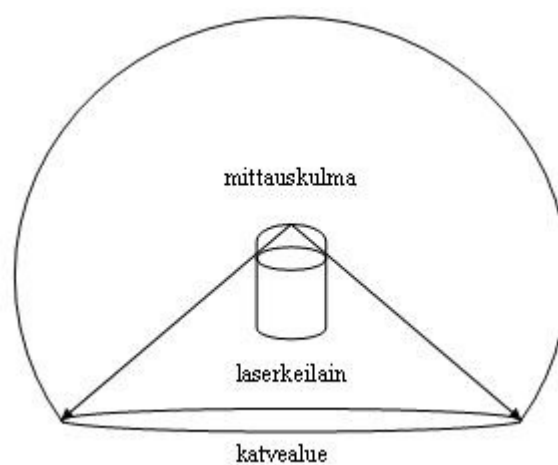
perinteisesti kolmijalan päältä tai liikkuvaan alustaa moduloituna erilaisissa kartoituksissa ja maastomallien tekemisessä sekä rakennusteollisuuden vähäistä tarkkuutta vaativissa valvontamittauksissa. (7, s. 1.)

Tässä insinööriyössä keskitytään tutkimaan terrestriaalisilaserkeilaimen ominaisuuksia tarkemmin.

### 5.3 Jaottelu toimintaperiaatteen mukaan

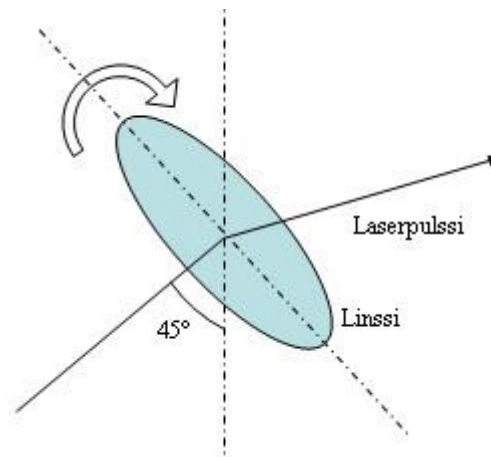
Maalaserkeilaimet jaotellaan kolmeen pääluokkaa niiden toimintaperiaatteen mukaan. Toimintaperiaatteeseen vaikuttaa kojeen ”nollapisteessä” sijaitseva peilijärjestelmä, joka heijastaa lasersäteen kohteeseen.

**Kupolimaisella mittaustavalla** voidaan muodostaa pistepilvi kojeen ympäriltä joka suuntaan. Ainoastaan kojeen alapuolelle jää katvealue, mikä johtuu laitteen kykenemättömyydestä mitata itsensä läpi. (Kuva 17.) Kupolimainen mittaustapa on nykyään yleinen johtuen sen monikäyttöisyydestä. Näillä laserkeilaimilla voidaan mitata tunnelien kattoja ja seiniä, rakennusten seiniä, huoneita, jne.. (7, s. 1–2, 5; 12, s. 6.)



*Kuva 17. Kupolimainen mittaustapa.*

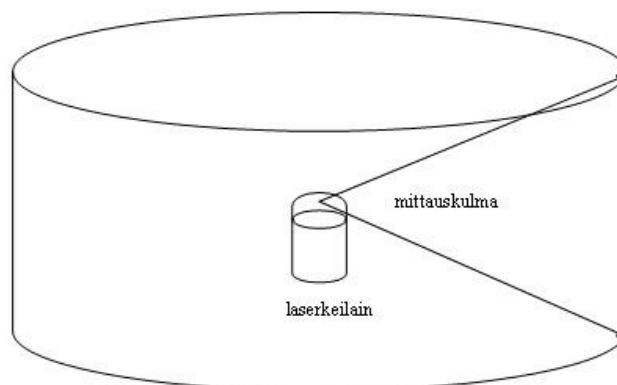
Kupolimainen mittaustapa on toteutettu käyttämällä pyörivän peilijärjestelmän vinopeilisovellusta. Vinopeilisovelluksessa peili on asetettu  $45^\circ$ :n kulmaan pyörimisakselin suhteen ja laser on suunnattu siihen pyörimisakselin suunnassa. (Kuva 18.) (12, s. 6.)



Kuva 18. Pyörivä vinopeilisovellus.

Vinopeilin avulla saadaan pystyakselilta mitattua jatkuvasti vähintään  $270^\circ$ :n mittauskulma ja itse keilaimen pyöriessä vaak akselin ympäri vaakakehältä  $360^\circ$ :n mittauskulma (6, s. 2).

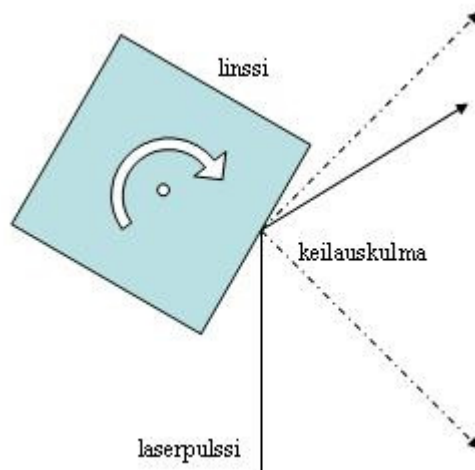
**Panoraamisella mittaustavalla** pystytään keilaamaan täydellinen  $360^\circ$  vaakakehän ympäri, mutta pystykehällä on sen mittauskulma normaalisti rajoittunut  $\pm 45^\circ$ :seen vaakatason ylä- ja alapuolelle (Kuva 19).



Kuva 19. Panoraaminen mittaustapa.

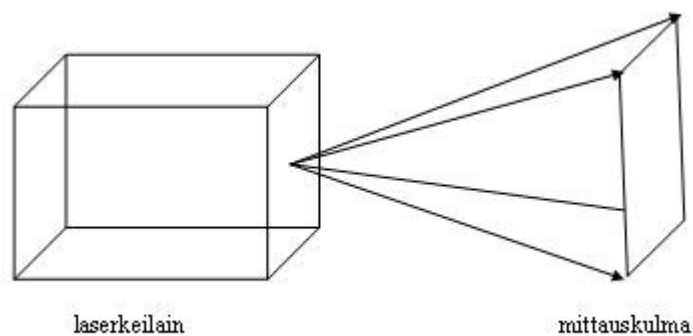


Panoraamisessa mittaustavassa käytetään pyörivän peilijärjestelmän polygonipeilisovellusta. Polygonipeilisovelluksessa peili pyörii akselinsa ympäri ja koostuu yleensä kolmesta tai useammasta peilipinnasta. Lasersäde osuu peilin pintaan kohtisuorasti pyörimisakselia vasten ja heijastuu siitä kohteeseen. (Kuva 20.) (7, s. 2; 12, s. 6.)



*Kuva 20. Pyörivä polygonipeilisovellus.*

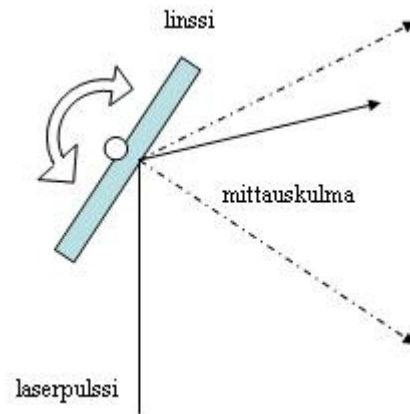
**Keilamaisessa mittaustavassa** on mittausalue rajoittunut tiettyyn suuntaan ja pienelle alueelle (kuva 21).



*Kuva 21. Keilamainen mittaustapa.*

Keilamaisessa mittaustavassa peilijärjestelmänä on käytetty oskilloivaa peiliä, joka "heiluu" akselinsa varassa ja heijastaa lasersäteen kohteeseen. Keilamainen mittaustapa

on hyvä pienten ja lähellä olevien kohteiden tarkkaan mallintamiseen. (Kuva 22.) (7, s. 2; 12, s. 6.)



Kuva 22. Oskilloiva peilisovellus.

## 5.4 Jaottelu etäisyysmittauksen mukaan

### 5.4.1 Pulssilaser (Pulse time of Flight)

Nimensä mukaisesti etäisyyden määrittäminen mitattavaan kohteeseen tapahtuu mittaamalla pulssin käyttämä aika kohteeseen ja takaisin vastaanottimelle. Tekniikka ei aseta etäisyydenmittaukselle mitään rajoituksia, kunhan laserkeilaimen vastaanotin kykenee havaitsemaan palautuvan signaalin.

Etäisyysmittauksen tarkkuus riippuu kojeen sisäisen kellojärjestelmän ajanmääritystarkkuudesta, kohteen pinnanominaisuuksista heijastaa signaali ja signaalin kuluaikaan vaikuttavista tekijöistä. Kohteen pinnan ominaisuudet, kovuus, väri, materiaali jne. voivat viivyttää signaalin heijastumista kohteesta ja aiheuttaa näin mitatulle pisteelle suurta epävarmuutta sen sijainnissa. Etäisyys kohteeseen saadaan kaavalla 2.

