Tampereen ammatillinen
opettajakorkeakoulu

Opettajankoulutuksen kehittämishanke

Matematiikan opetuksen havainnollistamisen kehittämismahdollisuuksia

Tiina Suontaus

2008

Suontaus, Tiina Matematiikan opetuksen havainnollistamisen kehittämismahdollisuuksia
63 sivua + 4 liitesivua
Opettajakoulutuksen kehittämishanke
Tampereen ammatillinen opettajakorkeakoulu
Ryhmän opettaja Seppo Janhonen
Marraskuu 2008
Asiasanat opetuksen havainnollistaminen, matematiikan opetus, miellejärjestelmät

TIIVISTELMÄ

Kun matematiikan opetuksessa on tavoitteet ja sisältö, niin voidaan yleensä valita vapaasti opetuksessa käytettävä työtapa. Havainnollistaminen on yksi hyvä mahdollisuus, koska havainnot vetoavat erilaisiin oppimistyyppeihin. Näitä tyyppejä kutsutaan miellejärjestelmiksi, nämä voidaan jaotella auditiivisiin, visuaalisiin, taktiilisiin ja kinesteettisiin oppimistyyppeihin. Miellejärjestelmät hyödyntävät erilaisia aisteja. Sama asia voidaan havainnollistaa useamman aistikanavan kautta.

Kehittämishanke on tehty opetusharjoittelussa saamistani matematiikan havainnollistamiseen liittyvistä kokemuksista. Hankkeen tarkoituksena on kehittää muutamaa matematiikan esimerkkitehtävää ja niiden opetusmenetelmää havainnollisemmaksi miellejärjestelmiin jaoteltuna. Lisäksi tarkoituksena on tutustua matemaattisiin oppimiskäsityksiin, oppimisvaikeuksiin, erilaisiin oppimistyyleihin sekä opetusmenetelmiin. Kehittämishankkeeseen on aineistoa kerätty oppimispäiväkirjastani, kirjallisuudesta ja sähköisistä aineistoista.

Kehittämishankkeen avulla saatiin parempi kuvan havainnollistamisesta ja sen mahdollisuuksista matematiikan opettamisessa. Ihmiset oppivat eri tavoin. Nämä erilaiset tavat edellyttävät erilaisia havainnollistamismenetelmiä. On hyödyllistä miettiä, millä tavalla havainnollistaminen tukee opettamista ja oppimista. Matematiikka on usein integroitunut ammattiaineisiin ja arkielämään, mistä se voidaan ottaa tarkastelun kohteeksi. Kehittämishankkeen tuloksia voidaan käyttää matematiikan opettamisessa ja sen havainnollistamisen kehittämisessä hyväksi.

Sisällysluettelo

1 KEHITTÄMISHANKKEEN LÄHTÖKOHDAT

Uusikylä ja Atjonen (2002, 182) kirjoittaa, että aloittelevan opettajan energia kuluu oman toiminnan havainnointiin, mutta vähin erin keskittyminen oppilaisiin ja heidän oppimisprosessiensa tukemiseen kohenee. Kognitiivisia prosesseja luonnehtii ensi vuosina konkreettisuus. Voin samaistua tähän ja todeta, että kehityshankkeeni aihe on muodostunut tämän kokemuksen perusteella.

Kehittämishankkeen päätavoite on oman opettamiseni havainnollistamisen kehittäminen matematiikassa. Lisäksi tavoitteena on tutustua matemaattisiin oppimisvaikeuksiin, erilaisiin oppimistyyleihin ja oppimiskäsityksiin sekä opetusmenetelmiin. Yleisesti tarkoituksena on kehittyä matematiikan opettamisessa.

Kiinnostuksen kohteeni matematiikan opetuksen havainnollistamiseen tuli opetusharjoittelussa, joka on lähtökohtana kehityshankkeelle. Heräsi kysymyksiä: Mistä opetuksen havainnollistaminen koostuu? Mitä matematiikan havainnollistamistapoja ja -mahdollisuuksia on? Miten ja mistä syystä matematiikan opettaminen havainnollistuu? Minkälaisessa tapauksessa opetusmenetelmä auttaa havainnollistamaan? Mitä vaikutuksia on havainnollistamisella? Näihin kysymyksiin pyritään hakemaan kehityshankkeella vastauksia käyttämällä apuna muun muassa kirjallisuutta, sähköisiä aineistoja ja oppimispäiväkirjojani opetusharjoittelusta. Pääasiassa opetusharjoitteluni perustui osallistuvaan havainnointiin. Kehityshankkeessa ei ole mukana oppijoiden omaa kokemusta opetuksestani.

Tähän kehityshankeraporttiin olen käsitellyt ja arvioinut muutamaa matematiikan esimerkkitehtävää ja niiden opetusmenetelmää. Olen esimerkeissä pyrkinyt tuomaan esiin matematiikan havainnollistamisen eri puolia käyttäen apuna erittelyssä miellejärjestelmiä. Esimerkit ovat ammatillisen toisen asteen matematiikan opettamisesta. Esimerkkitehtäviä olen kehittänyt havainnollisemmaksi. Hankeen tuloksia voidaan käyttää matematiikan opettamisessa ja sen havainnollistamisen kehittämisessä hyväksi. Kehityshankeen avulla pääsen syventymään oppiaineeni opettamiseen ja lisäämään valmiuttani opettajana. Hankkeesta on erityisesti hyötyä oppijoille sekä se antaa merkitystä ja tukea opettajan ammatilliselle kasvulle opettamisessa.

Kehityshankkeen toisessa luvussa kuvataan oppimiseen liittyviä käsitteitä ja yleisesti oppimiskäsityksiä matematiikassa. Kolmannessa luvussa perehdytään yleisesti matematiikan opiskelua vaikeuttaviin asioihin. Neljännessä luvussa esitellään havainnollistamista opetuksessa. Kehityshankkeen loppuosa keskittyy matematiikan esimerkkitehtäviin ja -opetusmenetelmiin sekä niiden kehittämiseen havainnollistamisen näkökulmalta. Lopuksi esitellään johtopäätökset.

2 OPPIMISKÄSITYKSIÄ MATEMATIIKASSA

Opettajan käsitys ihmisestä, tiedosta ja oppimisesta vaikuttaa opetukseen. Esimerkiksi se näkyy opettajan suhtautumisena oppijoihin ja hänen odotuksiin oppijoiden toiminnasta. Oppimisteorialla tarkoitetaan teoreettista mallia siitä miten ihminen tai muu organismi oppii (Wikipedia 18.6.2008). Oppimisteoriasta käytetään myös käsitettä oppimiskäsitys. Tässä luvussa käsittelen joitakin yleisiä oppimiskäsityksiä sekä eräiden tutkijoiden ja opettajien käsityksiä matematiikan opettamisesta. Yleisesti käsitys oppimisesta on muuttunut eri aikakausina.

2.1 Käsitteitä

Oppimiskäsitykseen liittyy keskeisiä käsitteitä: didaktiikka, oppiminen, opetus ja pedagogiikka. Seuraavassa on näiden eräitä määritelmiä. Matematiikan didaktiikka on tieteenhaara, jonka tehtävänä on kehittää käyttökelpoisia matematiikan opetussuunnitelmia ja niihin liittyviä matematiikan opetuksen tavoitteita, opetussisältöjä ja opetusmenetelmiä sekä opetuksen käytännön toteutusta (Leino 1977, Ahtee & Pehkonen 2000, 8 mukaan). Matematiikan didaktiikka on siis poikkitiedettä, josta voidaan erottaa erilaisia näkökulmia. Yksi näkökulma on pedagoginen, kun tarkastellaan erityisesti matematiikan opettamista. (Ahtee & Pehkonen 2000, 9.) Oppiminen on sisäinen tapahtuma ja se on ihmiselle välttämätön. Oppiminen voidaan määritellä tiedon ja kokemuksen karttumiseksi siten, että ihmisen tietoisuudessa ja toiminnassa tapahtuu muutos. (Hirsjärvi & Huttunen 2000, 43.) Opetus voidaan lyhyesti määritellä oppimisen ohjaamiseksi tai auttamiseksi (Hirsjärvi & Huttunen 2000, 41). Pedagogiikassa tarkastellaan kasvatusta yleensä (Rekola 18.6.2008).

2.2 Erilaisia oppimiskäsityksiä

Noin vuonna 1920–1960 oli vallalla behavioristinen oppimiskäsitys. Tiedon ajatellaan olevan jotain valmista, jonka opettaja siirtää sellaisenaan oppijalle (Tynjälä 1999, 29). Oppilas omaksuu nämä samoin kuin oppikirjan tiedot sellaisinaan. Tarkoituksena on opettaa selkeästi, pieninä annoksina harjoittelemalla ja antamalla oppilaalle palautetta. Vähitellen edetään synteesiin, jossa tiedon palat yhdistetään laajemmaksi kokonaisuudeksi. (Uusikylä & Atjonen 2002, 100.)

Tietoyhteiskunnan oppimiskäsitys on kognitivistinen (Patrikainen 1999, 13). Kognitivismin mukaan opetuksessa tärkeintä on auttaa opiskelijaa itse rakentamaan omat ajattelumallinsa ja strategiansa oppia uutta tietoa (Patrikainen 1999, 62). Opetuksen lähtökohtana tulisi olla oppijan tapa hahmottaa maailmaa ja sen tulkintaan käytettyjä käsitteitä: tämän varassa oppija rekonstruoi opetuksen sisällöt (Rauste-von Wright & von Wrigh 1994, 121). Lisäksi ryhmässä tapahtuva kognitiivinen prosessointi on tärkeää. Oppimistulos syntyy silloin oppijoiden ja opettajan keskinäisessä vuorovaikutuksessa (Patrikainen 1999, 154). Kokemuksellisessa oppimisnäkemyksessä korostetaan ulkoista konkreettista tekemistä ja käytäntöön soveltamista enemmän kun perinteisessä kognitiivisessa näkemyksessä. Esimerkiksi reflektiivinen havainnointi on yksi oppimistapa, jossa keskitytään kokemuksen ja tilanteen monipuoliseen reflektointiin. (Leppäaho 2007, 27.)

Humanistisessa oppimiskäsityksessä opettaja luo luokkaan ilmapiirin, jossa oppilaiden tarpeet otetaan huomioon. Yleisesti oppilaita autetaan hyväksymään itsensä, luomaan myönteistä minäkuvaa ja ymmärtämään omia opiskeluasenteitaan. Tavoitteena on oppilaiden sisäisen oppimishalujen herättäminen. (Uusikylä & Atjonen 2002, 101).

Sosiaalisessa oppimiskäsityksessä opettaja jakaa oppilaat heterogeenisiin pienryhmiin ja ohjaa työskentelemään yhteisten tavoitteiden suunnassa. Jokaisen oppijan on annettava oma panoksensa ryhmän tavoitteiden puolesta. (Uusikylä & Atjonen 2002, 101).

2.3 Erilaisia oppimiskäsityksiä matematiikasta

Tässä alaluvussa on eräiden tutkijoiden ja opettajien oppimiskäsityksiä matematiikassa. Yleisesti behavioristinen ja kognitivistinen oppimiskäsitys ovat matematiikan opetusajattelun kaksi valtasuuntaa (Kupari 1999, Leppäaho 2007, 20 mukaan).

Leppäahon (2007, 28) mukaan behavioristisen mallin edut ovat opetuksen johdonmukaisuus, turvallisuus sekä sen toimivuus perustaitoja opetettaessa. Malatyn (2003, 105) mukaan teoreettinen kritiikki ja kongnitiivisten oppimisteorioiden ihanteet eivät näy matematiikan opetuksessa. Esimerkiksi matemaattinen lauseke, jossa on sulut, antaa ärsykkeen, johon reagoidaan noudattamalla sääntöä. Suoritus on mekaaninen, epälooginen ja behavioristinen. Malatyn (2003, 107) mielestä toiminnallinen ja visuaalinen opetus antaa mahdollisuuden oppia konkreettisella tasolla analysoimista ja auttaa syntetisoimista.

Opetus vaihtelee paikallisten olosuhteiden, opettajan uskomusten ja käsitysten mukaisesti (Kangasniemi 2000, 8). Kangasniemi (2000, 23) antaa esimerkin. Jos opettajalla on uskomus, että matematiikka on sääntöjen oppimista, hän käyttää opettajakeskeistä työtapaa, johon liittyy esimerkiksi oppijoiden yksikseen suorittamat laskuharjoitukset. Jos taas opettajalla on uskomus, että matematiikan tehtävä voidaan ratkaista monella eri tavalla, hän käyttää yritys ja erehdys -lähestymistapaa matematiikan tehtävien ratkaisemisessa. Hän saattaa suosia enemmän oppijoiden ryhmä- ja parityöskentelyä. Ryhmätyössä tai parityöskentelyssä oppijat ratkaisevat tehtäviä yhdessä, kyselevät ja keskustelevat keskenään sekä arvioivat ratkaisuja, jolloin omakohtainen ajattelu pääsee esille ja oppijat voivat oppia toisiltaan ja näin kehittää ajatteluaan. Ryhmätyön kannalta keskeistä on, miten tehokkaasti oppijat keskittyvät sinä aikana oppimistehtäviin. (Kangasniemi 2000, 47).

Kangasniemen (2000, 57) tutkimukset osoittavat, että opettajat käyttivät suuremman osan viikoittaisesta opetusajasta opettajakeskeiseen opettamiseen, eli koko luokka kuunteli opettajan esitystä, sekä oppijoiden yksikseen suorittamiin laskuharjoituksiin. Ryhmätöitä käytettiin huomattavasti vähemmän ja kaksi kolmasosaa opettajista ei käyttänyt ryhmätöitä lainkaan. Opetusharjoittelun kuuluvien oppituntien havainnoinnit ja matematiikan opettajien kanssa käymäni keskustelut ovat samansuuntaisia. Esimerkiksi opetushavainnoinnissa eräs matematiikan opettaja kertoi, ettei käytä ryhmätöitä, koska oppijat eivät ryhmätöitä halua. Kangasniemen (2000, 57) tutkimuksen mukaan opettaja, jolla oli uskomus, että matematiikka on dynaamista ja ongelmanratkaisultaan moninaista käytti enemmän ryhmätyötä. Tutkimus lisäksi osoitti, jos opettaja oli uskomus, että matematiikan oppiminen edellyttää omaperäistä ajattelua, eikä vain sääntöjen ulkoa oppimista, niin opettaja käytti opettajakeskeistä työskentelyä. Siinä oppijan omakohtainen ajattelu ei suuremmin pääse esille. Ilmeisesti opettajat omalla esityksellään ja taitavilla kysymyksillä uskovat ohjaavansa ja kehittävänsä oppilaiden ajattelua.

Opettajan käsitys siitä, mitä matematiikka on oppiaineena, vaikuttaa myös opetukseen. Matematiikan tarkoituksena on ollut löytää yrityksen ja erehdyksen kautta käyttötarkoitukseen sopivia sääntöjä. Vasta antiikin kreikkalaiset kehittivät matematiikasta loogisia järjestelmiä, kuten geometrian. Siinä lähdetään yleisestä totuudesta eli aksioomasta ja asetetaan päättelyn lähtökohdaksi oletus. Näiden avulla johdetaan uusia lausekkeita, tuloksia. Matematiikassa käsiteltäville olioille esimerkiksi luku, vektori ja suora ei tarvitse olla todellista vastinetta. Matematiikassa pyritään kehittämään käytännön tilanteesta matemaattinen malli ja soveltamaan sitä esimerkiksi käytännössä tulevaan uuteen tilanteeseen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 33–34.) Matematiikassa käytettäviä ajattelustrategioita ovat esimerkiksi: luokittelu, järjestäminen, analogian muodostaminen, deduktiivinen ja induktiivinen päättely ja ongelmanratkaisutaidot. Keskeisiä ajatteluprosesseja ovat esimerkiksi: erikoistapaukseen siirtyminen, otaksumien esittäminen, yleistäminen ja vakuuttaminen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 19.)