Pulssilaseriin perustuvan etäisyydenmäärittelyn hyöty on sen pitkä mittausetäisyys, joka kuitenkin pienentää laserkeilaimen mittaustaajuutta eli mitattujen pisteiden lukumäärää sekunnissa. Pulssilaserkeilaimilla mittaustaajuus on vain muutama tuhat pistettä sekunnissa. Mittauksissa aiheutuva kohina, eli hajonta on myös suurta kertamittauksella. Keskiarvomittauksella kohina pienenee, mutta pisteitä saadaan vain muutama sata kappaletta sekunnissa. (3, s. 1; 7, s. 2; 12, s. 6–7.)

#### **5.4.2 Vaihe-ero (Jatkuva-aaltainen laser)**

Jatkuva-aaltoisella laserilla etäisyysmittaus perustuu mittauslaserin aallonpituuden vaihe-eroon sen heijastuessa kohteesta. Menetelmä lähettää, nimensä mukaisesti, jatkuvaa signaalia, jonka yksikköjanan pituutta vastaa mittaussäteen yksi täysi siniaalto. Etäisyys määritetään siniaallon siitä vaiheesta, jossa signaali palaa vastaanottimelle. Jatkuva-aaltoisella laserkeilaimella ei siis voida mitata yhtä täyttä siniaallon pituutta eli yksikköjanan pituutta kauempaa. Normaalisti etäisyys on rajoittunut välille 50–80 metriä. Takymetreissä käytetty etäisyydenmittaus perustuu lähes samaan tekniikkaan erona vain, että aallonpituutta on moduloitu, jotta olisi mahdollista mitata pitempiä matkoja kuin siniaallon pituus. Vaihe-ero tekniikalla mitattu etäisyys saadaan kaavalla 1. (3, s. 1–2; 7, s. 2; 12, s. 7–8.)

#### **5.4.3 Yhteenveto**

Pulssilaserkeilaimen avulla voidaan mitata pitkiä ja lyhyitä etäisyyksiä, muutamasta metrillä aina kilometriin. Menetelmä heikkous on vain toistotaajuuden alhainen lukema, eli havaintoja ei saada kuin muutama tuhat sekunnissa. Vaihe-erolaserin toistotaajuus on huomattavasti suurempi kuin pulssilaserin – saatetaan päästä jopa 250 kHz:n (250 000 pist/sek) taajuuksiin. Mittausetäisyys on tosin rajoittunut pääsääntöisesti 100 metriin. Vaihe-erolaserkeilaimilla mitattun pistepilven laatu ei ole yhtä hyvä, kuin valon kulku-aikaan perustuvilla. Tämä huomataan erityisesti kohteiden reunoissa.

## 5.5 Pisteen mittaaminen

Laserkeilaimen sisällä olevat tasaimet ja kompensattori mahdollistavat laserkeilaimella mittaamisen vaikka sitä ei olisikaan tasattu vallitsevan painovoimakentän mukaisesti. Tämä toiminta antaa laserkeilaimelle mahdollisuuden toimia erilaisissa asennoissa ja käytettävyyden liikuteltavalta alustalta.

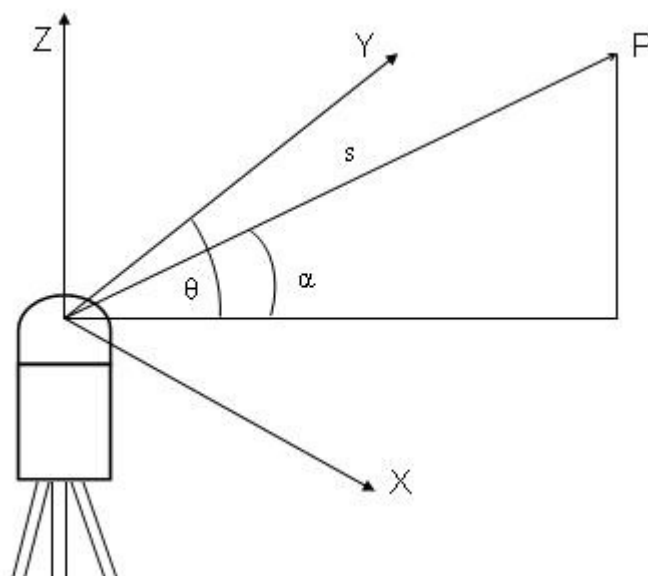
Laserkeilaimen pistepilven pisteiden määrittämiseen tarvitaan vinoetäisyys ( $s$ ) ja kulmahavainnot ( $\alpha$ ) ja ( $\theta$ ). Laserkeilaimen ollessa tasattu vallitsevan painovoimakentän mukaisesti on  $\alpha$  vaakakulma ja  $\theta$  pystykulma. Laserkeilaimet tekevät kaikki havainnot keilainkeskiseen koordinaatistoon, jonka keskipiste on laitteen peilijärjestelmän pyörimisakselin ja laserkeilaimen vaaka-akseli yhtymäkohta. Laserkeilaimella saadaan todellisia kolmiulotteisia  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -koordinaatteja paikallisessa keilainkeskisessä koordinaatistossa kaavojen 12–14 mukaisesti. (Kuva 23.)

$$x = s * \sin \theta \cos \alpha \quad (12)$$

$$y = s * \cos \theta \cos \alpha \quad (13)$$

$$z = s * \sin \alpha \quad (14)$$

(16, s. 582, 584.)



Kuva 23. Laserkeilaimen havaintokulmat.

## 5.6 Laserkeilaimen tarkkuuteen vaikuttavat ominaisuudet

Laserkeilaimella mitatun pisteen sijainnin epävarmuuteen vaikuttavat etäisyysmittauksen ja kulmanmäärityksen epävarmuudet ja lasersäteen hajoamiskulma eli divergenssi. Vierekkäisten pisteiden epävarmuuteen vaikuttaa edellisten lisäksi kulmaresoluutio. (12, s. 11.)

Laserkeilaimella tuotetun aineiston tärkein ominaisuus on sen yksityiskohtaisuus ja yksityiskohtien tarkkuus. Tästä johtuen kulmanmäärityksen ja etäisyysmittauksen epävarmuuksien tulisi olla mahdollisimman pieniä. (12, s. 11.)

**Kulmanmäärityksen epävarmuus** eli kulmanmittaustarkkuus ilmoittaa lasersäteen suunnanmäärityksen tarkkuuden. Epävarmuuden suuruuteen vaikuttavat vaakakehän valmistuksessa syntyneet mahdolliset virheet. Pystykehällä taas epävarmuuteen vaikuttaa peilijärjestelmän epäkeskisyys. (12, s. 11–12.)

**Etäisyysmittauksen epävarmuus** eli mittaustarkkuus ilmoittaa, kuinka tarkasti etäisyysmittauksessa käytetty signaali voidaan rekisteröidä. Yksittäisen havainnon

etäisyysmittaustarkkuus määrää, kuinka tarkasti mitattavan pinnan pienet vaihtelut saadaan mallinnettua myöhemmin. (12, s. 12–13.)

**Säteen hajoamiskulma eli** divergenssi ilmoittaa avaruuskulmaan, jonka sisällä laserin tuottama energia etenee ja heikkenee määriteltyyn murto-osaan huippuintensiteetistä. Energian heikkeneminen ja leviäminen vaikuttavat mittaustarkkuuteen. Mitä leveämpi avaruuskulma on, sitä kauempänä säteen keskikohdasta kohinaa havaitaan. (12, s. 13.)

**Kulmaresoluutio** on kahden vierekkäisen lasersäteen välinen kulmaerotus, ja se määrittää keilaimen kyvyn toistaa kohteen yksityiskohtia. Riippuen laserkeilaimista kulmaresoluutio voi olla erisuuruinen pysty- ja vaakakehillä. Laserkeilaimen kulmaresoluution tarkkuus on suoraan verrannollinen pienten yksityiskohtien havaitsemiseen mitattavalta pinnalta. (12, s. 12.)

## 5.7 Laserkeilaimen yleiset ominaisuudet

**Nimellismittausetäisyys** määräytyy laserkeilaimilla lähetystehon ja mittaustavan perusteella ja tätä etäisyyttä pidemmälle niillä ei voi mitata. Pulssilasereissa mittausetäisyyteen vaikuttavat lähetysteho ja toistotaajuuden määräämä enimmäiskulku-aika. Vaihe-erolasereissa mittausetäisyyteen vaikuttaa lähetystehon lisäksi kantoaallon siniaallonpituus. Mittausetäisyys vaihe-erolaserkeilaimilla on jotain kymmeniä metrejä, kun pulssilaserkeilaimilla se on satoja metrejä. (3, s. 1–2.)

**Toistotaajuudella** tarkoitetaan laserkeilaimen mittaushavaintojen määrää sekunnissa (12, s. 14).

**Mittauskulma** määrittää keilaimen näkemän eli tasokulman, jonka lasersäde muodostaa pysty- ja vaakakehän ympärille. Mittauskulman leveys riippuu pitkälti laitteen toteutustavasta. Oskilloivan tai polygonipeilin laitteet tuottavat yleensä kapean mittauskulman, kun taas pyörivän vinopeilin laitteet yleensä yli 300°:n mittauskulman pystykehällä.

Mittauskulman suuruudella on vaikutusta käytännön töissä. Kapean mittauskulman laitteilla kojetta joudutaan siirtämään useita kertoja, jotta koko alue saadaan kartoitettua. Suurella keilauskulmalla varustettu laserkeilain saattaa suoriutua samasta alueesta yhdeltä tai kahdelta kojeasemalta.