Sahlberg ja Saharan (2002, 176) kirjoittaa, että keskustelua herättää virkamiesten, tutkijoiden ja opettajien keskuudessa se, pitäisikö matematiikkaa opettaa perinteisesti suurryhmissä vai erilaisia opetusmenetelmiä vaihdellen mukaan lukien yhteistoiminnalliset opetusmenetelmät pienryhmille. Matematiikka pidetään jopa sellaisena oppiaineena, jonka mukaan sekä oppijan että koulujärjestelmän menestyminen osittain määräytyy. Koska matematiikka on laadun tekijä, halutaan sen opettamisessa välttää riskejä, niin tämä selittää osittain sen, miksi monipuolisten opetusmenetelmien käyttäminen varsinkin ylemmillä luokilla on harvinaista. Myös opetusmenetelmien soveltaminen matematiikkaan on osoittautunut melko vaikeaksi. Yhteistoiminnallinen oppiminen ymmärretään koulumatematiikassa usein niin, että suuri opetusryhmä jaetaan pienemmiksi ryhmiksi, joille annetaan yhteisiä tehtäviä ratkaistavaksi. Tutkimuksissa on voitu kuitenkin osoittaa, ettei pelkkä pienryhmiin jakaminen ja töiden jakaminen ryhmille paranna opiskelun ja oppimisen laatua (Slavin 1990, Sahlberg & Saharan 2002, 177.) Itse asiassa saattaa käydä päinvastoin. Sahlberg ja Saharan (2002, 177) esittää, että yhteistoiminnallinen oppiminen voi olla tärkeä osa matematiikanopetusta. Yhteistoiminnallisen oppimisen onnistuminen on riippuvainen tehtävän luonteesta ja sopivan pienien ryhmien muodostamisesta. Sopivan pieni ryhmä on kaksi tai kolme oppijaa. Yksilölliseen opiskeluun tarkoitetut matematiikan tehtävät eivät yleensä sellaisenaan sovi yhteistoiminnallisen oppimisen tehtäviksi. Sellaisten tehtävien laatiminen, jotka haastavat koko ryhmän aprikoimaan ja ounastelemaan, mitä pitäisi tehdä, on kynnyskysymys matkalla kohti korkeamman asteen vuorovaikutusta, syvempää yhteistoiminnallisuutta ja parempaa oppimista. Sahlberg ja Saharan (2002, 182) uskoo, että matematiikasta keskustelu pienryhmässä, oppijoiden välinen vuorovaikutus ja yhdessä oppiminen saattavat omalta osaltaan myös muuttaa kuvaa matematiikasta yksinäisenä ja outona tiedonalana. (Sahlberg & Saharan 2002, 176–182.)

Sahlberg ja Saharan (2002, 196) kirjoittavat, että matematiikan opettajien ja opetuksen kehittäjien keskuudessa eri puolilla maailmaa vallitsee kohtalaisen pysyvä yhteisymmärrys siitä, että hyvä matematiikan opetus perustuu kuuteen tärkeään osa-alueeseen: opettajan esitykseen, keskusteluun, tarkoituksenmukaiseen käytännön toimintaan, perustaitojen harjaannuttamiseen ja varmistamiseen, ongelmanratkaisuun ja tutkimukselliseen työskentelyyn. Mielestäni nämä kaikki osa-alueet tuntuvat hyviltä huomioida opetuksessa. Matematiikkaa Sahlberg ja Saharan (2002, 197) mielestä opitaan tekemällä ja kokemalla, ei katselemalla ja kuuntelemalla.

Mitä vanhemmista oppilaista on kysymys, sitä tärkeämmäksi näyttävät koulutuksessa tulevan tietämisen korostaminen ja kokeista selviytyminen. Suuri harppaus tapahtuu silloin, kun oppilaat siirtyvät peruskoulusta toisen asteen koulutukseen. Monet lukiossa ja ammatillisissa oppilaitoksissa opettavat opettajat ovat sitä mieltä, että opetussuunnitelmat ja kurssivaatimukset ovat niin täyteen pakattuja, ettei opetuksessa ole yksinkertaisesti aikaa kokeilla uusia menetelmiä. yhteistoiminnallisen oppimisen menetelmät eivät siksi juurikaan kuulu toisen asteen työskentelytapoihin. (Sahlberg & Saharan 2002, 266.)

Esimerkiksi Malaty (1993, 10) kirjoittaa, että matematiikka on ajattelutapa, joka heijastaa ihmisen kykyä abstrahoida. Hän pyrkii opettamaan heuristisilla menetelmillä. Hänestä matemaattisen ajattelun tärkein ominaisuus on deduktiivisuus eli päättely etenee johtamalla yleistyksestä yksittäistapausta koskeva johtopäätös. Hänestä kausaaliajattelulle on annettava olennainen asema matematiikan opetuksessa. Kausaaliajattelussa esimerkiksi opettaja ohjaa oppijat matemaattisen todistuksen idean löytämisen lähteille, asioilla on siis syy. Koko matematiikka on ihmisen ajattelun tuotetta, esimerkiksi ihminen keksi numeron kaksi. Malaty (2003, 72) täsmentää, että matematiikka ei ole luonnontiedettä. Matematiikassa ihmisiä ei tyydytä pelkkä kokeileminen, joka voi johtaa suuriin virheisiin, joita matematiikassa ei sallita. Malayn (1993, 18) mukaan matematiikka on ollut esihistoriastaan lähtien kirjallista tiedettä eikä päässälaskua. Ilman kirjoittamista ei olisi ollut matematiikkaa. Kirjoittaminen on olennainen asia matematiikassa. Malaty (1993, 23) esittää matematiikan opetusprosessista, että matemaattisen kaavan soveltaminen ei kehitä ajattelua, vaan itse kaavan löytäminen. Kun oppijat itse löytävät matemaattisen kaavan, heille paljastuu, milloin sitä käytetään ja he ymmärtävät sen merkityksen. Malaty (1993, 99) huomauttaa, että arkielämän esimerkit voivat auttaa oppimaan aritmeettisia käsitteitä, mutta alkeellisimmatkin algebralliset käsitteet ovat kaukana arkielämästä. Ne ovat abstrakteja, jotka tulee abstrahoida. Matematiikassa ei voi luottaa tuloksiin, jotka saadaan aistien kautta, vaan matematiikan rakenne kasvaa koko ajan eteenpäin deduktiivisesti päättelemällä. Matematiikan lähtökohta on määrän ja muodon havainnoiminen, joita on kaikkialla (Malaty, 2003, 100–101). Malaty (2003, 108) kirjoittaa edelleen, että matematiikka on ala, jonka kautta kehitetään loogista päätöksen tekemistä ja valinnan vapautta. Matematiikassa kehitetään hahmotuskykyä. Hahmotettua asiaa analysoidaan ja matematiikan rakenteista valitaan sopivin ominaisuus ongelman ratkaisemiseksi. Yhteen ongelmaan voidaan löytää eri ratkaisuja. Kaikki ratkaisu hyväksytään, kun niissä ei ole loogista virhettä. Ratkaisun etsimisessä etsitään myös eleganttia ratkaisua.

Leppäaho (2007, 29) kertoo, että opetussuunnitelmissa ei tarkemmin kuvailla tai määritellä matemaattista ajattelua, mikä johtuu siitä, että käsite on laaja ja sen määritteleminen vaikeaa. Joutenlahti (2004, Leppäaho 2007, 31–32 mukaan) on kuitenkin esittänyt matemaattisen käsitteellisen ja menetelmä tiedon avulla, että matemaattinen ajattelu on oppijalle merkityksellisten matemaattisten tietojen prosessointia. Ajatteluprosessia suuntaavat ja rajaavat oppijan kyvyt, asenteet, uskomukset, senhetkiset tiedot ja taidot.

Matematiikan opettamista voidaan pitää selvemmin varhaisemman opitun varaan rakentuvana kuin monien muiden kouluaineiden oppimista. Arkimatematiikkaa opitaan arkisissa ja konkreettisissa tilanteissa ilman muodollista opettamista ja usein jäljittelemällä. Koulumatematiikassa on taas kyse erilaisista faktoista, säännöistä ja ratkaisuperiaatteista, joita opetetaan ja opitaan kouluissa. (Lyytinen, Korkiakangas & Lyytinen 2003, 183).

Vuorisen (2003, 21–23) mukaan matematiikan kehittymiselle tieteenä on olennaista, että uudet tulokset voidaan rakentaa vanhojen tulosten perustukselle, niitä hylkäämättä. Matematiikka on toisaalta menetelmätiede, jolla on yhdenmukaistava vaikutus useilla käyttöalueillaan, toisaalta yhtenä vanhimmista tieteistä se on enemmän kuin sovellustensa summa. Tossavainen (2004, 51) kirjoittaa, että tieteellistä matematiikkaa voidaan melko hyvin luonnehtia sanoilla aksiomaattinen, loogis-deduktiivinen ja abstrakti, kun koulumatematiikkaa voidaan luonnehtia sanoilla kokeellis-havainnollinen, reaalinen ja hyödyllinen.

On olemassa erilaisia pedagogisia näkemyksiä siitä, miten oppiminen tapahtuu. Opetuksen lähtökohtana on siis aina jokin oletus siitä, mitä oppiminen ja opettaminen ovat. Opetettavaa asiaa voidaan lähestyä eri tavoin. Ääripäinä ovat autoritäärinen ja heuristinen opetus. Autoritäärisessä opetuksessa ajatellaan, että oppilaan ponnistelu asian yhteydessä johtaa myös kiinnostumiseen asiasta. Heuristisessa opetuksessa lähtökohtana on oppijoiden kiinnostus ja tarpeet. Heuristisessa opetuksessa pyritään saamaan oppilaat innostumaan omista kokeiluistaan, ratkotaan avoimia ongelmia ja ohjataan keksimään yhteyksiä tai soveltamaan opetettuja periaatteita uusiin tilanteisiin. Autoritäärisessä opetuksessa tunnetut lait todennetaan yksinkertaisella kokeella, näytetään asiaan liittyvä demonstraatio tai oppijat tekevät laboratoriotöitä annettujen ohjeiden mukaan. (Ahtee & Pehkonen 2000, 76). Mielestäni sekä autoritäärinen että heuristista lähestymistapaa on hyvä käyttää vaihdellen, koska tietäminen ja ymmärtäminen sekä soveltaminen ovat yhtä arvokkaita yksilölle kuin yhteiskunnallekin. Käytännössä opettaja todennäköisesti toimiikin näiden ääripäiden välillä.

Lauttamus (1987, 23) esittää, että aikaisemmat oppimisteoriat ovat painottaneet ympäristön ja opetuksen merkitystä oppimisprosessissa, mutta kognitiivisen oppimisen psykologian mukaan oleellisen tärkeää olisi nähdä oppijan aktiivinen rooli oppimisessa. Lähtökohdaksi voisi ottaa opetusmenetelmien kehittäminen oppijoiden toiminnallisuutta lisäävään suuntaan korostamalla yksilöllisten ja ohjattujen harjoittelujen merkitystä. Harjoitusten tarkoituksena on harjoituttaa perusasioita johdetusti, korjata esiintyneet virheet ja antaa valmiuksia itsenäiseen työskentelyyn. Useissa tutkimuksissa on havaittu hyväksi, jos oppijat työskentelevät vain yhden tehtävän parissa kerrallaan. Matematiikan hierarkkisuuden vuoksi on kuitenkin tärkeää, että harjoituksia on riittävästi. (Lauttamus 1987, 23).

Kun opettaja tietää mitä opettaa ja miksi opetetaan, tulee hänen vielä päättää miten opettaa. On huomattava, ettei opetuksessa käytettävä oppikirja sido opettajaa millään tavalla, ellei hän itse päätä sitoutua siihen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 16.)

Yleensä ihmiset ajattelevat, että luovuudella ja matematiikalla ei ole mitään tekemistä toistensa kanssa. Matemaatikot ovat tiukasti eri mieltä. Matemaatikko Karl Kiesswettern väittää, että joustava ajattelu on eräs tärkeimmistä ominaisuuksista, joita menestyksekäs ongelmanratkaisija tarvitsee. Yleensä tutkija tai matemaatikko kokeilee ensin erilaisia erikoistapauksia. Kokeilujen perusteella hän saattaa asettaa hypoteesin, jota hän sitten yrittää todistaa oikeaksi. Avoimien tehtävien käyttö on yksi keino lisätä luovuutta matematiikan opetuksessa. (Hakkarainen, Bollström-Huttunen Pyysalo & Lonka 2005, 186–187.) Pehkonen (2003, 35) kirjoittaa samasta asiasta, että kun tarkastellaan matemaatikkoa, joka luo uutta matematiikkaa, emme voi sivuuttaa luovuuden merkitystä hänen toimissaan. Avoimien tehtävien käyttäminen edistää matematiikan opetusta tähän suuntaan. Verbaalisuus on aina yksiulotteisena yhdistettävissä logiikkaan, kun taas visuaalisuus liittyy intuitioon, tavallisimmin kaksi- tai kolmiulotteisena. Pehkonen (2003, 36) jatkaa, että sellaiset oppimisympäristöt, jotka tarjoavat oppijoille mahdollisuuksia tutkimiseen, nonverbaaliin ilmaisuun, laboratoriotyöskentelyyn ja moniaistiseen oppimiseen, voivat antaa oppijalle mahdollisuuksia saavuttaa uusia tasoja matematiikassa.

Tavanomaista kouluopetusta on syytetty siitä, että se pitää toimintaa ja oppimisympäristöä täysin erillisinä tasoina. Psykologiset tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että oppiminen on vahvasti tilannesidonnaista. Eräs useasti kirjallisuudessa kuvailtu opetusmalli on käyttää avoimia tehtäviä ymmärtämisen ja luovuuden edistämiseksi. Tähän on yhteydessä se, että oppimisen apuna käytetään myös konkreetteja materiaaleja ja mallien rakentamista. Avoimen lähestymistavan menetelmässä keskeistä ei ole tehtävien ratkaiseminen, vaan ongelmana on mahdollisimman monen erilaisen ratkaisukeinon keksiminen, toisin sanoen luovuuden harjaannuttaminen matematiikan avulla. Avoimia tehtäviä ratkaistaessa oppijoilla on vapaus tuoda mukaan lisäoletuksia ratkaisun aikana. Tällöin he käytännössä päätyvät erilaisiin, mutta aivan yhtä oikeisiin tuloksiin. Avoimiin tehtäviin onkin tavallisesti useita oikeita vastauksia. Avoimiin tehtäviin kuuluvat muun muassa arkielämän ongelmat, ongelman asettaminen, ongelmakentät, kysymyksettömät ongelmat, ongelmamuunnokset, projektityö ja tutkimustehtävät. Avoimia tehtäviä ratkaistaessa oppijat saavat työskennellä matemaatikon tapaan. Tutkimustyölle on tyypillistä, että alkutilanne on annettu. Tämän alkutilanteen pohjalta oppilas saa itse muotoilla ongelmansa ja ratkaista sen. Tässä opettaja nostaa käsiteltävästä tutkimustehtävästä uusia ongelmia esille oppijoiden ratkaisujen mukaan. (Hakkarainen, Bollström-Huttunen Pyysalo & Lonka 2005, 188–190.)

Koulun matematiikan opetus pitäisi tähdätä sekä laskutaitojen hankkimiseen että ymmärtämiseen. Kumpikaan näistä ei yksin riitä, koska runsas laskeminen ei vielä lisää ymmärtämistä eikä laskutaito lisäänny pelkästään ymmärtämisen avulla. Koulujen matematiikanopetuksen tavoitteena tulisikin olla laskutaitojen ja ymmärtämisen kehittäminen ja mielekäs yhteenpunominen. (Hakkarainen, Bollström-Huttunen Pyysalo & Lonka 2005, 192.)

Martio (2004, 42) kuvaa, että matematiikan voi määritellä kuten filosofi Oswald Spengler: matematiikka on sitä, mitä matemaatikot tekevät. Martio (2004, 43) jatkaa, että laskimien ja tietokoneiden mahdollisuudet mekaanisessa laskemisessa on otettava opetuksessa huomioon, mutta niiden ei pidä antaa aiheuttaa numerosokeutta. Ensin on opittava ymmärtämään laskutoimitukset ja vasta sitten otettava koneet esille. Laskimen käyttö opetuksessa on johtanut pahempiinkin vammoihin kuin numerosokeuteen. Laskimien grafiikka näyttää väärin tai tietokoneohjelman sijoitus monimutkaiseen lausekkeeseen tulee helposti virheitä. Koska tietokone tai laskin ei tee virheitä, luullaan vastausta oikeaksi. Tietokone ei koskaan pysty saavuttamaan luovaa toimintaa, sillä se työskentelee aina ohjelmointinsa puitteissa. Siksi sen ajattelu on jonomaista, ei holistista. Martio (2007) kertoo, että suomalaisesta keskustelusta ei löydy kriittistä puheenvuoroa laskimien käytöstä matematiikan alkeisopetuksessa. Laskimethan ovat kadonneet matematiikan todellisten käyttäjien pöydiltä jo vuosia sitten. Laskimien käyttö matematiikan opetuksessa ei ole mukautunut muutoksiin.

Vallitseva trendi koulujen matematiikan opetuksessa on ongelmanratkaisu. Matematiikan opetukselle on annettu vain välinearvo. Valitettavasti kaikessa järkevässä ja rationaalisessa työskentelyssä pitää ensin olla työkalut ja harjaannus niiden käyttöön. Matematiikan tunnilla ratkaistavat ongelmat eivät välttämättä ole niitä, joista on hyötyä myöhemmin. Martio (2004, 43) vertaa, että eihän yhteiskuntaopinkaan tunneilla opetella täyttämään työttömyysavustusten hakulomaketta, sillä kun tarve tulee vastaan, ovat lomakkeet jo muuttuneet. Martio (2004, 43) on sitä mieltä, että esimerkiksi Pythagoraan lauseella on pidempi käytännön kantavuus kuin talousmatematiikan osinkolaskuilla. Martio (2004, 44) epäilee kuvailevaa opetusta, joka johtaa helposti siihen, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaava ja transistorin kuva oppikirjassa ovat samanlaisia; kummastakaan oppilas ei ymmärrä mitään.

Seppälä (2004, 54) kirjoittaa, että hän on useaan kertaan oikaissut kaupan kassalla yhteenlaskusummia, jotka voivat olla aivan mielikuvituksellisia. Koneet laskevat laskuja, joita niihin syötetään. Päässälaskutaidosta on hyötyä. Seppälän mielestä matematiikan opettajilla on hyvin paljon perustuvanlaatuista opetettavaa ilman hienoja teorioita. Matematiikka on kieli ja kieltä ei voi käyttää, ellei ole sanoja ja yhteisiä käsitteitä. Seppälä esittää kysymyksen, onko olemassa matemaattista huumoria, voisiko sitä käyttää opetuksessa.

Lahtinen (2006, 61–62) kirjoittaa, että matematiikkaa opetetaan koulussa ensimmäisestä luokasta alkaen eli pitäisihän jokaisen tietää, mitä matematiikka on. Näin ei kuitenkaan ole. Syynä on se, että tämä valtava luomus on täysin abstrakti, aineeton ja näkymätön. Koulumatematiikka on ollut kivenlouhintaoppia. Eräs mahdollisuus on nostaa esiin matematiikan käsittämätön, lähes mystinen hyödyllisyys ihmisen toiminnoissa, kuten luonnonlaissa, koneissa, laitteissa, tietokoneohjelmissa ja sään ennustamisessa. Havainnoitsijan ongelmaksi tulee, että valmiissa koneissa ja laitteissa ei matematiikka näy. Ongelma on edelleen, miten kuvata näkymätöntä.

Shmakov ja Selikhova (2006) kirjoittaa, että oppijoita ei kiinnosta vain tiedon yksinkertaisuus ja hyöty. He ovat valmiita oppimaan ja käsittelemään tieteellisiäkin ja vaikeita asioita, jotka ovat kaukana arkielämästä.

Tossavainen (2005, 34) esittää, että henkilö, joka arvostaa matematiikkaa lähinnä sen käytännön sovellusten takia, oppii sitä eri tavalla kuin henkilö, jolle matematiikan merkitys on sen sisäisessä loogisessa kauneudessa.

Kivelä (2007, 28–29) kirjoittaa, että suurin osa oppijoista suuntautuu muualle kuin matemaatikon uralle ja heille tulisi kyetä näyttämään matematiikan merkitys erilaisten alojen työkaluna. Matemaatikon yleinen helmasynti on esittää asiat eksaktisti ja ajatella, että se riittää. Ymmärtäminen on yksinomaan oppijan vastuulla.

3 YLEISESTI MATEMATIIKAN OPISKELUA JA OPETTAMISTA VAIKEUTTAVIA ASIOITA

Tässä luvussa käsitellään oppimistyylin ja opetustavan löytämistä sekä virheellisiä käsityksiä ja uskomuksia matematiikkaan liittyen. Lisäksi käsitellään matematiikan oppimisvaikeuksia.

3.1 Oppimistyylin löytäminen

Kaikki ihmiset eivät opi samalla tavalla. Oman oppimistyylin löytäminen auttaa ymmärtämään oppimista. Oppijan lisäksi oppimistilanne ja opittava asia voivat vaikuttaa, mikä oppimistyyli soveltuu parhaiten tarkoitukseen. Yksi oppii parhaiten kuuntelemalla, toinen lukemalla ja kolmas tekemällä. Opetustapahtuma on sidoksissa ainakin aikaan, paikkaan, välineisiin ja oppijoihin. Lisäksi nämä ovat muuttuvia. Olen havainnut, että oppitunnin huolellisen valmistelun toimivuus varmistuu vasta kun käytännössä opettaa.

Oppimistyyleistä Kangasniemen (2000, 61) tutkimus tuo esille kaksijakoisuuden, joka saattaa vaikeuttaa matematiikan oppimista. Oppijat toisaalta eivät usko, että matematiikan oppiminen on suuremmaksi osaksi ulkoa oppimista, mutta ulkoa oppimista pidetään erittäin tärkeänä. Käytännössä tämä erittäin tärkeä, mutta vastenmielinen ulkoa oppiminen saattaa oppimistyylinä voittaa ymmärtävän oppimisen ja siihen tähtäävän opetuksen. Opetetaan ja opitaan miten asiat ovat, mutta ei opeteta eikä opita miksi ne ovat niin eli ymmärtävä oppiminen jää heikoksi.

3.2 Opetustavan löytäminen

Matematiikassa on tärkeä ymmärtää, miten asia esitetään matemaattisin symbolein, luvuin ja kuinka muotoiltu ongelma ratkaistaan. On myös ymmärrettävä, miten sama asia esitetään puhuttuna tai kerrottuna. Lisäksi on ymmärrettävä, missä tapahtumissa, havainnoissa, tilanteissa tai toiminnoissa kyseinen matemaattinen taito, ongelma tai lauseke voi esiintyä tai on hyödyllinen. Kuinka jonkin sanallisesti esitetyn tehtävän voi muuttaa toiminnalliseksi tapahtumaksi tai havainnoksi. Myös on ymmärrettävä, kuinka sanallisen ilmaisun voi muuttaa symbolein ja luvuin esitetyksi ja, kuinka jostakin toiminnallisesta mielikuvasta voi muodostaa sanallisesti tai matemaattisin symbolein esitetyn ongelman. (Ahonen Siiskonen & Aro 2004, 102.) Peruskoulun ylemmille luokille siirryttäessä mahdollisuus toiminnallistamiseen vähenee ja painopiste siirtyy enemmän matemaattisilla symboleilla työskentelyyn. Kun toiminnallistettavia mielikuvia ei harjoitella, oppijoiden taidot muuttaa matemaattisin symbolein tai puhutun kielen avulla esitettyjä matemaattisia ongelmia mielikuviksi jäävät puutteelliseksi. (Ahonen Siiskonen & Aro 2004, 100–101.)

Koska matematiikan ymmärtäminen perustuu aiemmin opitun varaan, puutteet perustaidoissa kertaantuvat ja kasautuvat myöhemmässä oppimisessa. Sen vuoksi perustaitoja on hyvä harjoitella niin kauan, että ne ovat hallinnassa. Niitä on myös hyvä kerrata aika ajoin. Oppimista helpottaa, jos opettajalla on rohkeutta opettaa matematiikkaa oppilaiden taitojen ja valmiuksien mukaan. (Ahonen Siiskonen & Aro 2004, 102.) Esimerkkinä oppijan päättelykykyä kehittää eri ratkaisujen selittäminen ja perusteleminen. Oppijoita voidaan myös ohjata itse keksimään sanallisia tehtäviä ja mekaanisista laskuista voidaan keksiä esimerkiksi tarinoita. (Ahonen Siiskonen & Aro 2004, 116.)

Tutkimukset ovat osoittaneet, että koulujen matematiikanopetuksen kehittämisen este on opettajien matematiikkakuva, toisin sanoen heidän käsityksensä siitä, millaista on hyvä matematiikkaopetus. Jos esimerkiksi avoin opetus ei kuulu opettajan opetuskäsitykseen, opetus ei ole tuloksellista, vaikka opettaja olisi saanut asianmukaisen koulutuksen opetusmenetelmien käyttöön. (Hakkarainen, Bollström-Huttunen, Pyysalo & Lonka 2005, 192.)

Kangasniemi (2000, 64) esittää ryhmä- ja parityöskentelyn lisäämistä matematiikan opetuksessa oppijoiden keskinäisen vuorovaikutuksen lisäämiseksi opiskelu- ja oppimistilanteissa. Kangasniemi (2000, 64) muistuttaa, että opettajan ohjaava, neuvova, kyselevä, havainnoiva, tarkkaileva ja arvioiva toiminta on olennainen osa oppilaiden pari- ja ryhmätyöskentelyä. Esimerkiksi yhteistoiminnallinen oppiminen kehitettiin käytännön tarpeesta amerikkalaisnuorten oppimisvaikeuksien voittamiseksi. (Ahtee & Pehkonen 2000, 57.) Ahtola (2001, 35) esittää kahden opettajan -mallia. Se antaa paremmin mahdollisuuden pienryhmissä opiskeluun, joiden toimintaa opettajat voisivat tukea ja ohjata lähietäisyydeltä. Toinen opettaja pystynee myös antamaan välittömästi apua oppijalle esimerkiksi laskuharjoituksia tehdessä.

Matematiikka sisältää monia sellaisia osioita, joita voi konkretisoida. Esimerkiksi mitta-astioilla voi hahmottaa tilavuusmittoja tai punnuksilla voi kokeilla painoa, kun opetetaan yksikkömuunnoksia. Näin todelliset koot ja kokoerot tulevat esiin. Matemaattiset havaintovälineet, kuten mitat, tulisi olla heti opetettaessa saatavilla, jos jollakin oppijalla ei muutoin suju.

3.3 Käsitykset ja uskomukset

Tossavainen (2007, 25–26) esittää, että esimerkiksi yhtälöiden käsitteeseen liittyvien väärinkäsitysten ja virheellisten tulkintojen määrä on lähes rajattoman suuri sekä oppijoilla että heidän opettajillaan. Toisin sanoen matematiikan osaamisen asiantuntijoiden koulutus ei automaattisesti tuota myös matematiikan oppimisen asiantuntijoita. Kouluopetuksen ohjaavissa normeissa tapahtuneita muutoksia, tarkemmin sanottuna sisältöjen kevenemistä ja kasvatustieteilijöiden aikaansaama käytännönläheisyyden ja ongelmanratkaisun korostaminen, on aikaan saanut 20 vuoden aikana tietyillä matematiikan osa-alueilla osaamisen laskun jopa romahtamisen. Tossavainen (2005, 35) esittää, että oppijoiden vakavammat vaikeudet matematiikan oppimisessa näyttävät liittyvän enemmän representaatioiden tasolla tapahtuvan ajattelun kääntämiseen matematiikan kielelle ja päinvastoin kuin varsinainen ongelman ratkaiseminen. Matematiikan oppimisen ongelmat ovat usein enemmän kielellisiä kuin varsinaisesti matemaattisia.

Oppijoilla on havaittu myös virheellisiä käsityksiä matematiikkaan liittyen. Esimerkiksi kertominen tekee suuremmaksi ja jakaminen pienemmäksi. Tällaiset virheelliset käsitykset johtavat systemaattisiin virheisiin. Virheellisten käsitysten poistamiseksi oppijoiden tulee saada tiedostamaan ja ymmärtämään virheellinen toiminta. (Ahtee & Pehkonen 2000, 42.) Mielestäni esimerkiksi opettaja voi ottaa esiin uskomuksen romuttavia havainnollistavia esimerkkejä, jolla asia tulee tietoisemmaksi, joka taas auttaa muuttamaan virheellistä käsitystä. Opettajan haaste on tunnistaa uskomukset ja huomata ne.

Malaty (1993, 114) mukaan väärät käsitykset matematiikassa ovat tärkein syy matematiikan opetuksen ongelmiin. Oppijat eivät tiedä, että matematiikka on looginen rakenne, jonka oppijat itse löytävät koulussa ajattelun kautta. Oppijat eivät ole saaneet koulussa sellaista kuvaa, että suurin osa oppitunnista käytetään matemaattisten lauseiden periaatteiden ymmärtämiseen, vaan heille on jäänyt mielikuva valmiista säännöistä ja sen käytön runsaasta harjoittelusta.

Kangasniemi (2000, 20) mielestäni kuvaa hyvin uskomusta, että matematiikan tehtävä on ratkaistava lyhyessä ajassa. Tällainen uskomus saattaa kehittyä oppitunnilla, kun tehtävä ratkaistaan nopeasti ajan puutteen vuoksi. Lisäksi kokeissa on monta tehtävää ja aikaa vähän niiden ratkaisemiseen. Tällaisen kokemuksen pohjalta oppijoille muodostuu uskomuksia, että matematiikan tehtävät on ratkaistava lyhyessä ajassa, jos siihen menee liikaa aikaa, niin suoritus on keskeytettävä ja/tai pyydettävä apua opettajalta tai muilta. Näin saattaa kehittyä myös uskomus itsestä matematiikassa ja opitaan avuttomiksi ongelmanratkaisijoiksi. Lisäksi Kangasniemi (2000, 20) kirjoittaa, että matematiikkaan liittyvien asioiden tietäminen ei tee oppijoita hyviksi matematiikassa, jos heidän uskomuksensa estävät heitä käyttämästä tietojaan. Hakkarainen, Lonka ja Lipponen (2005, 39) toteavat, että jos uskomusjärjestelmää ei koskaan kyseenalaisteta, siitä muodostuu totuus.

3.4 Oppimisvaikeudet

Lauttamus (1987, 147) kirjoittaa yhteenvedossa tutkimuksessaan ammattikoulun oppimisvaikeudet muun muassa, että opettajien arviointien mukaan vaikeuksia tuottavat prosenttilaskut, peruslaskutoimitukset, juuri- ja potenssikäsitteet sekä murtoluvut. Lisäksi Lauttamus (1987, 148) esittää, että matematiikan oppimisvaikeuksiin mahdollisesti auttaisi asioiden kertaaminen enemmän ammatteihin liittyvien sovellutusten avulla. Hän esittää, että hitaimmille oppilaille tulisi luoda mahdollisuudet saada perusteellista ja rauhassa etenevää opetusta esimerkiksi samanaikaisopetuksena pienryhmässä, koska vaikeaksi osoittautuneet asiat voidaan opettaa konkreettisemmassa ja havainnollisemmassa muodossa ja ennen kaikkea käyttää riittävästi aikaa (Lauttamus 187, 144).

Ahtola (2001, 36) toteaa, että suunnitelmallisuutta on hyvä opettaa ongelmanratkaisustrategioiden avulla, koska oppijat, joilla on matematiikassa oppimisvaikeuksia, eivät useinkaan pysty etenemään sanallisen tehtävän ratkaisussa loogisesti, vaan heidän toimintansa on hätäistä, harkitsematonta ja usein arvailua. Jos oppija pystyy edes osittain sisäistämään ongelmanratkaisu keinoja, hän saa käyttöönsä tehokkaan keinon jäsentää tietoja ja edetä loogisemmin kuin ennen.

Matematiikan oppimisvaikeutta voidaan vähentää, kun käytetään monipuolisia opetusmenetelmiä. Oppitunnilla voidaan samaa matemaattista ongelmaa, operaatioita tai lainalaisuutta havainnoida ja tutkia eri tavoin. Havainnollistaminen ja konkretisoiminen lisäävät opetuksen vaikuttavuutta ja pitkäaikaista tehoa. Kun oppija samanaikaisesti näkee, kuulee ja tekee eli käyttää mahdollisimman monia aisteja oppimisvälineenä, hänen oppimistuloksensa yleensä paranevat. (Ahtola 2001, 38.) Huomioitava on kuitenkin ihmisen yksikanavainen vastaanotto niin, etteivät aistit ja aivot kuormitu liikaa.