Kapealla keilauskulmalla on hyötynsä, jos toistotaajuutta voidaan nostaa pienentämällä mittauskulmaa. Liikkeestä ja liikkuvaa kohdetta keilaaminen paranee, kun kohteesta saadaan havaintoja enemmän ja nopeammin. Toistotaajuuden nostaminen voi kuitenkin huonontaa kulmanerotuskykyä, kulmaresoluutiota. (12, s. 14–15.)

## **5.8 Signaalin intensiteetti**

Laserkeilain lähettää signaalin tietyllä teholla, ja sen fysikaalisista ominaisuuksista johtuen signaalin teho heikkenee etäisyyden kasvaessa. Osuessaan kohteeseen osa signaalin tehosta absorboituu siihen. Osalla keilaimista voidaan tallentaa palautuvan signaalin intensiteetin suuruus. Pisteiden intensiteettiä voidaan tunnistaa erilaiset materiaalit pistepilvistä ja esittää ne omina harmaasävyarvoina tai värinä. Värieron avulla voidaan myös pisteisiin liittää sisäisen kameran ottamia valokuvia kohteessa. (7, s. 3.)

## 6 Virheiden luonne ja kasautuminen

### 6.1 Virhelajit

Erilaisissa mittauksissa tapahtuvat virheet on jaettu perinteisesti kolmeen kategoriaan; karkeisiin, systemaattisiin ja satunnaisvirheisiin. Tässä insinööriyössä tarkastellaan satunnaisvirheitä ja niiden kasautumista Stop & Go Scanning -menetelmässä. Muut virhelajit käsitellään vain yleispiirteisesti.

**Karkeat virheet** ovat mittaajan huolimattomuudesta johtuvia erehdyksiä. Tyypillisiä karkeita virheitä ovat kirjoitusvirheet, väärään kohteeseen tähtääminen, huolimattomasti pystytetty mittauskoje, kojeen epäkuntoisuus, puutteellinen sääkorjaus tai väärä prismavakio.

Karkeat virheet saadaan poistettua mittauksista toistamalla mittaus tarvittavan monta kertaa, suorittamalla havainnot sarjana ja tarkastamalla kaikkien asetusten ja korjausten oikeellisuus. Mittausjärjestelyt ja -tapahtuma tulisi saada rutinoitua mittaajalle niin, ettei karkeita virheitä pääse syntymään. (11, s. 2–3; 13, s. 35; 15, s. 1.)

**Systemaattiset virheet** ovat mittauksissa aina samansuuruisina. Ne noudattavat jotain määrättyä sääntöä, ja niihin on aina löydettävissä jokin syy, joka vaikuttaa kaikkiin havaintoihin tai osiin niistä. Tyypillisempiä systemaattisia virheitä ovat etäisyysmittarin ja prisman nollapistevirhe ja väliaineen vaikutus mittaussignaalin kulkuun.

Systemaattiset virheet siis yleensä johtuvat mittauskojeesta, mittaajasta tai ympäröivistä olosuhteista. Tunnetut systemaattiset virheet tulisi eliminoida mittauksista ennen lopullisen epätarkkuuden määrittämistä. Laitteiston säännöllisellä kalibroinnilla löydetään mittauskojeessa vallitsevat systemaattiset virheet. Myös mittaushenkilöstön käyttäminen testiradalla kertoo heidän kyvystään "eliminoida" systemaattiset virheet



mittaustilanteessa. Systemaattinen virhe voidaan myös ymmärtää mittauksen ulkoisena epävarmuutena eli terminä *accuracy*. (11, s. 2–3; 13, s. 35; 15, s. 1, 6–7.)

**Satunnaisvirheet** ovat virheitä, jotka jäävät jäljelle kun karkeat virheet on paikallistettu ja eliminoitu ja systemaattiset virheet otettu huomioon. Satunnaisvirheille on luonnonmukaista, että niiden suuruuden vaikutus vaihtelee havaintotarkkuuden rajoilla ja niiden etumerkki jakaantuu sekä positiivisiksi että negatiivisiksi.

Satunnaisvirheitä hallinnoidaan ja käsitellään tilastomatematiikan avulla, ja ne jakautuvat mitattavan kohteen ympärille normaalijakautuneen tiheysfunktion mukaisesti. Satunnaisvirheille ei ole löydettävissä tarkkaa syytä, ja ne vaikuttavat kaikkiin havaintoihin tavalla, jota ei voida tarkkaan ennustaa. Satunnaisvirhe voidaan myös ymmärtää mittauksen sisäiseksi epävarmuudeksi eli termillä *precision*.

Mittauslaitteissa olevat etäisyys- ja kulmanmittauksen epävarmuudet ovat satunnaisvirheitä, ja ne kasautuvat mitatun pisteen koordinaatteihin satunnaisvirheen kasautumislain mukaisesti. (11, s. 3; 13, s. 35; 15, s. 1–6.)

## 6.2 Satunnaisvirheen kasautuminen

Tilastomatematiikassa ja tasoituslaskennassa satunnaisvirheiden mittarina on keskivirhe eli keskihajonta. Keskihajonta kertoo, miten yksittäiset havainnot ovat yhteensopivia muiden havaintojen kanssa. Keskivirheitä käsiteltäessä on parempi käyttää **variansseja**. Varianssi on keskivirheen neliö, ja sen tunnus on kreikkalainen aakkonen sigma ( $\sigma$ ). (14, s. 35.)

Satunnaisvirheille voidaan myös laskea kovarianssit ( $s$ ), jotka kuvaavat havaintosuureiden keskinäistä suhdetta. Takymetrillä suoritettavat välilliset havainnot eli etäisyys- ja kulmahavainnot ovat toisistaan riippumattomia, joten niillä ei oleteta olevan kovarianssia. Havainnoista johdetut suureet tosin ovat toisistaan riippuvaisia, joten niillä on keskinäinen kovarianssi. (11, s. 5; 15, s. 17.)

### 6.3 Satunnaisvirheen kasautumislaki

Kun johonkin mittaustulokseen vaikuttaa useita satunnaisvirhelähteitä, saadaan niiden todennäköisin yhteisvaikutus selville, kun lasketaan osatekijöiden neliösumman neliöjuuri. Epävarmuuden etumerkillä ei ole merkitystä, koska se häviää otettaessa suureesta neliö. (15, s. 10.)

Satunnaisvirheiden käyttämisen edellytyksenä on, että osavirheillä ei ole aikaisemmin käsitelty keskinäistä riippuvuutta, eli kovarianssi on nolla. Vaikka näissä havainnoissa ei olisi lainkaan systemaattista virhettä, vaan ainoastaan satunnaista virhettä, vaikuttaa satunnainen virhe kuitenkin lopputulokseen systemaattisesti. Toisaalta virhe ei esiinny systemaattisesti vaan jollain tietyllä todennäköisyydellä. (15, s. 11.)

Varianssien ja kovarianssien välinen riippuvuus toisistaan esitetään seuraavassa.

Käytetään apuna funktiota

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

josta saadaan  $y_1$ :n varianssiksi

$$s_{y_1}^2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + 2\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) s_{x_1 x_2},$$

jossa merkintä  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$  tarkoittaa funktion  $y_1$  osittaisderivaattaa havainnon  $x_1$  suhteen.

Funktio siis derivoidaan vuoronperään kunkin muuttujan suhteen muiden toimiessa vakion tavoin. Viimeinen termi (kovarianssitermi) häviää yleensä, sillä alkuperäiset havainnot ovat usein riippumattomia toisistaan tai ainakin paremman tiedon puutteessa joudutaan olettamaan niin.

Havaintoja on yleensä useampia kuin yksi, joten

$$y_2 = f_1(x_1, x_2)$$

ja  $y_2$ :n varianssiksi saadaan näin

$$s_{y_1}^2 = \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + 2\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) s_{x_1 x_2}$$

Funktioiden  $y_1$  ja  $y_2$  variansseista saadaan kovarianssi

$$s_{y_1 y_2} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) s_{x_2}^2 + \left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\right] s_{x_1 x_2}$$

Havaintojen lisääntyessä otetaan maanmittaustekniikassa käyttöön matriisit, joiden avulla voidaan nopeasti ja helposti laskea useita yhtäaikaisia muuttujia.

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.

.

.

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Edellä esitettyjen yhtälöiden osittaisderivaatoista voidaan muodostaa **Jacobin matriisina** tunnettu taulukko

$$\mathbf{J}_{yx} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right) \\ \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\right) \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_2}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}$$

Havaintojen varianssit ja kovarianssit voidaan esittää myös taulukkona **kovarianssimatriisissa.**

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x1xn} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x2xn} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \sigma_{x1xn} & \sigma_{x2xn} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix}$$

Koordinaattien laskemiseen tarvittavista kaavoista esimerkiksi geodeettisen päätehtävän kaavoista voidaan nyt muodostaa Jacobin matriisin ja kovarianssimatriisin avulla **satunnaisvirheen kasautumislain kaava 15**

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{J}_{yx} \mathbf{C}_x \mathbf{J}_{yx}^T \quad (15)$$

Merkintä  $\mathbf{J}_{yx}^T$  tarkoittaa matriisin  $\mathbf{J}_{yx}$  transpoosia, joka saadaan vaihtamalla matriisin sisällä rivit sarakkeiksi.

Suoritetaan matriisilaskenta ja tuloksena saadaan havainnon kovarianssimatriisi.

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1y2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{y1yn} \\ \sigma_{y1y2} & \sigma_{y2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{y2yn} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \sigma_{y1yn} & \sigma_{y2yn} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{yn}^2 \end{bmatrix}$$

Vinoriviltä saadaan havaitulle pisteelle koordinaattien varianssit  $\sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{ym}^2$ ,  
joiden neliöjuuret ovat **koordinaattien keskihajonnat**. (11, s. 12–14, 33; 15, s. 11–13.)

## **7 Epävarmuuden tutkiminen satunnaisvirheen kasautumislain avulla**

### **7.1 Pisteiden epävarmuuden määrittämisen periaate**

Takymetrillä mitattaessa useampia kohteita ja haluttaessa tietää niiden epävarmuuksien yhteisvaikutus on järkevämpää tutkia epävarmuuksien suuruutta koordinaattiakselien kuin kojeen tähtäysakselin suhteen. Näin jokaiselle koordinaattiakselille saadaan oma epävarmuuden suuruus erikseen. (9.) Tässä insinööriyössä on epävarmuudet laskettu koordinaattiakseleiden suhteen, koska takymetrillä on kartoitettu useampia kohteita, joiden sijainti eroaa toisistaan.

Heijastinprismojen epävarmuudet määritellään erikseen  $x$ -,  $y$ - ja  $h$ -koordinaateille. Neljän heijastinprisman sijainnin epävarmuuksien yhteisvaikutus koordinaattiakseleilla lasketaan yhteen ja saadaan tulokseksi laserkeilaimen nollapisteen sijainnin epävarmuus. Laserkeilaimella saatujen pisteiden epävarmuudet  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -koordinataateilla voidaan nyt lisätä keilaimen nollapisteen sijainnin epävarmuuteen ja saadaan laserkeilatun pisteen sijainnin epävarmuus takymetrin suorakulmaisessa kooordinaatistossa.

### **7.2 Takymetrillä mitattujen prismojen sijainnin epävarmuus**

Suoritettaessa säteittäistä mittausta ja trigonometristä korkeudenmittausta takymetrillä kasautuvat laitteen etäisyys- ja kulmanmittauksen tunnetut epävarmuudet tuntemattoman pisteen koordinaattien epävarmuuksiksi. Seuraavassa on esitelty epävarmuuksien kasautuminen käyttäen geodeettisen päätehtävän kaavoja 7 ja 8 ja matriiseja.

Muodostetaan Jacobin matriisi geodeettisen päätehtävän osittaisderivaatoista

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_p}{\partial s_{1p}} & \frac{\partial X_p}{\partial t_{1p}} \\ \frac{\partial Y_p}{\partial s_{1p}} & \frac{\partial Y_p}{\partial t_{1p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t_{1p}) & -s_{1p} \sin(t_{1p}) \\ \sin(t_{1p}) & s_{1p} \cos(t_{1p}) \end{bmatrix}$$

ja havaintojen kovarianssimatriisi  $C_x$  takymetrin epävarmuuksista

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_t^2 \end{bmatrix}$$

Lasketaan havaitun pisteen kovarianssimatriisi  $C_y$  satunnaisvirheen kasautumislain kaavan 15 avulla. Kovarianssimatriisi  $C_y$ :stä saadaan pisteelle kasautuneet sijainnin varianssit  $\sigma_x^2$  ja  $\sigma_y^2$ . Prismen tasosijainnin keskihajonta saadaan varianssien neliöjuurista. (19, s. 12–13.)

Korkeussijainnin keskihajonta  $\sigma_z$  saadaan laskemalla mitatun matkan ja laitevalmistajan ilmoittaman pystykehän epävarmuuden ja kohdistamistarkkuuden yhteisvaikutus kaavalla 5, kun kulmaluvun ja kohdistamistarkkuuden epävarmuudet on yhdistetty yhdeksi kulmayksiköksi.

### 7.3 Laserkeilattujen pisteiden sijainnin epävarmuus

Laserkeilaimella muodostettaessa pistepilviä kasautuvat laserkeilaimen tunnetut etäisyys- ja kulmanmittauksen epävarmuudet tuntemattoman pisteen koordinaattien epävarmuuksiksi.

Muodostetaan Jacobin matriisi kaavojen 12–14 osittaisderivaatoista

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \alpha & s \cos \theta \cos \alpha & -s \sin \theta \sin \alpha \\ \cos \theta \cos \alpha & -s \sin \theta \cos \alpha & -s \cos \theta \sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & s \cos \alpha \end{bmatrix}$$

ja havaintojen kovarianssimatriisi  $C_x$  laserkeilaimen epävarmuuksista

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Lasketaan havaitun pisteen kovarianssimatriisi  $C_y$  satunnaisvirheen kasautumislain kaavan 15 avulla. Kovarianssimatriisista  $C_y$  saadaan pisteelle kasautuneet sijainnin varianssit  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  ja  $\sigma_z^2$ . Havaitun pisteen keskihajonta saadaan ottamalla variansseista neliöjuuri.

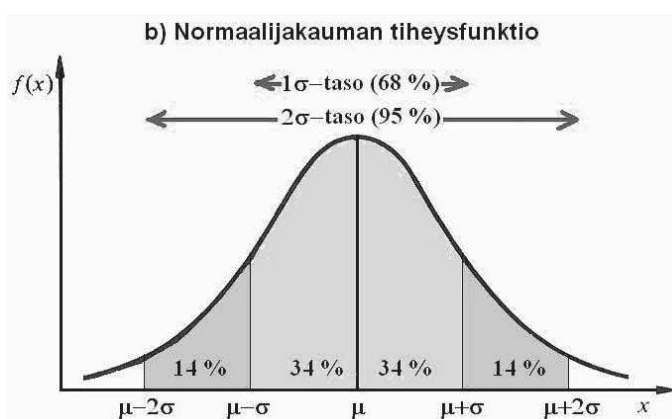


## 8 Epävarmuuden luotettavuuden havainnollistaminen

### 8.1 Todennäköisyydet

Mitattujen tulosten arvot eivät ole johdonmukaisia ilman todennäköisyyden arviota. Todennäköisyydellä halutaan ilmaista kuinka mitattu arvo osuu arvioidun välin sisälle toistettaessa mittaus uudestaan. Mittauksissa ilmenevää vaihtelua voidaan kuvata normaalijakauman tiheysfunktiona. Suurin osa mittaushavainnoista on keskittynyt lähelle tiheysfunktion keskikohtaa, joka on mittauksen oikeaksi hyväksyty arvo. Suuret vaihtelut keskiarvosta ovat harvinaisia, ja yleensä ne ovat selitettävissä karkeina virheinä. (14, s. 34.)

Normaalijakautunut tiheysfunktio voidaan jakaa erilaisiin alueisiin, sigma-tasoihin. Sigma-tasot ilmoittavat kuinka suurella todennäköisyydellä mittaus tapahtuu uudestaan. (Kuva 24.) Geodeettisten kojeiden etäisyys- ja kulmanmittauksesta aiheutuvat satunnaisvirheet ovat normaalijakautuneita, ja ne noudattavat ns. Gaussin kellokäyränä tunnettua tiheysfunktiota. Laittevalmistajat merkitsevät yleensä laitteen epävarmuuden arvon perään kreikkalaisen aakkosen sigman ( $\sigma$ ). Merkki kuvaa, että annettu epävarmuus tapahtuu yhden sigman todennäköisyydellä. (4, s. 14–15.)



Kuva 24. Normaalijakautunut tiheysfunktio ja sigma-tasot (14, s. 34).

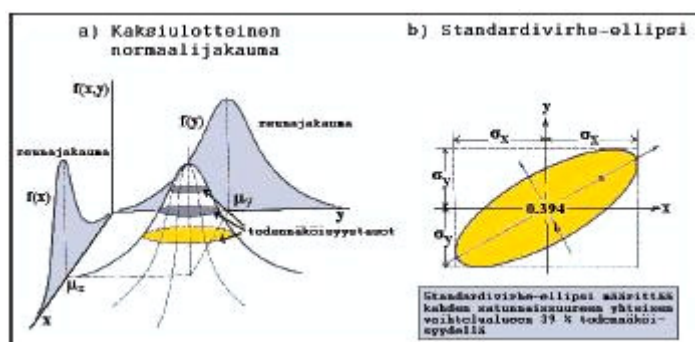
Yhden sigman taso vastaa todellisen arvon molemmille puolille jakautunutta aluetta, jonka koko on noin 68 % koko normaalijakautuneesta tiheysfunktioista. Siten yhden sigman tasolla todennäköisyys mittauksen onnistumiseen samoilla arvoilla on noin 68 %. Tasoja voidaan yhdistää, jos halutaan kasvattaa todennäköisyyden suuruutta. Kahden sigman taso ( $2\sigma$ ) ilmoittaa todennäköisyyden noin 95 % tarkkuudella, mutta epävarmuuden suuruus on kaksi kertaa isompi. Tavallista keskihajontaa ( $s$ ) käytettäessä on todennäköisyys noin 68 %. (14, s. 34.)

## 8.2 Pisteen sijainnin epävarmuuden osoittaminen

Mittaustekniikassa sijaintia osoitetaan  $x$ -,  $y$ - ja  $h$ - tai vaihtoehtoisesti  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -koordinaattien avulla, jotka perustuvat geodeettisella mittauslaitteella suoritettuihin havaintoihin. Havaintojen avulla johdetaan havaitulle pisteelle arvot, samoin niiden variansseille ja kovariansseille. Varianssien neliöjuurista saadaan koordinaattien keskihajonta (keskivirhe). (14, s. 17.)