Räsänen ja Ahonen (2005, 191–226) tarkastelevat matematiikan oppimisvaikeutta aivotoiminnan häiriön seurauksena. He arvioivat, että kirjoitusmotoriikkaan liittyvät vaikeudet olisivat vähintään kaksi kertaa yleisempiä oppijoilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Näyttäisi, että matemaattisten oppimisvaikeuksien esiintyminen ainoana oppimisvaikeutena on harvinaisempaa. Matemaattiset taidot ovat myös selvemmin kuin monet muut taidot hierarkkisesti rakentuvia, joten opetukseen liittyvät puutteet heijastuvat oppimisessa. Matematiikan oppiminen on yhteydessä sellaisiin kykyihin kuin yleinen älyllinen taso, verbaaliset ja visuo-spatiaaliset kyvyt sekä spesifit numeeriset taidot. Akalkulioissa eli aikuisten aivovaurioista johtuvia laskemisvaikeuksista voidaan erotella kolme tyyppiä. Ensimmäinen on numeroiden ja lukujen lukemis- ja kirjoittamiskyvyttömyys. Toinen on spatiaalinen akalkulia eli spatiaalisen organisaation häiriö, joka vaikeuttaa numeroiden sijoittelua ja järjestyksen säilyttämistä. Kolmas tyyppi on anaritmetria, jossa kyse on vaikeudesta suorittaa aritmeettisia operaatioita. Spatiaalinen akalkulia ehkä yleisin, joka ilmenee vaikeutena numeroiden sijoittelussa allekkain ja laskemissuunnissa. Lisäksi nolla saattaa unohtua helposti. Sen sijaan numeeriset faktat, kertotaulu ja laskutoimitusten etenemisjärjestys sujuu hyvin. Päässälasku sujuu paremmin kuin kynäpaperitehtävät. Anaritmetriassa oppijalla on hyvät numeeriset tiedot, mutta heille on tyypillistä eri laskutapojen suoritusten sekoittaminen. Ongelmaan oletetaan taustalla olevan muistitoimintoihin liittyvät pulmat. Näiden kolmentyypin lisäksi on vielä tarkkaavaisuudessa ja sarjallisessa prosessoinnissa ilmenevät vaikeudet.

Lurian on kuvannut neljää aritmeettista vaikeutta. Ensimmäiselle on tyypillistä logiikan häiriöt. Vaikeuksia esiintyy suoriutua simultaania spatiaalista synteesiä vaativista tehtävistä, kuten esimerkiksi ”piirrä kolmio ristin alle”. Lisäksi vaikeuksia esiintyy paikka-arvojen, kymmenylitysten ymmärtämisessä sekä nollan käytössä. Toiselle tyypille on vaikeus suunnitella matemaattista suoritusta. Hän ei pysty ottamaan huomioon suoritusehtoja. Kolmatta ryhmää luonnehtii pidättäytyminen sellaisissa suoritustavoissa, jotka eivät enää vastaa tehtävässä tapahtuneita muutoksia. Neljä vaikeustyyppi kuvaa vaikeutta yksinkertaisten laskutoimitusten suorittamisessa, vaikka oppija ymmärtäisikin tehtävän logiikan. Matemaattisten käsitteiden ymmärtämisvaikeus, joka on yhteydessä sensomotoristen kokemusten puutteisiin, vaikuttavat myöhemmissä kehitysvaiheissa rajoittavasti abstraktin ajattelun kehittymiseen ja sitä kautta matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen. Neuropsykologisesti tarkasteltuna matemaattisten suoritusten taustalla on monimutkainen toiminnallinen järjestelmä, johon kuuluu osia aivoston eri alueilta ja tasoilta. Mikäli oppija hallitsee hyvin peruslaskutoimitukset, muttei kykene ratkaisemaan soveltavia tehtäviä, ongelma voi liittyä muun muassa tarkkaavaisuuteen, kielellisiin tai yleisempiin ongelmanratkaisukykyihin. (Räsänen & Ahonen 2005, 191–226.)

Matemaattiset säännönmukaisuudet on talletettuna pitkäkestoiseen muistiin. Varsinainen matemaattisten ongelmien ratkaiseminen tapahtuu työmuistissa. Työmuistista ainakin fonologinen silmukka, visuaalis-spatiaalinen luonnoslehtiö ja työmuistin keskusyksikkö osallistuvat matemaattiseen suoritukseen. Fonologista silmukkaa tarvitaan lukujonotaitojen hallinnassa, aritmeettisten taitojen kehityksessä ja vaativissa päässälaskuissa. Visuaalis-spatiaalinen luonnoslehtiö ei juuri osallistu laskusuoritukseen. Numeroiden ja matemaattisten symbolien ymmärtäminen vaatii visuaalis-spatiaalista hahmottamista. Visuaalis-spatiaalisen luonnoslehtiöllä on suuri merkitys matematiikan hallinnalle. Muun muassa kyky käsitellä mentaalisia mielikuvia ja käännellä abstrakteja esineitä mielessään korreloivat visuaalis-spatiaaliseen työmuistiin. Työmuistin keskusyksikön oletetaan tekevän kaikki vaativat ongelmanratkaisut ja päätökset. Lisäksi se valvoo kognitiivista suoritusta ja korjaa virheitä. Matematiikan oppimisen yhteydessä myös affektiivisillä eli mielialaan liittyvillä tekijöillä on vaikutusta. Esimerkiksi ahdistuneisuus pienentää työmuistikapasiteettia. Oletettavaa on, että pieni työmuistikapasiteetti vaikeuttaa matematiikan oppimista. (Räsänen & Ahonen 2005, 242–248.)

Puhdas matemaattisen hahmottamisen vaikeus on melko harvinaista, mutta matematiikan tunnilla näkyvät kuitenkin myös erilaiset hahmottamiseen liittyvät vaikeudet. Ongelma saattaa ilmetä pulmina ymmärtää esimerkiksi sanallisia tehtäviä, lukusuoraa, koordinaatistoa tai kolmiulotteista geometriaa, vaikeutena oppia ulkoa kertotaulua tai soveltaa kaavaa käytännössä. Oppimisvaikeuksiin voi auttaa konkretisoiminen ja visualisoiminen. Matematiikan symboleja voi värittää, jos se auttaa hahmottamaan esimerkiksi suurempi kuin sinisellä ja pienempi kuin punaisella. Oppimisvaikeus usein johtuu heikosta työmuistista, joten apuvälineiden salliminen ja laskimen käyttö sekä tiedon jakaminen pienissä osissa mahdollisesti helpottaa oppimista. Peruskäsitteiden termien tarkka selittäminen saattaa auttaa. Matematiikasta voi myös kertoa tarinoita, piirtää ja kirjoittaa niitä. Matemaattisiin käsitteisiin voi liittää mielikuvia. Sanallisen tehtävän ääneen lukeminen voi auttaa. Arvioinnissa ei tulisi mitata nopeutta tai asian automatisoitumista, vaan osaamista. (Hämäläinen, Liias, Taarna & Valkama 2007, 246–250.) Poikkeuksena ovat muun muassa lääkelaskut, joissa tulee osata soveltaa erilaisia laskemisen tapoja nopeasti ja oikein. Anna siis aikaa omaksua asiat.

4 HAVAINNOLLISTAMINEN OPETUKSESSA

Oppiessamme, työskennellessämme ja ollessamme vuorovaikutuksessa toisten kanssa, vastaanotamme tietoa kaikilla aisteillamme. Kuitenkin pääasiassa käytämme visuaalista näköaistiamme, auditiivista kuuloaistiamme ja kinesteettisiä liikeaistiamme ja taktillista tuntoaistiamme. Tässä kehityshankkeessa en käsittele yksityiskohtaisesti aisteja, mutta olen tutustunut niihin tämän kehityshankkeen puitteissa. Yleisesti havainnollistaminen on laaja asia. Tässä luvussa esitän havainnollistamiseen liittyviä asioita siltä osin, kuin ne liittyvät opetusesimerkkeihini. Koska havainnollistaminen ja konkretisointi ovat lähellä toisiaan, niin olen tarkastellut myös yhteistoiminnallista opetusmenetelmää. Lisäksi matematiikka on abstraktia, niin mielenkiintoni kohdistuu konkreettiseen tapaan opettaa sitä.

4.1 Havaitseminen ja havainnollistaminen

Opetuksen sisällöksi eivät riitä pelkästään toteavat asiatiedot. Opettamiseen pitää saada jotakin, mikä synnyttää havaintoja, elämyksiä ja vetoaa erilaisiin oppimistapoihin. Havainnollistamisella tarkoitetaan tässä kaikkia niitä keinoja, joilla syvennetään opetusta, konkretisoidaan asiaa tai käsitteitä, helpotetaan hahmottamista, ymmärtämistä ja muistamista, kohdistetaan ja ylläpidetään oppijan tarkkaavaisuutta, herätetään kiinnostusta ja annetaan virikkeitä sekä helpotetaan opittavan ilmaisua. Havainnollistaminen voidaan perustaa kieleen, kuten sanat, kielikuvat, vertaukset, esimerkit, vastakohdat, rinnastukset, toisto, liioittelu ja kysymykset. Havainnollistaminen voidaan perustaa myös kuvaan, kuten valokuva, piirrokset, grafiikka ja kaaviot. Lisäksi havainnollistaminen voidaan perustaa toimintaan, kuten tekemiseen, leikkimiseen, pelaamiseen ja ratkaisemiseen.

Havaitsemiselle on ominaista tiedon valikointi ja tulkinta. Mitä tarkkaavammin seuraamme yhtä tapahtumaa, sitä vähemmän voimme havainnoida muita, tämä pakottaa valikointiin. Lisäksi ihmisen hetkellisen tiedon käsittelykapasiteetti on rajallinen. Ihminen näkee, kuulee ja niin edelleen havaitsemansa jonakin eli ihminen tulkitsee. Havaintomaailmamme on merkitysten, ei ärsykkeiden maailma. Siten havaitsemista säätelevät biologiset hermostoprosessit ja toisaalta havaitsijan käsitykset, odotukset ja tavoitteet. Havaitseminen on jatkuvaa, ympäristöön suuntautunutta tiedon hakua (Rauste-von Wright & von Wrigh 1994, 23.) Valitsemme ennakoimalla sen mitä havaitsemme, mitä näemme ja kuulemme. Yleensä huomaamme havaintokentästä poikkeavan asian. Jos tarkkaavaisuuden alue on rajallinen, havainto on nopea. Voidaan olettaa, että kuvien näkeminen ei riipu vain siitä, mitä näemme, vaan myös aivoihin aikaisempien havaintojen perusteella syntyneistä malleista. Ulkoisen todellisuuden ohella voimme suunnata tarkkaavaisuutta myös oman mielemme sisältöön. Haemme muististamme tietoa valikoiden ja tavoitteellisesti. (Ahvenainen & Holopainen 2005, 24, 47.)

Havaintoja voidaan tehdä kaikilla aisteilla. Esimerkiksi kun tunnustelee käsissä kappaleen painoa, voi samalla kiinnittää huomiota sen pehmeyteen, sileyteen tai lämpöisyyteen. Havaintojen tekemiseen liittyy myös vertailua, mieleen painamista ja merkintöjen tekemistä. (Ahtee & Pehkonen 2000, 49.)

Opettaja voi havainnollistaa eri tavoin opetusta. Opettaja voi käyttää oppijoiden hahmottamistapaa hyväksi löytääkseen havainnollistamiskeinoja. Uusikylä ja Atjonen (2002, 135–136) kirjoittaa, että havaintojen kautta oivalletaan ilmiöitä yhdistäviä ja erottavia piirteitä, mikä valaa vankan pohjan ilmiöitä kuvaavien käsitteiden teoreettiselle hallinnalle. Esimerkiksi oppiakseen ymmärtämään geometrian keskeisiä ideoita ja teorioita oppijoilla on oltava kokemuksia erilaisista tapahtumista ja ilmiöistä. Lisäksi havaitsemalla oppija muun muassa löytää säännönmukaisuuksia ja syy-seuraussuhteita. Havaitseminen on myös yksi keino tukea oppijan prosessoimaan tietoa ja tallentamaan sitä pitkäkestoiseen muistiin. Opettajan rooli ja tehtävä muuttuu tiedon jakajan roolista oppimisen ohjaajan rooliin. Opettajan tulee myös antaa oppijoiden havainnollistaa oppimaansa esimerkiksi kirjoitetuin sanoin, piirroksin tai käyttämällä vaikkapa joukko-oppia. Lisäksi opettajan tulee huomioida matematiikan oppimista vaikeuttavia asioita erimerkiksi tekemällä eritasoisia havainnollistavia tehtäviä.

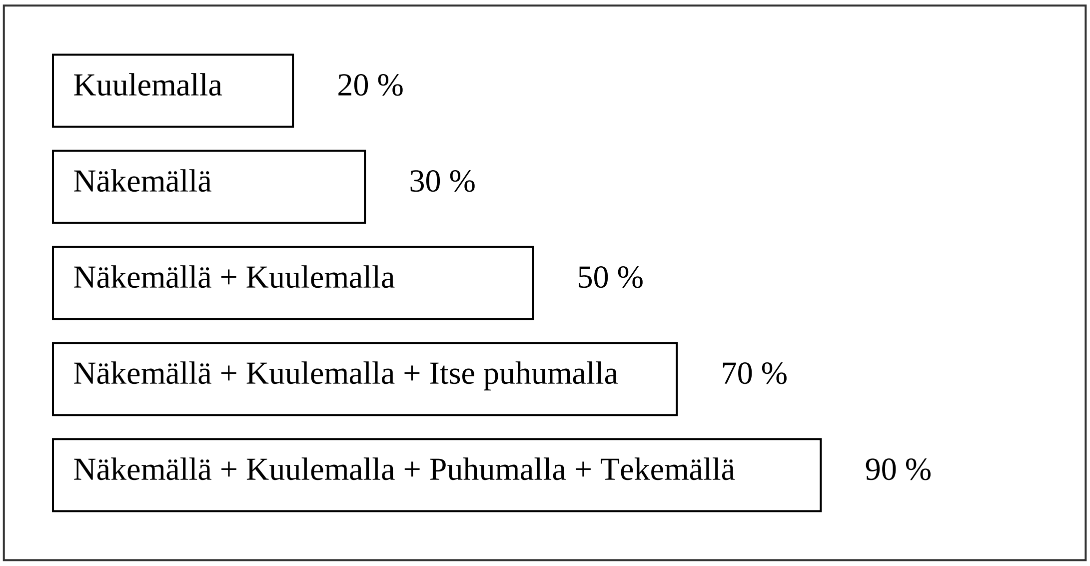
Havainnollistavassa opetuksessa on oleellista sopivan abstraktiotason valinta suhteessa opiskeltavaan asiaan, oppijoihin, aikaan ja materiaalisiin resursseihin. Valinta on opettajalta jatkuvaa kompromissien tekemistä. Korkea abstraktiotaso usein johtuu ajan ja materiaalien puutteesta. Konkreettista on opetus, joka on lähellä elettyä todellisuutta. Opitut asiat saavat kokemuksen avulla tajuttavia sisältöjä. Konkreettisuus on käsitteenä laajempi kuin havainnollisuus. Usein havainnollisuus auttaa konkretisoimista, mutta ei aina, sillä voimme tehdä aisteihin perustuvia havaintoja myös hyvin abstrakteista asioista. Esimerkiksi lukuja ja symboleja sisältävät kaaviot antavat selkeän visuaalisen kuvan esimerkiksi jonkun koneen toiminnasta, mutta eivät auta ymmärtämään, miten kaavio ja kone liittyvät toisiinsa. Jossain tilanteissa opetus voi olla havainnollista ja liikkua korkealla abstraktiotasolla tai se voi epähavainnollisena hyvin konkreettista. Esimerkiksi tarinan kertominen voi konkretisoida asian, vaikka se ei ole havainnollista vedotessaan vain kuuloaistiin. Toisaalta esimerkiksi kuvasymboli Jumalan kolminaisuudesta voi olla havainnollinen, mutta epäkonkreettinen. Vuorinen (2005, 43) varoittaa opettajaa rakastumasta havainnollisuuteen, jottei abstrakteista sanasymboleista siirryttäisi vain visuaalisiin symboleihin ja elämyksen sekä kokemuksen maailma unohtuisi.

Induktiivisella lähestymistavalla tarkoitetaan opetusprosessia, joka lähtee liikkeelle yksittäistapauksesta ja etenee yleiseen periaatteeseen tai teoriaan. Esimerkiksi edetään kokemuksesta ymmärtämiseen, läheltä kauas ja nykyhetkestä menneisyyteen. Oppijoiden omasta kokemuksesta tai jostain konkreettisesta esimerkistä lähtevän opetuksen vahvuutena on pidettävä ennen kaikkea hyvää motivoimiskykyä ja teorian ankkuroimista alusta alkaen käytännön kokemuksiin. Deduktiivisella lähestymistavalla tarkoitetaan, että edetään yleisestä yksittäistapaukseen. Käytännön opetustyössä saatetaan yhdenkin oppitunnin aikana vaihtaa useita kertoja induktiivisesta lähestymistavasta deduktiiviseen ja päinvastoin. Opettajan tulee päättää, onko asian opettamisessa edettävä induktiivisesti vai deduktiivisesti. Tiedollisesti painottuvien asioiden opettamisessa on yleensä tarkoituksen mukaisempaa ottaa lähtökohdaksi yleinen periaate, jota sitten harjoitusten avulla sovelletaan käytännön tilanteisiin. Kun taas on kyse ihmissuhteisiin ja elämäntaitoihin liittyvistä asioista ja motivaatio on heikko, niin induktiivinen lähestymistapa on kannattavampi. (Vuorinen 2005, 41–49.)

Havainnollistamisen myönteisiä vaikutuksia on mahdollisuus edistä ymmärrystä ja mahdollisuus käyttää monia esitysmuotoja esimerkiksi tekstiä, kuvia, puhuttua kieltä ja animaatiota. Lisäksi näitä esitysmuotoja voidaan käyttää yksinään tai yhdistää niitä tukemaan toisiaan. Havainnollistamiseen liittyy myös liiallisen yksinkertaistamisen vaara, jolloin havainnollistaminen saattaa estää käsitteellisen tiedon rakentamisen. Liika havainnollistaminen voi ylittää oppijan kyvyn hallita suurta määrää tietoa, jolloin syntyy kognitiivinen ylikuormitus. (Nurmi & Jaakkola.)

Havainnollistaminen on keskeistä, kun matematiikassa opetetaan abstrakteja asioita. Havainnollistamisen tavoitteena on konkretisoida asia esimerkiksi piirroksin tai välineiden avulla. Välineet voivat olla esimerkiksi CD-levyjä, palloja, videoita sekä demonstraatioita ja laboratoriovälineitä. Havaintovälineiden avulla pyritään antamaan monipuolinen kuva asiasta tai kiinnittämään huomio tiettyihin keskeisiin yksityiskohtiin. Havaintoväline voi löytyä luokkahuoneesta jo valmiina tai opettaja voi myös käyttää oppijoita hyväksi välineiden valmistuksessa ja hankinnassa. Koskenniemi ja Hälinen (1970, 133, Ahteen & Pehkonen, 47 mukaan) varoittavat opettajaa kuitenkin liiallisesta havainnoinnista, koska abstraktin ajattelun kehitys voi silloin ehkäistyä, vaikka se on nimenomaan tavoitteena. Opettajan tulee siis tarkoin miettiä, minkälaisten havaintovälineiden käyttö auttaa oppijoita opetettavan asian olennaisten seikkojen oivaltamisessa.

Havainnollistus lisää oivallusta ja muistamista. Mitä lähemmäksi todellista tekemistä päästään, sitä voimakkaammin asiat jäävät mieleen. Kuulemisen käyttö lisää omaksumista 20 %. Näkeminen lisää 30 % omaksumista. Sekä näkeminen että kuuleminen lisää omaksumista 50 %. Näkeminen, kuuleminen ja itse puhuminen lisää omaksumista 70 %. Kun edelliseen vielä lisätään tekeminen, päästään 90 %. Eri aistien käyttö on esitetty kuviossa 1. Havainnollistuksen suunnittelussa on hyvä yksilöidä tavoitteet. Eri tavoitteisiin sopivien keinojen ideointi on konkreettisempaa ja tuloksellisempaan kuin havainnollistuksen miettiminen yleensä. (Repo & Nuutinen 2003, 148–149.)



Kuvio 1. Arvio siitä, miten paljon aistien käyttö vaikuttaa asioiden omaksumiseen. (Repo & Nuutinen 2003, 149.)

4.1.1 Kielellinen havainnollistaminen

Kielellinen havainnollistaminen on esimerkiksi outojen ilmausten selostamista, numerotietojen pyöristämistä, vertaamista oppijoille tuttuihin asioihin ja käytännön esimerkit. Esimerkit valaisevat, jopa tutuista asioista kerrotut uudet ja tuoreet esimerkit avartavat näkemystä ja lisäävät tietoa. Myös tarinat, sadut, lorut, vitsit ja kielenkäyttö havainnollistavat asiaa. Matematiikan historiallinen kehittyminen ja tähän liittyvät tarinat ja henkilöhistoriat motivoivat ja innostavat oppilaita (Ahtee & Pehkonen 2000, 66). Matematiikan historian kautta tulee myös ilmi, että teoriat ja käsitteet ovat muuttuvia ja muokkaantuvat jatkuvasti. Kieli on puheviestinnässä keskeinen. Selkeää ja ymmärrettävää puhetta on helppo tulkita ja tulkata. Puhekieltä voi havainnollistaa verbien aktiivi muotojen käytöllä, esimerkeillä, puhutteluilla ja kohdistamisilla, konkretisoimalla sanoja ja ilmauksia sekä erilaisilla tehokeinoilla muun muassa äänenpainoilla ja tauoilla. Havainnollistamiseen vaikuttaa myös sanojen merkitykseen liittyvät välitykset. Liiallisella värittämisellä asian selkeys tosin usein kärsii. (Myllylä 2008.)

4.1.2 Kuvallinen havainnollistaminen

Heijastamalla esimerkiksi materiaalia valkokankaalle voidaan merkittävästi tehostaa opetusta. Näin saadaan näköaisti aktivoitumaan. Kuuntelu voi kuitenkin vaikeutua, jos ei onnistuta sovittamaan yhteen kuuntelua ja katselua ja jos kuuntelijoiden odotetaan koko ajan tuijottavan valkokankaalle. Yleensä kuva innostaa, ja parhaimmillaan se täydentää puhetta ja aktivoi, mutta sille on annettava hahmottumisaika. Niin kauan kuin oppija tutkii näkönsä avulla uutta asiaa, hän ei pysty kuulemaan puhetta. Sama koskee tekstin lukemista. Molemmat onnistuisivat, jos lukeminen ja kuuntelu etenisivät täsmälleen samaan tahtiin ja jos niille jäisi omaa aikaa, siis opettaja olisi hiljaa niin kauan, että jokainen on varmasti lukenut kalvon. Yleensä kumpikaan menettely ei tahdo onnistua. Jos oppijat tekevät vielä muistiinpanoja, voi tuloksena olla ”tikkailmiö”: oppija yrittää epätoivoisesti ehtiä jäljentää asiat valkokankaalta, ja katse pomppii kankaalle, muistiinpanoihin, kankaalle ja niin edelleen. Kuka ehtii kuunnella ja entä seurata kehonviestintää ja pohtia omaa tulkintaa? Opettajan tulisi auttaa keskittymään. On siis hyvä miettiä, miten esittää kuvan idean ja onko aikaa edetä rauhallisesti. Lisäksi on hyvä suunnitella, miten näytetään heijastimelta tai valkokankaalta tarkoitettua kohtaa, reittiä, aluetta tai muuta sellaista. Käytetäänkö osittamiseen valokynää, nuolia, karttakeppiä vai jotain muuta. Mitä oppijat tarkkaan ottaen näkevät heijasteessa, näkevätkö he vain sen kohdan josta ollaan puhumassa vai onko valkokangas täynnä tekstiä, josta oppijat koettavat poimia sopivia kohtia. Valmiista heijasteesta voi näyttää vain osan ja peittää muun. Idea on hyvä, mutta toteutus hankalaa, ja osaa kuulijoista peittely häiritsee. Auttaa, ettet tungeta kalvoja liian täyteen: vain sen verran asiaa kuin kerralla peittelemättä pystytään näyttämään. On tarjottava kuitenkin oppijoille kiintopiste, joka auttaa hahmottamaan opittavaa. Tavallista konekirjoitusta tai kirjan tekstiä ei pidä heijastaa, ellei oppijoilla ole sama aineisto kirjallisena. Jos oppijoille jaetaan materiaali ennalta luettavaksi, kaikki eivät lue sitä tai ne, jotka lukevat, eivät enää jaksa kuunnella puhetta. Jos se jaetaan esityksen alussa, sen tutkiminen saattaa häiritä kuuntelua. Jos se annetaan vasta esityksen lopussa, siihen ei voida tehdä omia huomautuksia, ja osa oppijoista on koko ajan huolissaan asioiden mahdollisesta unohtumisesta ja muistiinpanojen teosta. (Repo & Nuutinen 2003, 151–154.)

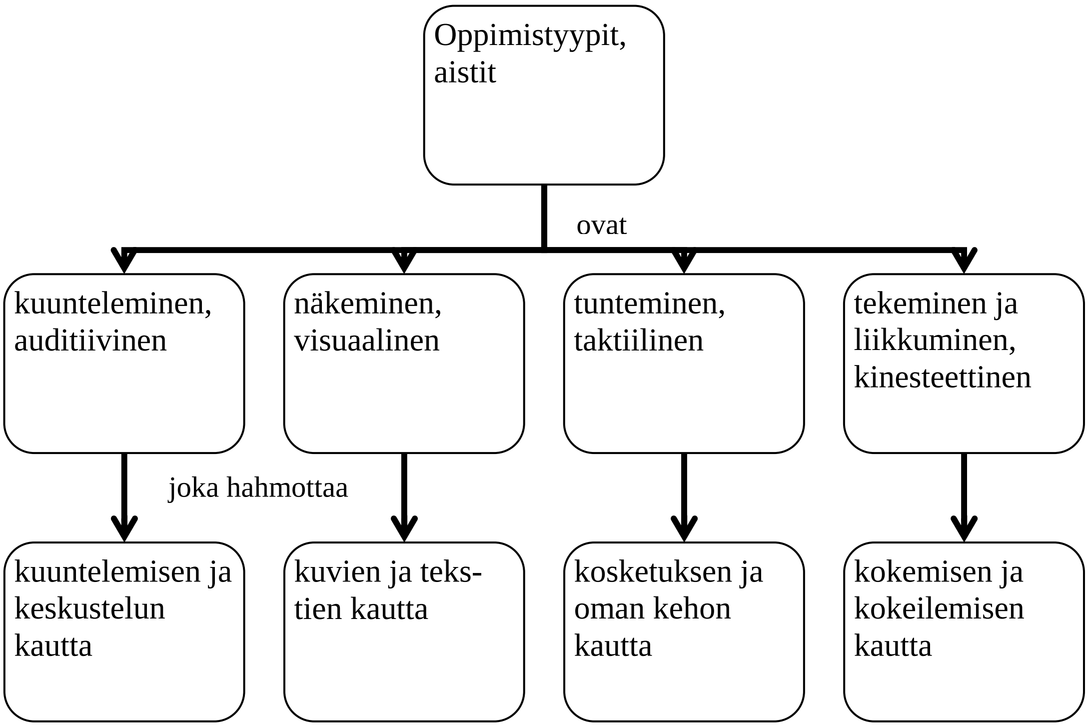
Kuvat ja kaaviot auttavat jäsentämään ajattelua yhtälailla kuin asioiden kirjoittaminen omin sanoin. Vaikka visuaalinen kuvaus sisältäisi monta asiaa, se voidaan kuitenkin yleensä hahmottaa yhdeksi kokonaisuudeksi ja siten ylittää mielensisäisen tiedonkäsittelyn rajoituksia. Diagrammilla tai kaavakuvalla tunnistetaan ilmiön tai asian olennaiset vaiheet ja esitetään ne esimerkiksi nuolien yhdistämien laatikoiden avulla. Esittävällä piirroksella esitetään kohteen olennaiset piirteet kuvallisesti. Prototyyppien tekemisellä rakennetaan malleja tutkittavasta ilmiöstä, joka yhdistää kuvallisuuden ja konkreettisen käsiteltävyyden. Digitaalisilla valokuvilla tallennetaan esine, ilmiö tai tapahtuma myöhempää keskustelua, pohdintaa ja arviointia varten. Videoinnilla kuvataan tapahtumakulkuja myöhempää yhteistä pohdiskelua varten. Aikajanat järjestävät asiat aikajärjestykseen esimerkiksi rinnakkaisten aikajanojen avulla. Miellekartoilla hahmotetaan ja eritellään asiaan tai ilmiöön liittyvät seikat ja niiden keskinäiset yhteydet. Kolmiulotteiset mallit esittävät valitun kohteen kolmiulotteisessa avaruudessa. Animaatiolla hahmotetaan jonkin asian kulku vaihe vaiheelta luomalla sitä vastaava dynaaminen simulaatio. Kokemuksiin pohjautuva visualisointi esimerkiksi toimii virikkeenä keskusteluille, havainnollistaa vaikeita ja monimutkaisia asioita ja muuntaa niitä helpommin ymmärrettäväksi ja todentuntuisemmaksi, auttaa tutustumaan ja keskustelemaan kuvasymboliikasta ja oppimaan tulkitsemaan kuviin sisältyviä merkkejä ja merkityksiä, tekee mahdolliseksi luoda luonnoksia ja malleja suunniteltavista asioista, joiden avulla voidaan tukea sekä niiden hahmottamista että mahdollista valmistusta. (Hakkarainen, Bollström-Huttunen, Pyysalo & Lonka 2005, 138, 149–150.)

4.1.3 Toiminnallinen havainnollistaminen

Toiminnan kautta havainnollistaminen on tekemistä monessa muodossa. Esimerkiksi opettaja näyttää eli demonstroi, miten jokin asia tehdään. Demonstraatio perustuu Aeblin (1991, Ahtee & Pehkonen 2000, 53 mukaan) mukaan mallioppimiseen, jolloin oppija jäljittelee havainnoimaansa tapahtumaa sisäisesti. Toiminnallisuus tukee suullista sanomaa. Toiminnallisuus etenee yleensä vaihe vaiheelta, ensin on aloitus ja sitten vaihe yksi ja niin edelleen. Toiminnallisuus vastaa kysymyksiin: mitä, millä, miten ja missä järjestyksessä. Oppijat kokeilevat itse. Esimerkiksi yhteistoiminnallisessa oppimisessa ja ryhmätöissä, oppija käyttävät omia kanavia asioiden välittämiseen muille oppijoille. Tämä lisää yhteistä ymmärrystä ja mahdollisesti suvaitsevaisuutta. Toiminnan avulla oppijat voivat käyttää tietojaan ja taitojaan konkreettisiin tilanteisiin sekä oppia uutta. Toiminnallisia havainnollistamistapoja ovat psyko- ja sosiodraama, harjoitukset, tutustumiskäynnit ja retket, pelit ja leikit sekä kokeilevat menetelmät. (Myllylä 2008.)

4.2 Miellejärjestelmät

Oppimistyyli tarkoittaa tapaa, jolla ihminen helpoimmin ja mieluimmin oppii. Oppimistyylit jaotellaan yleisemmin kuulohavaintoon, näköhavaintoon ja tuntohavaintoon perustuvaan oppimiseen. Yleensä jokainen oppimistyyli on sekoitus kaikista näistä. Muitakin tapoja on jaotella oppimistyylejä kuin aisteihin perustuva, mutta niitä en käsittele tässä kehityshankkeessa. Olen opetusesimerkeissäni käsitellyt aisteihin perustuvia oppimistyylejä erikseen kiinnittääkseni huomiota kunkin havaintotavan käyttämiseen opetuksessa. Yleisesti ne voidaan jaotella auditiivisiin, visuaalisiin, taktiilisiin ja kinesteettisiin oppimistyyppeihin, joita kutsutaan myös erilaisiksi miellejärjestelmiksi. (Myllylä 2008.) Miellejärjestelmämme voi myös vaihdella päivästä ja mielialasta riippuenkin. Useimmat ihmiset käyttävät miellejärjestelmiä melko tasaisesti. (Hämäläinen, Liias, Taarna & Valkama 2007,41.) Kuvassa 2 on käsitekarttana kuvattuna oppimistyypit miellejärjestelmiin jaoteltuna.



Kuvio 2. Käsitekartta oppimistyypeistä.