Koordinaattien keskihajontoja voidaan tarkastella samanaikaisesti ja saadaan havainnollistava kuva pisteen sijainnin epävarmuudesta. Tarkastelun apuvälineenä voidaan käyttää koordinaattien satunnaisvirheiden yhteisjakaumaa, joka on **kaksiulotteinen normaalijakauma**. (14, s. 37.)

Koordinaattien satunnaisvirheiden yhteisjakauma on matemaattinen ratkaisu, jonka avulla pisteen sijainnin epävarmuus voidaan osoittaa tarkasti virhe-ellipsin avulla. Virhe-ellipsin koko, iso- ja pieniakselin puolikkaat ja suunta, saadaan havaitun pisteen koordinaattien variansseista ja kovariansseista. Kaksiulotteinen normaalijakauma tunnetaan myös nimellä **standardivirhe-ellipsi** (kuva 25). Todennäköisyys, että satunnaisvirheet ovat ellipsin alueen sisällä, on noin 39 %. Luku on saatu johtamalla kaksi normaalijakautunutta tiheysfunktioita, joiden yhden sigman ( $\sigma$ ) taso on noin 68 %. (10, s. 7; 14, s. 37–38; 15, s. 17–19.)



Kuva 25. Virhe-ellipsi ja sen muodostavat parametrit (13, s. 38).

Standardivirhe-ellipsi on **absoluuttinen virhe-ellipsi**, kun se kuvaa mitatun pisteen sijainnin epävarmuutta lähtöpisteisiin nähden. Tässä insinööriyössä saadut epävarmuudet voidaan kuvata absoluuttisen virhe-ellipsin avulla, koska on oletettu takymetrin orientointiin käytetyt lähtöpisteet virheettömiksi, mikä on normaali tapaus mittaustekniikassa.

Kolmiulotteisen mittaamisen tuloksena saadaan epävarmuudesta malli, jota kutsutaan virhe-ellipsoidiksi. Tosin sen käyttäminen takymetrimittauksessa ei ole järkevää, vaan esitetään tasosijainnille oma standardivirhe-ellipsi ja tutkitaan korkeussijainnin epävarmuuksia normaalijakautuneen tiheysfunktion avulla. (4, s. 36; 15, s. 21.) Laserkeilaimen tapauksessa tosin joudutaan muodostamaan pisteen sijainnin epävarmuudesta virhe-ellipsoidi. Virhe-ellipsoidin tapauksessa todennäköisyys, että piste on uudelleen mitattaessa alueen sisällä, on noin 61 %. (10, s. 7.)

### 8.3 Pistekeskivirhe

Kovarianssimatriisista  $C_y$  saatujen varianssien neliöjuurien avulla saadaan havaitulle pisteelle sijainnin epävarmuudet koordinaattiakseleihin nähden. Tasosijainnin virhe-ellipsin iso- ja pieniakselin puolikkaat ja kolmiulotteisen sijainnin virhe-ellipsoidin määrittävät parametrit saadaan kojeen tähtäysakselin pistekeskivirheistä.

Takymetrimittauksessa on järkevää käsitellä taso- ja korkeussijaintien epävarmuudet erikseen, koska ne ovat eri mittausten tulos ja niillä ei ole varsinaisesti yhteyttä

toisiinsa. Laserkeilauksessa taas taso- ja korkeussijainti ovat saman mittausalgoritmin tuloksia ja niitä voidaan tutkia yhdessä.

Tasosijainnin epävarmuus voidaan esittää yhdellä tunnusluvulla koordinaattikeskivirheiden sijasta. Tätä tunnuslukua kutsutaan pistekeskivirheeksi (MSPE, Mean Square Positional Error).

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (16)$$

Kaavalla 16 saadaan luku, joka kuvaa ympyrän sädettä, jonka sisällä piste sijaitsee tietyllä todennäköisyydellä. (4, s. 35; 15, s. 21.) Käytettäessä pistekeskivirhettä MSPE saadaan pisteen sijainnin epävarmuuden todennäköisyydeksi noin 39 %.

Haluttaessa voidaan tasosijaintia ja korkeussijaintia kuvata yhdellä luvulla. Tällöin muodostetaan kolmiulotteissa avaruudessa määritelty pistepallovirhe (MRSE, Mean Radial Spherical Error).

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad (17)$$

Kaavan 17 avulla saadaan luku, joka kuvaa  $\sigma_p$  säteistä palloa, jonka sisällä piste sijaitsee. Tosin pistekeskivirheet eivät varsinaisesti määritä ympyrää, jos kaikki epävarmuudet ovat eri suuria. Tällaisessa tapauksessa kolmiulotteisen pistevirheen käyttäminen ei ole järkevää. (4, s. 36; 15, s. 21.) Käytettäessä keskipallovirhettä MRSE saadaan pisteen sijainnin epävarmuuden todennäköisyydeksi noin 61 %. (9, s. 7.)

## 8.4 Kojeen tarkkuuden tutkiminen

Kojeen etäisyys- ja kulmanmittauksen epävarmuuksista voidaan laskea havaitulle pisteelle pistekeskivirheet tähtäyslinjan suhteen. Riippuen paikallisen koordinaatiston kierrosta kojeeseen nähden voivat pistekeskivirheet olla myös koordinaattikeskivirheitä. Pistekeskivirheen laskemisessa käytetään satunnaisvirheen kasautumislakia. Tosin kaavat ovat paljon yksinkertaisemmat, koska epävarmuudet tulevat tähtäyslinjalle ja kohtisuorasti sitä kohden.

Etäisyysmittauksen epävarmuudesta ( $a$  mm +  $b$  ppm) johtuva pistekeskivirhe saadaan kaavalla 18

$$s_e = \sqrt{a^2 + (d * 10^{-6})^2} \quad (18)$$

Vaakakehän kulmanmittauksen epävarmuudesta ( $V_v$ ) johtuva pistekeskivirhe saadaan kaavalla 19

$$s_v = d * \tan(V_v) \quad (19)$$

Pystykehän kulmanmittauksen epävarmuudesta ( $H_{z_v}$ ) johtuva pistekeskivirhe saadaan kaavalla 20

$$s_{Hz} = d * \tan(H_{z_v}) \quad (20)$$

Mahdollinen kohdistustarkkuus tulee muuttaa kulmayksiköiksi ja laskea kulmaluvun epävarmuuden kanssa yhteen.  $d$  kuvaa kaavoissa 18–20 etäisyyttä kohteeseen.

## 9 Tulokset

### 9.1 Laskennan periaate

Laskennat suoritettiin Microsoft Officen Excel-taulukkolaskenta-ohjelmalla. Excel valittiin laskemisen suorittamiseen, koska sillä on helppoa ja nopeaa lisätä ja muokata laskettavia arvoja. Työn tekijällä oli myös aikaisempaa kokemusta erilaisten geodeettisten laskentojen suorittamisesta Excel-taulukkolaskenta-ohjelmalla.

Lopullisia tuloksia varten laskettiin halutulle pisteelle sijaintitarkkuus neljässä eri tapauksessa. Ensimmäisessä (1) tapauksessa ajoneuvo oli maksimietäisyyden, 200 metriä, päässä takymetristä, auton keula lähes kohtisuorassa takymetriin nähden ja laserkeilaus tapahtui alaspäin auton eteen. Toisessa (2) tapauksessa ajoneuvon etäisyys ja sijainti olivat samat kuin ensimmäisessä tapauksessa; nyt vain laserkeilaus tapahtui keilausalueen reunalle. Kolmannessa (3) tapauksessa ajoneuvo oli 10 metrin päässä takymetristä, auton sivu kohtisuorassa takymetriin ja laserkeilaus tapahtui alaspäin auton eteen. Neljännessä (4) tapauksessa ajoneuvon etäisyys ja sijainti olivat samat kuin kolmannessa tapauksessa; nyt vain laserkeilaus tapahtui keilausalueen reunalle.

Insinööriyön tilaajaa kiinnosti enemmän saatu korkeustarkkuus kuin sijaintitarkkuus. Näin ollen muodostettiin jokaisessa neljässä tapauksessa pisteelle sijainnin taso- ja korkeuskoordinaattien epävarmuudet erikseen.

## 9.2 Laskennan tulokset

Laskennassa saadut tulokset esitetään taulukossa 4. Laskennan tarkemmat välivaiheet esitellään liitteissä 3–6.

*Taulukko 4. Stop & Go Scanning -menetelmällä saatujen pisteiden epävarmuudet*  
**Epävarmuus yhteensä (mm)**

Esimerkki1	
- 200m ja alaspäin keilaus	
$S_x$	5,9
$S_y$	2,0
$S_z$	5,9
<b>Tasosijainti</b>	<b>6,2</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>5,9</b>

Esimerkki2	
- 200m ja keilaus alueen reunalle	
$S_x$	6,4
$S_y$	2,1
$S_z$	6,4
<b>Tasosijainti</b>	<b>6,7</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>6,4</b>

Esimerkki3	
- 10m ja alaspäin keilaus	
$S_x$	1,5
$S_y$	1,4
$S_z$	0,5
<b>Tasosijainti</b>	<b>2,1</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>0,5</b>

Esimerkki4	
- 10m ja keilaus alueen reunalle	
$S_x$	2,9
$S_y$	1,5
$S_z$	2,4
<b>Tasosijainti</b>	<b>3,2</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>2,4</b>

## 9.3 Tuloksien toistettavuus

Tasosijainnin todennäköisyydeksi saadaan standardivirhe-ellipsin tapauksessa noin 39 % yhden sigman tasolla. Korkeussijainnin todennäköisyydeksi saadaan normaalijakautuneen tieheysfunktion tapauksessa noin 68 % yhden sigman tasolla.