4.2.1 Auditiivinen

Auditiivinen oppija ottaa parhaiten vastaan kuuloaistin kautta tietoa ja viestejä. Hän kertoo ja kuuntelee mielellään tarinoita, mutta ärsyyntyy rönsyilevästä asioiden käsittelystä. Auditiivisella oppijalla on laaja sanavarasto, kuitenkaan hän ei elehdi paljoa puhuessaan. Auditiivinen oppija käyttää sisäistä puhetta siten, että hän kuulee kysymyksen, toistaa sen mielessään, vastaa siihen mielessään ja sitten vastaa ääneen. Auditiivinen oppija on siten hitaampi vastaamaan kuin visuaalinen tai kinesteettinen oppija. Auditiivinen oppija myös nauttii hiljaisuudesta. Hän menestyy suhteellisen hyvin perinteisessä luennoimiseen pohjautuvassa oppimisympäristössä. Toisaalta hän hyödyntää oppimisessa keskusteluja ja sosiaalista kanssakäymistä. (Myllylä 2008.)

Havainnoinnissa auditiivinen kiinnittää huomiota puheeseen, sanoihin ja äänenpainoihin, sävyihin ja voimakkuuksiin sekä siihen, mitä joku sanoo, ja muistaa, mitä joku on joskus sanonut. Hän kykenee matkimaan äänenpainoja, puheen korkeutta ja sävyjä. Kuuloaistipohjainen havainnointi kohdistuu esimerkiksi äänimaailmaan, äänenkorkeuteen, sävyyn, melodiaan, äänen suuntaan, etäisyyteen ja paikkaan, voimakkuuteen, rytmiin, kestoon ja taukoihin. (Repo & Nuutinen 2003, 37.)

4.2.2 Visuaalinen

Visuaalinen oppija ottaa vastaan viestejä näköaistia käyttäen. Hän hahmottaa asioita kuvina ja liikkuu vaivattomasti asiasta toiseen. Visuaalinen oppija tekee nopeasti yleistyksiä jo pienestä määrästä tietoa. Hänelle kokonaisuus on tärkeää ja hän saattaa pitkästyä pikkutarkkaan selittämiseen. Visuaalinen ihminen saattaa puhua nopeasti ja sekavasti, usein hän elehtii puhuessaan. Katsellessaan sisäistä kuvaa, visuaalinen oppija saattaa unohtaa, etteivät muut näe samaa kuvaa. Hän vastaa kysymyksiin yleensä lyhyesti. Hänellä on vaikeuksia muistaa sanallisia ohjeita. Visuaalinen oppija lukee mieluummin itse kuin kuuntelee luettua. Hän voi olla keskustelijana vaikea ja kuuntelijana kärsimätön. Visuaalinen oppija kirjoittaa ja piirtää mielellään muistiinpanoja. Hänen huomionsa kiinnittyy ulkonäköön ja mahdollisesti äänet eivät häiritse häntä, koska hän ei kiinnitä huomiota niihin. Asioiden havainnollistaminen kuvina ja kaavioina auttaa visuaalista oppijaa muistamaan oppimansa. Visuaalisen oppijan tapa hyppiä asiasta toiseen saattaa edistää luovaa toimintaa ryhmässä. Toisaalta se voi häiritä auditiivista oppijaa, joka hahmottaa kokonaisuuden kerralla. (Myllylä 2008.)

Havainnoinnissa visuaalinen henkilö kiinnittää huomiota ulkonäköön. Hän arvostaa ulkonäköä, pukeutumista, siisteyttä, yleensä ulkoisia seikkoja. Näöllä yleensä havaitaan esimerkiksi paikka, etäisyys, laajakuva, maisema, näkymä, kolmiulotteisuus, yksityiskohdat, rajat, sommittelu, värit, mustavalkoisuus, koko, muoto, kirkkaus, kontrasti ja valo. (Repo & Nuutinen 2003, 35.)

Kuvallisella ilmaisulla on monenlaisia tehtäviä. Kuva antaa tietoa, hahmottaa kokonaisuuksia ja osoittaa asioiden keskinäisiä riippuvuuksia. Kuva välittää virikkeitä, mielikuvia, tunnelmia ja fantasioita. Kuva herättää tunteita, mielipiteitä ja kysymyksiä. Kuvallisessa ilmaisussa voidaan käyttää valmiita kuvia tai voidaan antaa mahdollisuus ilmaista itseä kuvalla. Kuva helpottaa muistamista ja mieleen palauttamista. Kuvan etuna on, että se auttaa ymmärtämään symbolien merkityksen sekä ohjaa selvittämään havainnon ja tulkinnan välistä jännitettä. Havaintojen tulkinta on tavallisesti merkittävämpi osa oppimisprosessia kuin tiedon omaksuminen. Kuva voi tarjota ilmaisukanavan sellaisille asioille, joiden käsittely on sanallisesti vaikeaa. Tiedonvälitys tehtävässä esimerkiksi liitutaululle opetuksen aikana tehdyt piirrokset tukevat oppijoiden aktiivista työskentelyä. Tärkeintä ei ole piirtämistekniikka vaan visuaalisen ajattelukyvyn kehittäminen. Vain jäsentynyttä tietoa on mahdollista järkevästi visualisoida. Opettajan tehtävä on oppia piirtämään yksinkertaisia havainnollistavia kuvia sekä etukäteen että opetuksen edetessä. Hän myös auttaa lukemaan ja tulkitsemaan kuvia. (Vuorinen 2005, 150–152.) Ihmiset reagoivat kuviin hyvin eri tavoin. Kuvat ovat virikkeenä nopeita. Ne laukaisevat assosiaatioita enemmän kuin sanat. Kuvat soveltuvat keskustelun alustukseksi ja motivoivat hyvin erilaisia ihmisiä. (Vuorinen 2005, 160.) On hyödyllistä pyrkiä katselemaan kuvaa ensin ilman omia tulkintoja. Sitä voidaan harjoitella pyytämällä oppijoita kertomaan kuvasta ensi pelkkiä havaintoja. Pyrittäessä pelkästään asiatiedon välittämiseen kuvan on hyvä olla yksiselitteinen, joka on täydennetty kuvatekstillä. (Vuorinen 2005, 164–165.) Malatyn (1993, 115) mukaan on hyvä opetella piirtämään kuvat ja kuviot suhteellisen isoina helpottamaan hahmotusta ja analysointia. Lisäksi hänen mukaan värien käyttö apuvälineenä on tehokasta sekä opettajalla opettamisessa että oppijoille oppimisessa.

4.2.3 Kinesteettinen ja taktiilinen

Kinesteettinen oppija haluaa kokea ja tehdä itse, jolloin hän oppii tietoa siten parhaiten. Hän hahmottaa asioita kehon ja tekemisen kautta. Hän siis tarvitsee liikettä kyetäkseen ajattelemaan selkeästi. Asioiden järjestys ei ole hänelle tärkeä. Kinesteettinen oppija puhuu melko hitaasti, mutta osaa hyödyntää taukoja ja elehtii. Hän ei pidä vahvaa katsekontaktia kuulijoihin mielellään. Kuuntelijana hän on kärsimätön. Kinesteettinen oppija pitää aktiviteeteista ja hänen huomionsa on siinä, mitä tehdään. Toisaalta tämä vaatii aikaa, koska pitää tunnustella, miltä asia tuntuu. Hän koskettelee mielellään ja tulee lähelle. Kinesteettinen ja taktiilinen miellejärjestelmä on lähellä toisiaan. Prashingin (2000, Myllylä 2008 mukaan) mielestä on syytä erottaa nämä tyylit toisistaan. Taktillisia taipumuksia omaavat oppijat muistavat parhaiten asioita, jos he voivat oppimisprosessin aikana käyttää käsiään ja kosketella esineitä. Kinesteettiset puolestaan tarvitsevat koko kehoon kohdistuvia fyysisiä harjoituksia. Hänelle havainnollistaminen on toimintaa, kun taas taktiilinen oppija oppii kosketusaistin kautta kokemia asioita. (Myllylä 2008.) Kinesteettistä hahmottamista kuvaavia asioita ovat esimerkiksi kipuun liittyvät tuntemukset, lihasjännitys, lämpötila, muoto ja pinnan rakenne, paikka, laajuus, paine, kesto ja ilman laatu. (Repo & Nuutinen 2003, 38.)

Toiminnallinen ilmaisu on vaikeasti rajattavissa, koska useimpiin työtapoihin liittyy mahdollisuus toiminnalliseen aktiivisuuteen. Toiminnallinen oppiminen rakentuu useimmiten sosiaaliseksi tapahtumaksi, mikä tukee monien työn teon kannalta tärkeiden valmiuksien oppimisessa. Ryhmän jäseniä ohjataan alusta alkaen auttamaan toisiaan ja tekemään yhteistyötä ongelmien ratkaisemiseksi. Parhaimmillaan ryhmä ottaa täyden vastuun sekä työn kehittämisestä että työyhteisön käsittelystä. Toiminnallisuus on yksi tärkeimpiä keinoja opetuksen konkretisoimiseksi. Siinä eletään suoraan sitä todellisuutta, johon opiskelu kohdistuu, tutustuen, kokeillen, harjoitellen, osallistuen. Konkreettisuudessa oppiminen perustuu omiin kokemuksiin ja oppija saa välittömän palautteen osaamisestaan. Suurin osa elämän taidoista on mahdollista oppia vain tekemällä. Esimerkiksi ihmisen käsillä on taipumus muun muassa tarttua, vetää, työntää, vääntää, painaa, venyttää ja muotoilla. (Vuorinen 2005, 179–181.)

4.3 Yhteistoiminnallinen oppiminen

Yhteistoiminnallinen oppiminen on ryhmätyöskentelymenetelmä, jossa kaikilla jäsenillä on yhtäläinen vastuu työskentelystä. Ryhmälle voidaan antaa tehtävä tai ongelma mitä se alkaa työstää. Ryhmässä tärkeää on yhteistyö ja yhdessä tekeminen. Tavoitteena ei tehdä työnjakoa ja yhteenvetoa vaan työskennellä yhdessä. Yhteistoiminnallinen oppiminen voi olla osa jotakin ryhmä- tai projektityötä. Yhteistoiminnallisen oppimisen vahvuutena on, että jokaisen panos pyritään hyödyntämään. Yhteistyö voi vähentää eristyneisyyden tunnetta oppijoille, koska kaikki pääsevät vaikuttamaan. Haasteena on ryhmien muodostus ja ohjaaminen tarvittaessa. Oppimisen edistävän yhteistoiminnan luominen on haastavaa ja vaatii paljon ohjaajalta ja osallistujalta. Kaikkien mukaan ottaminen ryhmän toimintaan on haastavaa ja vaatii ohjeistamista ja ohjaamista. Erityisesti dominoivat henkilöt ryhmissä pitäisi sitouttaa yhteisen toiminnan pelisääntöihin. (Hyppönen 2004, 7.)

Yhteistoiminnallinen oppiminen on sellainen oppimisjärjestely, jossa oppija

- voi harjoitella yhteistoimintaa erilaisissa ryhmissä työskennellen
- on valmis sitoutumaan työhön, yhteistyöhön ja oppimistulosten saavuttamiseen
- vastaa omasta ja oppijatovereiden oppimisesta
- oppii tietojen, taitojen ja ongelmanratkaisun lisäksi vuorovaikutus- ja ryhmätyötaitoja
- huolehtii saamastaan erityisvastuusta
- on valmis arvioimaan ja kehittämään työskentelyään. (Ahtee & Pehkonen 2000, 57.)

Todennäköisesti yleisin syy yhteistoiminnallisen oppimisen epäonnistumiseen matematiikan tunnilla on se, että yksilöille tehtyjä tehtäviä käytetään ryhmätehtävinä. Sahlberg ja Saharan (2002, 196) ovat sitä mieltä, että opettajan kannattaa aloittaa yhteistoiminnallisen oppimisen kehittämistyö muotoilemalla yksilöille tarkoitettuja tehtäviä ja ongelmia valittuun menetelmään sopivaksi ryhmätehtäväksi. (Sahlberg & Saharan 2002, 195–196.)

Yhteistoiminta ja opetuksen yksilöinti ovat toistensa täydentäjiä, eivätkä vastakohtia. Ajankäytön suhteen ne tosin usein kilpailevat keskenään. Yhteistoiminnallinen opettaminen on opettajan kannalta vaativampi työtapa, koska hän joutuu ohjaamaan työskentelyä välillisesti. Yksilöinti puolestaan tarkoittaa sen tosiasian tunnustamista ja huomioon ottamista, että eri yksilöiden oppimiskyky, oppimishalu, elämänkokemus, ongelmat ja tavoitteet ovat erilaisia. Ryhmätyöskentelyn ohjaaminen on yksi niistä vaativista työtavoista, jonka harjoittelussa moni opettaja on lannistunut. Joku opettaja väsyy hälinään, toinen työskentelyn hitauteen ja kolmas heikkoihin tuloksiin. Menetelmän valinta riippuu paljon myös opettajan taidoista, mutta ovat sidoksissa myös opettajan arvomaailmaan. (Vuorinen 2005, 56–57, 72, 75.) Ryhmätyöskentelyn käyttö vaatii huolellisempaa valmistelua kuin luokkaopetus, sillä ryhmätyön sijoittaminen opetusprosessiin edellyttää tarkempaa ajan käyttö suunnittelua kuin opettajajohtoiset työtavat. Lisäksi oma urakkansa on myös tehtävien laatiminen tai etsiminen. (Vuorinen 2005, 103.)

4.3.1 Ryhmiin jako

Opettaja voi tarkoitushakuisesti käyttää ryhmädynamiikan vaikutusta eri tilanteissa esimerkiksi jakaessa opiskelijoita pienryhmiin. Hyvä oppijoiden tuntemus auttaa aistimaan erilaisia tilanteita ja ryhmien tai yksilöiden välisiä ristiriitoja. Ryhmänjäsenille voidaan antaa tietyt roolit. Roolit voivat olla esimerkiksi puheenjohtaja tai keskustelun vetäjä, joka pitää huolen, että annettu tehtävä tulee suoritetuksi. Yksi rooli voi olla sihteeri, joka kirjoittaa muistiin ryhmän vastaukset. Yksi rooli voi olla tarkkailija, joka huolehtii aikatauluista ja tarkkailee ryhmän jäsenten toimintaa. Yksi rooli voi olla selostaja, jonka tehtävänä on valvoa työskentelyä ja ryhmän aikaansaaman tuotoksen arviointia. Opettaja voi myös vaikuttaa sosiaaliseen oppimisympäristöön niin, että opetettu asia havainnollistuu jakamalla oppijoiden omia kokemuksia. Keskusteluryhmissä yhteistoiminnallisuus voi näkyä myös niin, että oppijat voivat olla toistensa opettajia. (Myllylä 2008; Ahtee & Pehkonen 2000, 57.)

Ryhmäjako voidaan suorittaa opettajajohtoisesti, oppilasjohtoisesti tai satunnaisesti. Ryhmien sisällä on yleensä työnjakautumista. Roolit ryhmässä voivat olla ennalta määrätyt tai ne voivat muodostua työn edetessä. Ajallisesti ryhmätyöskentelyn pituus voi vaihdella 10 min tuokiosta kuukausiin. Ryhmätyöskentelyä käytettäessä opettajan rooli muuttuu tiedon esittäjästä oppijoiden ohjaajaksi ja tukijaksi. Oppijan rooli on itsenäisempi ja vastuullisempi tiedon hankkimisessa ja muokkaamisessa. (Ahtee & Pehkonen 2000, 55.) Kolme henkeä muodostaa hyvän toimintayksikön (Salovaara 1997).

Uusikylän ja Atjosen (2002, 135) mukaan opettajajohtoinen ryhmiin jako on olennaisesti helpompaa kuin oppilasjohtoisesti etenkin isoissa oppilasryhmissä. Opettaja joutuu ryhmityksiä tehdessään arvioimaan joitakin edellytyksiä: ei samaan ryhmään vain poikia, ei vain luku- ja kirjoitustaidottomia, ei vain matematiikassa lahjakkaita ja niin edelleen. Opiskeluedellytysten systemaattinen huomioiminen niin, että oppijoiden erilaiset taidot saisivat myös kehittävää harjoitusta, onkin jo vaativaa pedagogista päätöksentekoa.

4.3.2 Ryhmätehtävät

Ryhmätehtävät voivat olla myös avoimia tai suljettuja. Aloitteleva ryhmä voi kokea suljetut tehtävät helpotuksena. Ne ovat myös käyttökelpoisia silloin, kun on kovin vähän aikaa. Avoimet tehtävät antavat tilaa mielikuvitukselle ja luovuudelle. Mitä enemmän opettaja antaa vastuuta ryhmille, sitä suurempiin yllätyksiin hän saa varautua. (Vuorinen 2005, 104.)

4.3.3 Ryhmätyöskentely

Ryhmätöiden työnjakoa voidaan organisoida monella tavalla. Esimerkiksi kaikki ryhmät työskentelevät saman tehtävän parissa, kukin ryhmä suorittaa osan kokonaistehtävästä, puolet ryhmästä työskentelee yhden tehtävän parissa muut ryhmät saavat eri tehtävän, homogeeniset ryhmät suorittavat eri vaikeustasoa olevia osatehtäviä tai kaikki ryhmät suorittavat kaikki tehtävät kiertäen työskentelypisteitä. (Vuorinen 2005, 104.)

Vuorinen (2005, 105) muistuttaa, että varsinkin nuorten kanssa työskenneltäessä on tarpeen, että opettaja käy tarkistamassa, kuinka ryhmätyöskentely sujuu ja antaa lisäohjeita. Ryhmätyöskentelyn kriittisin ja vaikein kohta on ryhmien tulosten hyväksikäyttö, joten menettelytapa kannattaa harkita joka kerta erikseen. Usein ryhmässä tapahtuva työskentely tempaa niin vahvasti mukaansa, että ryhmä saattaa vastustaa ryhmätyöskentelyn päättämistä. Siirtymävaihetta ja tulosten hyväksikäyttöä voidaan helpottaa esimerkiksi seuraavasti: Kun ryhmillä on ollut sama tehtävä, kunkin ryhmän annetaan esittää vain yksi näkökohta kerrallaan. Raportointi lopetetaan, kun millään ryhmällä ei ole enää uusia näkökohtia. Tällä vältetään se, ettei viimeisten ryhmien tarvitse toistella tuttua hokemaa: ”Samat kuin muilla”. Toisena esimerkkinä tulosten raportoinnin sijaan käydään yleiskeskustelu, jonka lähtökohtana ovat esiin nousseet ajatukset, kannanotot ja kysymykset. Kolmantena esimerkkinä tuloksia ei raportoida lainkaan, kun raportointi ei oleellisesti edistä työskentelyä.

Ryhmätyöskentelyn luonteeseen kuuluu, että tulokset ovat usein hajanaisia ja osittain virheellisiäkin. Jokainen tulos antaa opettajalle informaatiota ryhmien toiminnasta ja opetusprosessin etenemisestä. Opettajan tärkein tehtävä tulosten hyväksikäytössä on auttaa opiskelijoita arvioimaan ryhmien kannanottoja osana vähitellen hahmottuvaa kokonaisuutta. Vasta kokonaiskuvaksi jäsentyneitä tietoja ja kokemuksia kyetään soveltamaan uusiin tilanteisiin ja käytännön ratkaisuihin. Ryhmätyöskentelyn avulla ehkä kangerrellenkin yhdessä löydetty ratkaisu säilyy taatusti paremmin mielessä ja on helpommin sovellettavissa omaan elämään kuin opettajan sujuvasti esittelemät oikeat vastaukset. (Vuorinen 2005, 105.) Uusikylän ja Atjosen (2002, 111) mukaan ryhmän yhteinen reflektointi merkitsee ryhmän toiminnan kriittistä arvioimista. Siten opitaan ymmärtämään omaa toimintaa ja tunnistamaan oppimisprosessin olennaisia piirteitä.

Oppilastöiden esittämiselle on oppijoille kaksi äärimmäistä vaihtoehtoa. Suljetussa työskentelyssä oppijoille annetaan esimerkiksi tarkka ohje siitä, mitä ja miten pitää mitata ja tuloskin löytyy annetuista taulukoista. Toisessa ääripäässä, avoimessa tutkimuksessa oppijoille annetaan vain aihepiiri, joista heidän tulee muotoilla ja rajata heitä itseään kiinnostava ja ratkaistavissa oleva ongelma. (Ahtee & Pehkonen 2000, 67.)

4.4 Havainnollistamismateriaali ja -välineet

Oppimateriaali on oppiainesta sisältävä tietolähde, kun taas opetusväline on esine tai laite. Oppimateriaalit voivat olla tyypiltään hyvin erilaisia. Kirjallisia oppimateriaaleja ovat oppi- ja kurssikirjat, työ- ja harjoituskirjat, opettajan oppaat, monisteet ja sanomalehdet. Auditiivisia oppimateriaaleja ovat muun muassa äänitteet, levyt ja kouluradio-ohjelma. Auditiiviset opetusvälineet siten ovat muun muassa levysoitin, kouluradio ja neuvottelupuhelin. Visuaalisia oppimateriaaleja ovat muun muassa kuva-, tarra- ja piirtotaulu, diat, kalvokuvat ja valokuvat. Visuaaliset opetusvälineet ovat muun muassa piirtoheitin, liitutaulu, diaprojektori, valokuvakamera ja dokumenttikamera. Audiovisuaalisia oppimateriaaleja ovat muun muassa elokuvat, koulutelevisio-ohjelmat ja video. Audiovisuaaliset opetusvälineet ovat muun muassa televisio, video ja videoneuvottelulaitteisto. Digitaalisia oppimateriaaleja ovat muun muassa CD-ROM-levyt, tietokoneavusteiset opetusohjelmat, www-sivut ja elektroniset kirjat. Digitaaliset oppimateriaalit käytännössä ovat samanaikaisesti kirjallisia, visuaalisia, auditiivisia ja audiovisuaalisia. Digitaaliset opetusvälineet ovat muun muassa dataprojektori, siirtoheitin, tulostin, skanneri, tekstinkäsittelyohjelma, sovellusohjelma ja sähköposti. Muita oppimateriaaleja ovat esimerkiksi todellisuuden esineet, oppimispelit ja simuloinnit. Muita opetusvälineitä ovat muun muassa maalausvälineet, saha, ompelukone ja piano. Liitu ja leuka ovat ehkä kenties käytetyimmät opetusvälineet maailmassa (Uusikylä & Atjonen 2002, 153). Pelkästään auditiivisten opetusvälineiden osuus on ollut vähenemässä. (Uusikylä & Atjonen 2002, 140–142, 154.)

Käytettäessä vain yhtä aistia kuhunkin välineeseen oppija keskittää huomionsa juuri käsillä olevaan asiaan. Materiaalin avulla autetaan oppijaa tunnistamaan muodot ja omaksumaan ne, paitsi visuaalisen, myös lihasmuistin kautta. Muotojen tunnistaminen ja nimeäminen auttaa matematiikan opiskelussa. Oppija voi havainnoida ympyrän tai muun geometrisen esineen eri muotoja. Oppija voi myös piirtää muotoja paperille muotilla ja seurata kynällä muodon tai aukon reunaa. Geometrisen kappaleen tarkoituksena on antaa oppijalle tuntoaistiin perustuva kokemus muodosta ja samalla herättää hänen kiinnostus niiden havaitsemiseksi luonnosta ja ihmisen rakentamasta ympäristöstä. Geometrinen kappale tavallaan rohkaisee oppijaa matemaattisten havaintojen tekemiseen.

Matematiikan opiskelussa tarvitaan muun muassa viivoitinta, harppia, piirtokolmiota ja laskinta. Näitä välineitä tuskin tarvitsee perustella. Kun käytetään toiminnallisia tapoja opetuksessa, saatetaan tarvita esimerkiksi askartelumateriaaleja ja niitä olisi hyvä olla saatavilla. Havainnollistamisvälineissä on tärkeätä mallin ja todellisuuden mahdollisimman hyvä vastaavuus (Ahtee & Pehkonen 2000, 53).

Edustava oppimateriaali on selkeä, yhdenmukainen, informatiivinen, tasalaatuinen, virheetön ja päivitetty tilaisuuteen. Laitteiden käytössä on huomioitava, että tilan valaistus, akustiikka ja muoto mahdollistavat havainnollistamisen jokaiselle. Lisäksi tulee tarkistaa, että materiaali sopii esitettäväksi laitteilla. Myös tulee tarkistaa, että laitteet toimivat ja apua löytyy, jos ne menevät rikki. Laitteita on opeteltava käyttämän etukäteen ennen esitystä ja on hyvä myös varautua esittämään ilman välineitä. (Myllylä 2008.)

Havaintomateriaalia suunniteltaessa on koko ajan kuviteltava opetustilanne: miten toimin, miksi teen niin, mitä oppijat tekevät, mikä ohjaa heidän havaintojaan ja ajatteluaan. Havaintomateriaalin avulla voidaan lisätä toimintaa ja virikkeitä. Havainnollistuksesta on useita etuja. Oppijan ajatteluprosessit aktivoituvat. Voidaan vedota järkeilyyn, tunteisiin, esteettisiin näkemyksiin, mielikuvitukseen ja konkreettisiin kokemuksiin. Oppijan toiminnan lisääminen parantaa vireyttä ja omaksumista. Asia kertaantuu eri keinoin. Opettamisen pitäisi sisältää toistetta eli asiaa pitäisi käsitellä useita kertoja, mutta eri tavoilla, esimerkiksi kuvana, sanoina, kokeiluna ja tehtävien avulla.

Havainnollistaminen voidaan perustaa

- kieleen: sanat, kielikuvat, vertaukset, esimerkit, vastakohdat, rinnastukset, toisto, liioittelu ja kysymykset
- kuvaan: valokuvat, piirrokset ja grafiikka
- toimintaan: tekee, näyttää, demonstroi, kokeilee, maistelee ja haistelee
- näytteisiin: esineet, tuotteet, mallit
- välineisiin: filmi, äänite, multimedia, taulu, piirtoheitin (Repo & Nuutinen 2003, 148.)

Havainnollistamisvälineistä otan esille tarkemmin tussi- ja liitutaulun sekä piirtoheitinkalvon käytön, koska näitä havaintoni mukaan käytetään tavallisemmin matematiikan opettamisessa ja ne ovat opetusesimerkissäni mukana.

4.4.1 Tussi- ja liitutaulu

Tussi- ja liitutaulut täytetään opetuksen aikana, joskin myös ennen opetustilannetta. Tavallisemmin ne sisältävät piirroksia, tekstiä ja lyhyitä ydinasialuetteloja. Tussi- ja liitutaulu yleensä täytetään vasemmalta palstoittain. Tusseja on erilaisia. Tussitaulu pyyhitään kuivalla sienellä tai paperilla, liitutaulu taasen märällä sienellä. Sienen kostuttaminen vaatii vesipisteen ja kuivattaa käsiä. Tehokas taulun käyttäjä johdattaa ensin lyhyesti asiaan, kirjoittaa sitten pääkohdat tauluun ja kertoo lopuksi asiasta perusteellisesti. Lisäksi tehokas taulun käyttäjä havainnollistaa asiaa piirroksin, eikä puhu selin kuulijoihin. Taulun käytön hyviä puolia on, että se on helppokäyttöinen, löytyy usein opetustilasta ja useampikin käyttäjä mahtuu yhtä aikaa taululle. Taululle tekeminen on usein riittävän hidas oppijoille ja havainnollinen, koska välivaiheet on helposti korostettavissa. Taulu on usein iso, jolloin välivaiheita mahtuu paljon, ja näkyvyys taululle on usein hyvä. Siten taulu sopii hyvin matematiikan opettamiseen. Toisaalta taulutussit ja -liitu suttaa helposti ja jotkut värit eivät näy hyvin. Lisäksi pyyhittyyn ei voi palata. Taulun käyttö myös vaatii selkeän käsialan. Yleisesti tulee muistaa tarkistaa ennen oppituntia, löytyykö tusseja tai liituja ja ovatko ne toimintakunnossa. Lisäksi taulupyyhkimien olemassa olo ja sen kosteus tulee tarkistaa. (Myllylä 2008.)

4.4.2 Piirtoheitin

Piirtoheittimen teho on riittävä noin 150 hengen luentosaliin, eikä se vaadi esitystilan pimentämistä. Tussikalvo laaditaan vesi- tai spriiliukoisilla tussikynillä. Tulee myös huolehtia, että tusseja ja kalvoja on saatavilla. Monistuskoneen perusvärit näkyvät heijastettaessa mustina, koska ne eivät läpäise valoa. Monistuskoneessa käytetään kopiokalvoja ja tulostimissa käytetään tulostimelle sopivia kalvoja. (Neuwossivu 2.11.2008, Myllylä 2008 mukaan.)

Vaakakalvo näkyy hyvin, koska sen saa heijastettua valkokankaan yläosaan ja sille ei mahdu liikaa tekstirivejä. Pystykalvo sopii esitysrungoksi ja korkeiden kuvien esittelyyn. On hyvä jättää kalvon reunoille vähintään pari senttiä tyhjää, koska piirtoheittimen levy on 1,5 cm lyhyempi kuin A4-kalvo. Kalvo on visuaalinen väline, joten on hyvä suosia kuvia. Minimoidaan tekstin määrää ja kirjataan riittävän suurella. Kalvojen pinta-ala on pieni, joten teksti ja kuvat voivat jäädä pieniksi. Kalvojen esittämisessä on huomioitava, että ei seisota esityksen edessä. Kalvokuvia on hyvä selostaa rauhallisesti ja kertoa olennaisimmat seikat ja mistä ne johtuvat. Kun tähdennetään jotain, käytetään karttakeppiä tai kynää. Osoitetaan rauhallisesti, jotta kuulijat ehtivät nähdä, mitä näytetään. Kalvo laaditaan katsottavaksi ja silmäiltäväksi, ei luetuteta tai kirjoituteta tekstikatkelmia. Myöskään ei ole suotavaa näyttää vain pientä osaa kalvosta kerrallaan. Kalvojen järjestyksestä tulee pitää huolta. Kalvojen kanssa voi tahti helposti kiihtyä ja edetään asiassa liian nopeasti. Kalvojen lisäksi kannattaa varautua paperiversioon, jota voi tarvittaessa kopioida, mikäli piirtoheitintä ei ole tai se ei toimi. (Neuwos-sivu 2.11.2008, Myllylä 2008 mukaan.)

Piirtoheittimen käyttöön kannattaa tutustua jo ennen oppituntia sekä tarkistaa sen toimivuus. Lisäksi kannattaa muistaa tarkistaa valkokankaan käyttö, miten se on ulottuvilla ja miten se kiinnitetään ala-asentoon. Piirtoheitin on yleensä perusvälineenä luokassa. Sen ergonomia tosin ei ole paras mahdollinen, valo häikäisee ja sen liikuteltavuus voi olla rajoittunut. (Neuwos-sivu 2.11.2008, Myllylä 2008 mukaan.)

5 OPETUSESIMERKKEJÄ

Tässä luvussa kuvataan havainnollistavia opetustilanne-esimerkkejä kohdassa 4.2 esitetyn miellejärjestelmän mukaan eriteltyinä. Opetusesimerkit ovat opetusharjoittelustani ammattioppilaitoksissa.

5.1 Auditiivinen

Esimerkki liittyy ammattioppilaitoksen ensimmäisen vuoden lukion lyhyen matematiikan opintojaksoon. Opintojakso kuuluu pakollisiin aikuislukion matematiikan opintojaksoihin, jotka perustuvat lukion opetussuunnitelmaan. Tässä opintojaksossa käsiteltiin algebran ja ammattimatematiikan perusteet. Opintojakson eräs aihepiiri oli lausekkeet ja yhtälöt. Oppitunnin aihe oli neliöjuuri ja yhtälö $x^2=r$. Tavoitteena oli neliöjuuren käsitteiden ja ominaisuuksien tunteminen ja yhtälön $x^2=r$ ratkaiseminen. Oppimistavoitteena myös oli, että oppija osaa hahmottaa yhtälön juurien määrän yhtälöstä. Lisäksi oppija tuli osata muodostaa sanallisesta tehtävästä $x^2=r$ muotoinen yhtälö ja ratkaista se. Aiheen yksi sisällön pääkohta oli neliöjuuri ja neliöjuuren määrittelyehto. Opetusharjoitteluni yhtenä tavoitteena oli asioiden selittäminen suullisesti.

Oppitunnin eräs opetusmenetelmä oli, että teoria esitetään lyhyesti tussitaululle. Oppijat kirjaavat taululta keskeiset asiat paperille. Kirjoittamalla asioista oppija keskittyy tiedon äärelle. Kun asia oli kirjoitettu tussitaululle, esitettiin asia vielä suullisesti, jotta kaikki merkinnät tulisivat mahdollisimman oikein tulkituiksi oppilaille.