## 10 Yhteenveto

Laskennassa saatujen tulosten perusteella Stop & Go Scanning -menetelmä soveltuu suunniteltuun käyttötarkoitukseen. Tasosijainnissa saavutetaan takymetrin maksimimittausetäisyydellä ja laserkeilauksen tapahtuessa alueen reunalle 6,7 mm:n epävarmuus noin 39 %:n todennäköisyydellä. Korkeussijainnin epävarmuudeksi saadaan maksimimittausetäisyyden päässä ja laserkeilauksen tapahtuessa keilausalueen reunalle 6,4 mm noin 68 %:n todennäköisyydellä. Päällysrakennekerrokselle asetettu 15 mm korkeussijainnin epävarmuus saavutetaan näiden tulosten perusteella.

Laskenta tapahtui kuitenkin kojeille annetuista epävarmuuksista ja näin oletettiin mittausten tapahtuvan optimiolosuhteissa. Mahdollisten sääkorkorjausten syöttäminen mittauksiin on siis tärkeätä, jotta menetelmällä päästään edellä laskettuihin arvoihin. Myös kojeiden säännöllisellä kalibroinnilla saadaan poistettua takymetrin ja laserkeilaimen mahdolliset systemaattiset virheet jotka vaikuttavat lopputulokseen.

Työn tilaaja tulee todennäköisesti hyödyntämään työtä tulevissa projekteissa ja markkinoidessaan menetelmään asiakkailleen tämän työn toimiessa todistuksena menetelmän tarkkuudesta ja soveltuvuudesta.

Insinööriyön tekemisestä oli itselleni hyötyä luomaan käsitys takymetrillä ja laserkeilaimella mitattujen pisteiden epävarmuuksien muodostumisesta ja niiden lähteistä ja suuruuksista. Työn tekeminen auttoi myös ymmärtämään laitevalmistajien ilmoittamia laitetietoja, sekä muodostamaan noista tiedoista käsitys laitteiden todellisesta tarkkuudesta. Uudet opiskelijat tai muuten asiasta kiinnostuneet voivatkin hyödyntää insinööriyötä selvittääkseen takymetrin ja laserkeilaimen toimintaa ja tarkkuutta.

Haasteita työn tekemiseen toivat eri valmistajien tavat ilmoittaa kojeiden tarkkuudet varsinkin laserkeilainten osalta, koska vielä ei ole olemassa yhteistä standardia sille, miten epävarmuudet ilmoitetaan.



Työtä olisi voinut jatkaa tutkimalla sijainnin epävarmuuden suuruutta erilaisilla laitekoonpanoilla. Olisi voitu tutkia esimerkiksi kuinka paljon tulokset muuttuvat, jos valitaan käytettäväksi kulma- ja etäisyysmittaustarkkuudeltaan heikompi takymetri kuin nyt käytetty, tai sitä, miten tulokset muuttuvat, jos käytetään tarkempaa laserkeilainta kuin menetelmässä nyt käytetty.

Kehitysideoita tuli työtä tehtäessä sääkorjausten hankkimisen osalta, eli kun takymetrillä havaitaan maksimietäisyyden päähän, olisi hyvä saada tähysten vierestä säätilatietoja mm. ilmanpaine ja lämpötila. Tämä säätiöjen kerääminen voitaisiin suorittaa pienellä sääasemalla, joka sijoitetaan prismojen väliin ja jota operaattori voisi seurata autosta käsin koko ajan. Säätiöillä saataisiin muodostettua lineaarinen malli lämpötilan ja ilmanpaineen vaihtelusta takymetrin ja tähysten välillä.

## Lähteet

- 1 S6 Total Station. (WWW-dokumentti.) GeoSystems.  
<[www.geosystems.co.nz/drupal/s6+total+station](http://www.geosystems.co.nz/drupal/s6+total+station)>. 2008. Luettu 2.4.2009.
- 2 Ghilani, Charles D. & Wolf, Paul R.. Elementary Surveying, An Introduction to Geomatics, 12.painos. New Jersey, Yhdysvallat: Pearson Education, Inc. , 2008.
- 3 Heinonen, Hannu. Yleisimmät 3D-skannereiden mittaustekniikat, opintomoniste. Syksy 2008.
- 4 Heinonen, Hannu. Mittaukset – virheet – toleranssit, opintomoniste. Syksy 2008.
- 5 Immonen, Kari. Myyjä, Geotrim Oy, Vantaa. Sähköpostikeskustelu 9.2.2009 – 19.2.2009.
- 6 Joala, Vahur. Laserkeilaimien toimintaperiaatteet ja kalibrointi, Maanmittaustieteiden Seuran julkaisu 40. Maanmittaustieteiden päivät, 2003.
- 7 Joala, Vahur. Laserkeilauksen perusteita mittauksen suunnittelu. Espoo: Leica Nilomark Oy, 2006.
- 8 Joala, Vahur. 3D-teollisuusmittaus, Optiset mittaussvälineet. Espoo: Leica Nilomark Oy, 2009.
- 9 Joala, Vahur. Tuotepäällikkö, Nilomark Oy, Espoo. Sähköpostikeskustelu 20.2.2009.
- 10 JUHTA. JHS 160 Paikkatiedon laadunhallinta, Liite 2. 22.6.2006.
- 11 Kallio, Ulla. Tasoituslasku 587, 2. korjattu painos. Helsinki: Oy Yliopistokustannus/Otatieto, 1998.

- 12 Kukko, Antero. Laserkeilaimen valinta lähifotogrammetrisiin mittaustehtäviin, Fotogrammetrian erikoistyö. Kirkkonummi: Geodeettinen laitos, 2005.
- 13 Kuparinen, Antti. Mittamiehen käsikirja. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy, 1992.
- 14 Laurila, Pasi. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet. Rovaniemi: Rovaniemen ammattikorkeakoulun julkaisusarja D, nro 3, 2008.
- 15 Salmenperä, Hannu. Virheteorian ja tasoituslaskun alkeet. Tampere: TTKK Geoinformatiikka, 1999.
- 16 Schofield, W. & Breach, M. Engineering Surveying, 6.painos. Oxford, Iso-Britannia: Elsevier Ltd, 2007.
- 17 Trimble Navigation Limited. Trimble S6 Total Station Datasheet. 2005.
- 18 Vermeer, Martin. Luentomoniste, Johdanto geodesiaan. Espoo: TKK, 2006.
- 19 Vermeer, Martin. Luentomoniste, Käytännön geodesia. Espoo: TKK, 2007.
- 20 Zöllner+Fröhlich GmbH. Technical data IMAGER 5006. 2007.

**keilaimen koordinaatistossa**

[add]

40000=4

40003=1001A1

40008=0.1166

40009=-4.9734

40010=0.1752

40013=6

40014=0

40015=0

40023=1001A2

40028=1.3657

40029=-1.6500

40030=-0.4159

40033=6

40034=0

40035=0

40043=1001A3

40048=-1.3096

40049=-0.7884

40050=-0.4017

40053=6

40054=0

40055=0

40063=1001A4

40068=-2.5543

40069=-4.1121

40070=0.1874

40073=6

40074=0

40075=0

<- keilaus- ja tähyksnumero

<- tähyksen x

<- tähyksen y

<- tähyksen z

**Liite 2: LaserControl-ohjelman esimerkkiedosto pistepilvien kääntämisestä KKJ:ään takymetrillä kartoitettujen tähysten avulla** 61

tähy numero	tunnus	y	x	h
1000A1	9	2572467.0048	7215916.5545	22.63567
1000A2	9	2572464.3001	7215914.2541	23.22867
1000A3	9	2572462.5788	7215916.4781	23.15867
1000A4	9	2572465.2842	7215918.7727	22.56467
1001A4	9	2572448.0729	7215905.1994	22.50367
1001A1	9	2572449.7997	7215902.9861	22.56267
1001A2	9	2572447.1032	7215900.6756	23.15367
1001A3	9	2572445.3756	7215902.8946	23.09667
1002A1	9	2572433.5596	7215890.4239	22.52467
1002A2	9	2572430.8521	7215888.1238	23.10967
1002A3	9	2572429.1325	7215890.3505	23.03967
1002A4	9	2572431.8418	7215892.6419	22.45267
1003A1	9	2572417.7328	7215878.0861	22.47667
1003A2	9	2572415.0272	7215875.7837	23.05067
1003A3	9	2572413.3043	7215878.0065	22.98067
1003A4	9	2572416.0121	7215880.3029	22.40667
1004A1	9	2572401.8597	7215865.7726	22.38167
1004A2	9	2572399.1610	7215863.4616	22.95267
1004A3	9	2572397.4323	7215865.6773	22.89067
1004A4	9	2572400.1314	7215867.9847	22.31867
1005A1	9	2572386.0500	7215853.2294	22.33467
1005A2	9	2572383.3630	7215850.9086	22.92167
1005A3	9	2572381.6212	7215853.1150	22.83667
1005A4	9	2572384.3083	7215855.4308	22.25067
1006A1	9	2572369.6164	7215840.2206	22.30967
1006A2	9	2572366.9215	7215837.9049	22.89067
1006A3	9	2572365.1859	7215840.1163	22.80267
1006A4	9	2572367.8817	7215842.4262	22.21867
1007A1	9	2572353.6032	7215827.4019	22.27867
1007A2	9	2572350.9524	7215825.0358	22.86167
1007A3	9	2572349.1777	7215827.2146	22.77567
1007A4	9	2572351.8300	7215829.5755	22.19067
1008A1	9	2572343.3684	7215819.0939	22.24667
1008A2	9	2572340.7105	7215816.7335	22.83167
1008A3	9	2572338.9420	7215818.9173	22.74267
1008A4	9	2572341.5984	7215821.2700	22.15767
1009A1	9	2572322.1453	7215801.1898	22.16667
1009A2	9	2572319.6190	7215798.7017	22.74867
1009A3	9	2572317.7416	7215800.7959	22.70567
1009A4	9	2572320.2711	7215803.2801	22.11467
1010A1	9	2572306.9633	7215787.6953	22.25067
1010A2	9	2572304.4048	7215785.2378	22.82667
1010A3	9	2572302.5499	7215787.3487	22.75067
1010A4	9	2572305.1105	7215789.8052	22.16567
1011A1	9	2572291.5832	7215773.8145	22.14467
1011A2	9	2572288.9604	7215771.4246	22.71667

1011A3	9	2572287.1644	7215773.5851	22.66667
1011A4	9	2572289.7899	7215775.9733	22.08967
1012A1	9	2572275.7637	7215761.8359	22.04767
1012A2	9	2572273.0397	7215759.5597	22.61567
1012A3	9	2572271.3357	7215761.7925	22.55767
1012A4	9	2572274.0632	7215764.0676	21.98667
1013A1	9	2572259.4027	7215749.4472	21.98867
1013A2	9	2572256.6828	7215747.1691	22.56767
1013A3	9	2572254.9750	7215749.4002	22.50667
1013A4	9	2572257.6984	7215751.6772	21.92567
1014A1	9	2572242.8226	7215735.7794	21.95467
1014A2	9	2572240.1338	7215733.4674	22.54367
1014A3	9	2572238.3979	7215735.6760	22.47467
1014A4	9	2572241.0901	7215737.9855	21.88267
1015A1	9	2572227.0258	7215723.7869	21.98367
1015A2	9	2572224.3160	7215721.4978	22.56267
1015A3	9	2572222.5974	7215723.7215	22.46767
1015A4	9	2572225.3126	7215726.0072	21.88167
1016A1	9	2572210.2693	7215711.0665	21.89267
1016A2	9	2572207.5718	7215708.7604	22.47267
1016A3	9	2572205.8405	7215710.9713	22.38367
1016A4	9	2572208.5400	7215713.2766	21.80067
1017A1	9	2572194.5116	7215699.2155	21.81267
1017A2	9	2572191.7734	7215696.9587	22.38667
1017A3	9	2572190.0814	7215699.2037	22.30567
1017A4	9	2572192.8217	7215701.4596	21.72567
1018A1	9	2572175.2078	7215684.3103	21.73667
1018A2	9	2572172.4966	7215682.0214	22.31267
1018A3	9	2572170.7788	7215684.2457	22.23267
1018A4	9	2572173.4935	7215686.5336	21.64767
1019A1	9	2572194.1209	7215695.4903	21.90567
1019A2	9	2572196.6904	7215697.9388	22.50467
1019A3	9	2572198.5214	7215695.8050	22.53767
1019A4	9	2572195.9511	7215693.3623	21.94167
1020A1	9	2572209.4995	7215707.7720	21.98967
1020A2	9	2572212.1841	7215710.0959	22.57867
1020A3	9	2572213.9208	7215707.8830	22.54867
1020A4	9	2572211.2355	7215705.5648	21.96067
1021A1	9	2572225.9257	7215720.3498	22.08967
1021A2	9	2572228.6319	7215722.6450	22.69567
1021A3	9	2572230.3517	7215720.4197	22.60767
1021A4	9	2572227.6428	7215718.1326	22.00067
1022A1	9	2572242.2102	7215732.9206	22.13667
1022A2	9	2572244.9141	7215735.2203	22.73467
1022A3	9	2572246.6346	7215732.9956	22.66267
1022A4	9	2572243.9301	7215730.7031	22.06367
1023A1	9	2572258.5398	7215745.5454	22.19467
1023A2	9	2572261.2464	7215747.8434	22.79267

1023A3	9	2572262.9688	7215745.6228	22.68867
1023A4	9	2572260.2622	7215743.3312	22.08967
1024A1	9	2572274.5874	7215758.1226	22.23867
1024A2	9	2572277.2671	7215760.4478	22.84667
1024A3	9	2572279.0129	7215758.2459	22.74267
1024A4	9	2572276.3325	7215755.9265	22.13567
1025A1	9	2572292.7244	7215771.9779	22.31467
1025A2	9	2572295.4252	7215774.2816	22.91867
1025A3	9	2572297.1544	7215772.0652	22.80367
1025A4	9	2572294.4526	7215769.7709	22.20167
1026A1	9	2572307.9049	7215784.1151	22.34167
1026A2	9	2572310.5753	7215786.4535	22.94167
1026A3	9	2572312.3294	7215784.2556	22.86367
1026A4	9	2572309.6587	7215781.9273	22.26667
1027A1	9	2572324.5039	7215797.1283	22.37667
1027A2	9	2572327.1986	7215799.4284	22.98167
1027A3	9	2572328.9298	7215797.2160	22.89867
1027A4	9	2572326.2293	7215794.9152	22.28367
1028A1	9	2572339.5757	7215809.1645	22.41467
1028A2	9	2572342.2112	7215811.5401	23.01067
1028A3	9	2572343.9976	7215809.3707	22.94367
1029A1	9	2572356.0670	7215822.2516	22.46067
1029A2	9	2572358.7623	7215824.5637	23.04667
1029A3	9	2572360.4910	7215822.3480	22.99267
1029A4	9	2572357.7955	7215820.0409	22.40167
1030A1	9	2572371.9654	7215834.4982	22.50567
1030A2	9	2572374.6792	7215836.7840	23.09967
1030A3	9	2572376.3872	7215834.5494	23.06367
1030A4	9	2572373.6726	7215832.2679	22.46667
1031A1	9	2572387.9402	7215847.0159	22.60167
1031A2	9	2572390.6266	7215849.3311	23.19167
1031A3	9	2572392.3651	7215847.1208	23.12467
1031A4	9	2572389.6762	7215844.8087	22.53067
1032A1	9	2572404.7333	7215859.9819	22.68867
1032A2	9	2572407.4457	7215862.2629	23.28967
1032A3	9	2572409.1594	7215860.0340	23.20867
1032A4	9	2572406.4423	7215857.7557	22.60467
1033A1	9	2572420.2501	7215871.8811	22.72567
1033A2	9	2572422.9654	7215874.1618	23.31767
1033A3	9	2572424.6747	7215871.9319	23.24567
1033A4	9	2572421.9568	7215869.6530	22.64967
1034A1	9	2572435.8687	7215883.9397	22.80167
1034A2	9	2572438.5577	7215886.2468	23.40667
1034A3	9	2572440.2964	7215884.0379	23.31367
1034A4	9	2572437.6025	7215881.7320	22.70767
1035A1	9	2572451.5388	7215896.1548	22.81267
1035A3	9	2572455.9627	7215896.2512	23.32867
1035A4	9	2572453.2688	7215893.9454	22.73067

1036A1	9	2572466.2119	7215907.5430	22.87767
1036A2	9	2572468.8853	7215909.8696	23.47667
1036A3	9	2572470.6329	7215907.6704	23.38867
1036A4	9	2572467.9521	7215905.3481	22.78667



**Liite 3: Laskennan välivaiheet; ajoneuvo 200 metrin päässä takymetristä**

**Prismojen mittaus**

Ajoneuvo 200m päässä takymetristä	
- kehikon sivu ja takymetri samalla suoralla	
Etäisyysmittauksen epävarmuus	1mm+1ppm
Kulmamittauksen epävarmuus	
- vaakakulma (")	1
- pystyakulma (")	1
Kohdistustarkkuus	2mm/200m
- epävarmuus lineaarinen (rad)	1E-05

<i>prisma</i>	<i>vinomatka (m)</i>	<i>suunta (°)</i>
1	200,000	89,1405
2	199,977	90,0000
3	196,377	90,0000
4	196,400	89,1249

**PRISMA1  
Tasosijainti**

<b>Jacobin matriisi</b>	
0,015	-199,977499
0,999887494	3

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
0,015	0,999887494
-199,9774987	3

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
0,00000104	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
1,56E-08	-4,4088E-08
1,03988E-06	6,61402E-10

<b>(J*Cx)*J^T</b>	
8,81694E-06	-1,1667E-07
-1,16667E-07	1,04175E-06

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00297

**PRISMA2  
Tasosijainti**

<b>Jacobin matriisi</b>	
6,1257E-17	-199,977499
1	1,22501E-14

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
6,1257E-17	1
-199,9775	1,22501E-14

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
1,04E-06	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
6,3707E-23	-4,4088E-08
1,04E-06	2,70075E-24

<b>(J*Cx)*J^T</b>	
8,8167E-06	-4,7638E-22
-4,764E-22	1,03999E-06

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00297

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00297
Sy	0,00102
Sz	0,00297

**PRISMA3**  
Tasosijainti

<b>Jacobin matriisi</b>	
6,12574E-17	-196,377499
1	1,20296E-14

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
6,12574E-17	1
-196,3774987	1,20296E-14

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
1,03856E-06	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
6,36198E-23	-4,3295E-08
1,03856E-06	2,65213E-24
<b>(J*Cx)*J^T</b>	
8,50212E-06	-4,572E-22
-4,57198E-22	1,03856E-06

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00292

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00292
Sy	0,00102
Sz	0,00292

<b>Yhdistetyt epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00589
Sy	0,00204
Sz	0,00589

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00297
Sy	0,00102
Sz	0,00297

**PRISMA4**  
Tasosijainti

<b>Jacobin matriisi</b>	
0,01527314	-196,377504
0,99988336	2,999650077

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
0,01527314	0,999883359
-196,3775	2,999650077

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
1,0386E-06	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
1,5862E-08	-4,3295E-08
1,0385E-06	6,61324E-10
<b>(J*Cx)*J^T</b>	
8,5024E-06	-1,1401E-07
-1,14E-07	1,04031E-06

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00292

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00292
Sy	0,00102
Sz	0,00292

**Liite 4: Laskennan välivaiheet; ajoneuvo 10 metrin päässä takymetristä**

**Prismojen mitta**

Ajoneuvo 10 metrin päässä takymetristä	
- takymetri keskellä autoa	
Etäisyysmittauksen epävarmuus	1mm+1ppm
Kulmamittauksen epävarmuus	
- vaakakulma (")	1
- vaakakulma (")	1
Kohdistustarkkuus	2mm/200m
- epävarmuus lineaarinen (rad)	1E-05

<i>prisma</i>	<i>vinomatka (m)</i>	<i>suunta (°)</i>
1	10,161	10,2040
2	10,161	280,2040
3	13,124	277,8831
4	13,124	7,8831

**PRISMA1  
Tasosijainti**

**Jacobin matriisi**

0,984183324	-1,8
0,177152998	10

**Jacobin matriisin transpoosi**

0,984183324	0,177152998
-1,8	10

**Kovarianssimatriisi Cx**

1,0001E-06	0
0	2,20467E-10

**Cy=J\*Cx\*J^T**

<b>J*Cx</b>	
9,84285E-07	-3,9684E-10
1,77171E-07	2,20467E-09

<b>(J*Cx)*J^T</b>	
9,69431E-07	1,70401E-07
1,70401E-07	5,34331E-08

**Korkeussijainti**

**Kulmanluku ja kohdistustarkkuus**

<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00015

**PRISMA2  
Tasosijainti**

**Jacobin matriisi**

0,177153	10
-0,9841833	1,8

**Jacobin matriisin transpoosi**

0,177153	-0,98418332
10	1,8

**Kovarianssimatriisi Cx**

1,0001E-06	0
0	2,20467E-10

**Cy=J\*Cx\*J^T**

<b>J*Cx</b>	
1,7717E-07	2,20467E-09
-9,843E-07	3,96841E-10

<b>(J*Cx)*J^T</b>	
5,3433E-08	-1,704E-07
-1,704E-07	9,69431E-07

**Korkeussijainti**

**Kulmanluku ja kohdistustarkkuus**

<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00015

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00098
Sy	0,00023
Sz	0,00015

**PRISMA3**  
Tasosijainti

<b>Jacobin matriisi</b>	
0,137153058	13
-0,990549867	1,8

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
0,137153058	-0,99054987
13	1,8

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
1,00017E-06	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
1,37177E-07	2,86607E-09
-9,9072E-07	3,96841E-10
<b>(J*Cx)*J^T</b>	
5,60732E-08	-1,3072E-07
-1,30721E-07	9,82072E-07

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00019

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00024
Sy	0,00099
Sz	0,00019

<b>Yhdistetyt epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00144
Sy	0,00144
Sz	0,00035

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00023
Sy	0,00098
Sz	0,00015

**PRISMA4**  
Tasosijainti

<b>Jacobin matriisi</b>	
0,99054987	-1,8
0,13715306	13

<b>Jacobin matriisin transpoosi</b>	
0,99054987	0,137153058
-1,8	13

<b>Kovarianssimatriisi Cx</b>	
1,0002E-06	0
0	2,20467E-10

<b>Cy=J*Cx*J^T</b>	
<b>J*Cx</b>	
9,9072E-07	-3,9684E-10
1,3718E-07	2,86607E-09
<b>(J*Cx)*J^T</b>	
9,8207E-07	1,30721E-07
1,3072E-07	5,60732E-08

**Korkeussijainti**

<b>Kulmanluku ja kohdistustarkkuus</b>	
<i>kulma (rad)</i>	1,48481E-05
<i>sijainti (m)</i>	0,00019

<b>Epävarmuudet (m)</b>	
Sx	0,00099
Sy	0,00024
Sz	0,00019

**Laserkeilaus**

Etäisyysmittauksen epävarmuus	< 3mm / 25m
- epävarmuus lineaarinen (mm/m)	0,00012
Kulmamittauksen epävarmuus	
- vaakakulma (°)	0,007
- pystyakulma (°)	0,007

keilaus suoraan alaspäin	
vinomatka (m)	2,8
vaakakulma (°)	90
pystyakulma (°)	90

Jacobin matriisi		
6,12574E-17	1,05069E-32	-2,8
3,75247E-33	-1,71521E-16	-1,71521E-16
1	0	1,71521E-16

Jacobin matriisin transpoosi		
6,12574E-17	3,75247E-33	1
1,05069E-32	-1,71521E-16	0
-2,8	-1,71521E-16	1,71521E-16

Kovarianssimatriisi Cx		
1,12896E-07	0	0
0	1,49263E-08	0
0	0	1,49263E-08

Cy=J*Cx*J^T		
J*Cx		
6,91572E-24	1,56829E-40	-4,17935E-08
4,23639E-40	-2,56016E-24	-2,56016E-24
1,12896E-07	0	2,56016E-24
(J*Cx)*J^T		
1,17022E-07	7,16846E-24	-2,52738E-25
7,16846E-24	8,78242E-40	-1,54821E-41
-2,52738E-25	-1,54821E-41	1,12896E-07

Epävarmuudet (m)	
Sx	0,00034
Sy	0,00000
Sz	0,00034

**Laserkeilaus**

Etäisyyden epävarmuus	< 3mm / 25m
- epävarmuus lineaarinen (mm/m)	0,00012
Kulmamittauksen epävarmuus	
- vaakakulma (°)	0,007
- pystykulma (°)	0,007

**keilaus alueen reunalle**

vinomatka (m)	20,195
vaakakulma (°)	90
pystykulma (°)	82

**Jacobin matriisi**

0,139173101	1,7217E-16	-19,99846365
8,52539E-18	-1,22505E-15	-2,810600774
1	0	1,23709E-15

**Jacobin matriisin transpoosi**

0,139173101	8,52539E-18	1
1,7217E-16	-1,22505E-15	0
-	-	-
19,99846365	-2,810600774	1,23709E-15

**Kovarianssimatriisi Cx**

5,87287E-06	0	0
0	1,49263E-08	0
0	0	1,49263E-08

**Cy=J\*Cx\*J^T**

<b>J*Cx</b>		
8,17345E-07	2,56986E-24	-2,98502E-07
5,00685E-23	-1,82855E-23	-4,19517E-08
5,87287E-06	0	1,84652E-23

<b>(J*Cx)*J^T</b>		
6,08334E-06	8,3897E-07	8,17345E-07
8,3897E-07	1,1791E-07	-1,82977E-24
8,17345E-07	-1,82977E-24	5,87287E-06

**Epävarmuudet (mm)**

Sx	0,00247
Sy	0,00034
Sz	0,00242

**Prismojen mittaus**

Ajoneuvo 200m etäisyydellä takymetristä  
- kehikon sivu ja takymetri samalla suoralla

**Yhdistetyt epävarmuudet (m)**

Sx	0,00589
Sy	0,00204
Sz	0,00589

Ajoneuvo 10 metrin etäisyydellä takymetristä  
- takymetri keskellä autoa

**Yhdistetyt epävarmuudet (m)**

Sx	0,00144
Sy	0,00144
Sz	0,00035

**Epävarmuus yhteensä (mm)****Esimerkki1**

- 200m ja alaspäin keilaus

Sx	5,9
Sy	2,0
Sz	5,9
<b>Tasosijainti</b>	<b>6,2</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>5,9</b>

**Esimerkki3**

- 10m ja alaspäin keilaus

Sx	1,5
Sy	1,4
Sz	0,5
<b>Tasosijainti</b>	<b>2,1</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>0,5</b>

**Laserkeilaus**

Keilaus suoraan alaspäin  
- etäisyys 2,8m

**Epävarmuudet (m)**

Sx	0,00034
Sy	0,00000
Sz	0,00034

Keilaus alueen reunalle  
- etäisyys 20,195m

**Epävarmuudet (m)**

Sx	0,00247
Sy	0,00034
Sz	0,00242

**Esimerkki2**

- 200m ja keilaus alueen reunalle

Sx	6,4
Sy	2,1
Sz	6,4
<b>Tasosijainti</b>	<b>6,7</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>6,4</b>

**Esimerkki4**

- 10m ja keilaus alueen reunalle

Sx	2,9
Sy	1,5
Sz	2,4
<b>Tasosijainti</b>	<b>3,2</b>
<b>Korkeussijainti</b>	<b>2,4</b>