Tuntisuunnitelmani mukaan aluksi kerrattiin neliöjuureen liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia, jotka kirjasin tussitaululle. Oppilaat kyselivät kovasti muun muassa matemaattisista merkeistä ja käsitteistä. Eräs kysymys oli: Mikä on juuri? Tässä kohtaa lähinnä kertasin tussitaululla näkyvän juuri-merkin suullisesti.

5.2 Visuaalinen

Esimerkki liittyy ammattioppilaitoksen toisen vuoden pakollisiin ammatillisen matematiikan opintojaksoon, jossa käsitellään geometrian osa-alueeseen liittyvää trigonometrian aihepiiriä. Eräs aihepiirin tavoite on, että oppija osaa käsitellä erityisesti kolmioon liittyviä matemaattisia ongelmia, kuten kolmion sivujen ja kulmien suhteita sekä niiden riippuvuussuhteita esittävien trigonometristen funktioiden ominaisuuksia. Muun muassa oppimisprosessiin kuuluu, että asiaa havainnollistetaan soveltavalla käytännön laskuesimerkillä. Kaksituntisen oppitunnin aihe oli trigonometristen funktioiden sovelluksia. Oppimistavoitteena oppitunnilla oli, että oppija ymmärtää trigonometrian käytön janojen pituuksien ja kulmien suuruuksien laskemisessa ja osaa suorittaa helpohkoja laskuja. Opetusharjoitteluni yhtenä kokeilutavoitteena oli kehittää tälle oppitunnille avoin tehtävä, jota käytän tässä kehittämishankkeessa esimerkkinä.

Oppitunnin aluksi esiteltiin avoin tehtävä trigonometriaan liittyen. Tehtävällä johdateltiin aiheeseen. Avoimessa tehtävässä alku- ja lopputilanne eivät ole yksikäsitteisesti määritelty. Ratkaisijan tehtävänä on keksiä ratkaisureitin lisäksi alku- ja lopputilanne, jotka molemmat sisältävät useita vaihtoehtoja. Ainakin tehtävän lopputilanne sisältää useita vaihtoehtoja. Tämä oli valittu, koska arkielämän ongelmatilanteet ovat juuri tämän tyyppisiä. Yksinomaan tavanomaisten oppikirjan laskutehtävien käyttäminen rajaa oppilaiden käsityksiä matematiikasta helposti kapea-alaiseksi, kun taas avoimien tehtävien avulla tätä kuvaa voidaan pyrkiä laajentamaan. Avoimet tehtävät tarjoavat oppilaille enemmän harkinnanvapautta, mutta toisaalta he joutuvat käyttämään hallitsemaansa tietoa monipuolisemmin. Avoin tehtävä johtaa miltei automaattisesti ongelmakeskeiseen opetukseen ja se antaa selkeän mahdollisuuden kommunikoinnin lisäämiseen. (Ahtee & Pehkonen 2000, 61.)

Havainnollistamiseen muun muassa käytettiin tussitaululle piirrettyjä havainnollistavia kuvia osin mittakaavassa ja mahdollisimman isoina sekä kirjoitettuja esimerkkejä. Lisäksi käytettiin tauluviivoitinta ja/tai tauluastemittaa piirrettäessä havainnollistavia kuvia. Tehtävää havainnollistettiin myös sanallisesti, kierrätettiin monistetta luokassa sekä käytettiin oppikirjan tietoja ja taskulaskinta.

Esimerkkitehtävän, jonka nimi on jyrkkä ylämäki, oli tuntisuunnitelmaan ajoitettu käytettäväksi aikaa 15 minuuttia. Oppijat istuvat pääasiassa yksittäin tai pareittain kasvot luokan etuosaan päin. Luokan valaistukseen tuli kiinnittää huomiota tussitaulun kiiltämisen vuoksi.

Tehtäväesimerkin idea lähti aikaisemmalta harjoitusoppitunnilta. Eräs oppija kertoi myöhästyneen matematiikan tunnilta autokoulun vuoksi. Koska enemmistö oppijoista on juuri täysi-ikäisyyden kynnyksellä, heitä saattaisi kiinnostaa liikenteeseen liittyvät asiat. Liikennemerkkejä näkee mopolla, autolla tai pyörällä ajettaessa sekä linja-autossa istuessa ja miksipä ei kävellessäkin, jotenka havainnollistus soveltuu kaikille liikkujille. Valitsin esimerkiksi mäen, koska siitä saa helposti mallinnettua suorakulmaisen kolmion. Jotta mielikuvaa ja kiinnostusta tulisi lisää, valitsin erityisesti Lukonmäen, joka sijaitsee Hervannan ammattikoulun lähellä, jossa oppitunti pidettiin. Mahdollisesti joidenkin oppijoiden koulumatka kulkee juuri tämän mäen kautta. Lukonmäki on harvinaisen jyrkkä mäki.

Aluksi kerroin oppijoille, että aloitetaan trigonometriankäsittely pohdintatehtävällä. Kehotin oppijoita ajattelemaan Lukonmäkeä. Kerroin tietäväni, että Lukonmäen ylhäältä ajettaessa alas on varoitusliikennemerkki eli jyrkkä alamäki -liikennemerkki. Lisäksi kerroin olettavani, että jyrkkä ylämäki -liikennemerkki on mäen alhaalla tultaessa mäkeä alhaalta ylöspäin.

Laitoin kiertämään monisteen, jossa oli tiehallinnon www-sivulta löydetty yleisohje liikennemerkkien käytöstä. Monisteessa oli sekä jyrkkä alamäki - että jyrkkä ylämäki -liikennemerkkien käytöstä tietoa ja mittoja itse liikennemerkistä. Pyysin oppijoita miettimään, mitä tietoa jyrkkä ylämäki -liikennemerkissä on. Sillä aikaa piirsin jyrkkä ylämäki -liikennemerkin karkeasti tussitaululle mittakaavaan käyttäen apuna taulu- ja asteviivoitinta. Lisäksi käytin punaista tussikynää värittääkseni varoitusmerkin reunat. Piirtämisen jälkeen moniste oli jo kiertänyt luokassa.

Seuraavaksi esittelin piirrokseni sanomalla, että tässä on malli jyrkkä ylämäki -liikennemerkistä, joka on Lukonmäen alhaalla. Kysyin oppijoilta, mitä tietoa merkissä on. Sain vastaukseksi kaksitoista prosenttia. Kysyin oppijoilta, mitä kaksitoista prosenttia tarkoittaa. Tästä oli kerrottu hieman kierrätetyssä monisteessa. En saanut kysymykseeni vastausta, joten kerroin, että se kuvaa pituuskaltevuutta, joka tarkoittaa korkeuseroa suhteessa vaakasuoraan etäisyyteen.

Kysyin oppijoilta, mitä haluttaisiin selvittää tai ratkaista, mutta en saanut vastusta, joten sanoin, että voisi esimerkiksi esittää kysymyksen, kuinka korkealle nousee, jos ajaa Lukonmäen alhaalta ylös. Tässä tehtävän alku muuttui avoimesta suljetuksi tehtäväksi. Kirjasin tussitaululle tehtävän kysymyksen. Seuraavaksi kysyin, että miten kuvataan mäkeä. En saanut tähän nopeasti vastausta, joten esitin suorakulmaista kolmiota kuvaksi. Pythagoraan lause oli aikaisemmilla oppitunneilla käyty läpi. Piirsin suorakulmaisen kolmion kirjainsymboleineen ja kertasin niiden käsitteet. Seuraavaksi esitin pituuskaltevuuden laskutavan. Yhtälö sievennettiin niin, että vasemmalle puolelle yhtälöä jäi kirjainsymboli, joka kuvasi Lukonmäen korkeutta. Kysyin, että voidaanko ratkaista näillä tiedoilla. Sain vastauksen, että ei. Esitin jatkokysymyksiä, mitä pitäisi tietää ja miksi. Sain näihin vastauksen.

Seuraavaksi kerroin, että tehdään oletuksia taulukkoon. Piirsin taulukon tussitaululle ja kirjasin oletuksia. Tässä esimerkissä olin valinnut kymmenlukuja oletusarvoksi, jotta laskeminen käy helposti myös päässälaskuna. Yhtenä oletuksena oli, että jos vaakasuoraetäisyys on 100 metriä, niin mäen korkeus on 12 metriä. Tähän annoin esimerkin, että Lahden hyppyrimäki on noin 100 metriä pitkä, jotta hahmottuisi pituusmitta. Lisäksi kirjasin taulukon viereen ensimmäisen rivin oletuksen kirjallisen lauseen muotoon, jotta asia tulisi ymmärrettävämmäksi.

Lopuksi kysyin, mitä saadaan. Kehotin ottamaan laskimet esiin. Pyysin vastaamaan ja kirjaamaan vastauksen omin sanoin tehtävän kysymykseen. Tauon jälkeen kirjasin vielä oman vastaukseni kysymykseen. Lopuksi vielä kerroin, että tämä tehtävä oli johdatteluksi suorakulmaisen kolmion trigonometriaan. Lisäksi kerroin, että käytännössä mäki ei ole tasainen ja sitä voidaan mitata usealla tavalla muun muassa mittaamalla korkeusero ja välimatka kahden peräkkäisen pisteen välillä ja laskea näiden perusteella pituuskaltevuus. Lopullinen pituuskaltevuus, jollekin tietylle mäelle, voi olla pituuskaltevuuksien keskiarvo riippuen halutusta tarkkuudesta. Liitteessä yksi on tehtävän visuaalinen ilme tussitaululla.

5.3 Taktiilinen

Esimerkki on ammattioppilaitoksen toisen vuoden pakollisiin matematiikan opintojaksoon liittyvä geometrian osa-alue, jossa käsitellään tasokuvioiden pinta-aloja. Eräs aihepiirin oppimistavoite on osata tavallisimmat tasokuviot ja niiden pinta-alat sekä niihin liittyviä nimityksiä, ominaisuuksia ja laskukaavoja. Muun muassa oppimisprosessiin kuuluu, että asiaa havainnollistetaan välineiden avulla ja pyritään selventämään tasokuvioiden merkitystä. Oppitunnin aiheena oli nelikulmioiden, kolmioiden ja ympyrän pinta-alat. Eräs oppitunnin oppimistavoitteista oli, että oppija osaa laskea ympyrän pinta-alan ja soveltaa tietoa pinta-aloista geometrisiin ongelmanratkaisuihin. Opetusharjoitteluni yhtenä kokeilutavoitteena oli kokeilla tapausopetusta. Aiheesta kehiteltyä tehtävää käytän tässä esimerkkinä.

Oppijoille annettiin havainnollistamisvälineeksi CD-levy, jonka pinta-ala heidän tuli määrittää. CD-levyn avulla pyrittiin herättämään oppijoiden mielenkiinto ja vahvistamaan sekä selkeyttämään ympyrän pinta-alan muistamista. Oppijat purkivat tapausta itsenäisesti tai parityönä. CD-levy antoi myös konkreettisesti yhteyden ympyrän pinta-alaan, johon oppijat voivat soveltaa tietojaan. Haasteena oli saada oppijat pohtimaan kriittisesti annettua CD-levyä ja sen pinta-alan laskemista. Oppiminen tapahtui tekemisen kautta. Oppija saattoi itsenäisesti tai parin tuella pohtia ratkaisuvaihtoehtoja ja testata niiden toimivuutta sekä arvioida lopputulosta.

Havainnollistaminen käytettiin CD-levyä ja mittavälineenä viivoitinta tai rullamittaa, mahdollisesti myös harppia. Lisäksi käytettiin kerättyä tietopohjaa tasokuvioiden pinta-aloista ja taskulaskinta.

Esimerkkitehtävään oli tuntisuunnitelmaan ajoitettu käytettäväksi aikaa 15 minuuttia. Esimerkkiin meni käytännössä aikaa 25 minuuttia. Oppijat istuvat pääasiassa yksittäin tai pareittain kasvot luokan etuosaan päin. Aikaisemmin oli käsitelty ympyrän pinta-alan laskukaava sekä siihen liittyvät käsitteet, kuten piiri, halkaisija ja säde.

Jaoin kullekin oppijalle tai oppijaparille CD-levyn, jotka olivat hieman erinäköisiä. Kirjasin tussitaululle tehtävänannon: Kuinka suuri on CD-levyn pinta-ala? Kehotin oppijoita mittamaan esimerkiksi viivoittimella. Kysyin oppijoilta, mitä sovitaan pinta-alasta, koska pinta-ala voi olla etiketin, kiiltävän osan, muovi osan tai fyysisen osan ala tai mahdollisesti jotain muutakin. Sovittiin, että lasketaan CD-levyn fyysisen osan ala. Minulla oli CD-levy, jonka etiketti peitti koko CD-levyn fyysisesti toiselta puolelta. Asetin tämän CD-levyn piirtoheittimelle. Valkokankaalle heijastui CD-levyn fyysinen pinta-ala tummana. Tämä havainnollisti myös huomaamaan, että levyn keskiympyrä ei kuulunut pinta-alaan. CD-levy on myös sopivan kokoinen, koska sen voi piirtää A4-paperille asettamalla levy paperin päälle ja piirtämällä ääriviivoja myöten. Tämän jälkeen ympyröiden säteet ja halkaisijat voi mitata viivoittimella paperilta. Samalla tehtävästä saa muistiinpanot. Mittauksen voi myös tehdä suoraan CD-levystä. Piirsin tauluharpilla myös taululle CD-levyn pinta-alaa osoittavat ympyrät. Oppijoiden työskentelyn jälkeen kysyin, miten lasketaan, koska vaihtoehtoja oli useita. Eräs oppija oli mitannut ympyrän uloimman kehän ja sisemmän kehän välisen etäisyyden ja sijoittanut sen säteeksi ympyrän pinta-ala yhtälöön. Hahmottelin tämän vaihtoehdon kuvaan ja kerroin, minkä pinta-alan hän oli laskenut. Seuraavaksi päädyttiin yhtälöön, josta voitiin ratkaista CD-levyn pinta-ala. Kerroin vielä tarinan lyhyesti, miten CD-levyn halkaisija oli tullut Beethovenin 9. sinfoniasta.

5.4 Kinesteettinen

Opetusesimerkki liittyy samaan aihepiiriin kuin edellisen kohdan esimerkki. Oppitunnin aiheena oli siis nelikulmioiden, kolmioiden ja ympyrän pinta-alat. Eräs oppimistavoite oli, että oppija osaa laskea tavallisempien tasokuvioiden, kuten suorakulmion, pinta-alat. Lisäksi oppijan tuli osata soveltaa tietoa pinta-aloista geometrisiin ongelmanratkaisuihin. Kokeilutavoitteeni oli ohjata yhteistoiminnallista oppimista sekä pienryhmätyöskentelyä. Aiheensisällön yhtenä pääkohtana oli soveltaa tasokuvioiden pinta-aloja.

Tehtiin yhteistoiminnallinen harjoitus nelikulmion pinta-alaan liittyen. Tehtävänanto oli oppikirjan tehtävä. Luokassa oli alle 10 oppilasta, jotka jaoin kahteen pienryhmään, ryhmäkoon ja myös ajan säästämisen vuoksi. Kummankin pienryhmän oppilaat työskentelivät yhteisen päämäärän saavuttamiseksi.

Sosiaalinen vuorovaikutus on oppimisen keskeinen asia, missä opitaan pukemaan sanoiksi omat ajatukset, perustelemaan väitteet ja puolustamaan omaa kantaansa sekä myös luomaan yhteisiä näkemyksiä. Kaikki sosiaalinen vuorovaikutus ei edistä oppimista, mutta parhaimmillaan yhteistoiminnallinen oppiminen aktivoi tehokkaasti oppijan ajatteluprosesseja. Yhteistoiminnallinen oppiminen on oppimisen kannalta tehokasta, mikäli ryhmän jäsenet toimivat aktiivisesti oppimistehtävän parissa esitellen omia ajatuksiaan, kommentoiden ja keskustellen ryhmän jäsenten esittämistä ajatuksista ja kehittäen uusia ratkaisuja oppimistehtävään yhdistellen ryhmän kaikkien jäsenten tietämystä. Näin pyritään edistämään ryhmän moninaisen tietämyksen avulla myös yksittäisen oppijan tiedollisia prosesseja. Lisäksi toiminnallisella oppimisella voidaan harjaannuttaa kommunikaatio- ja yhteistyötaitoja sekä joustavuutta ja ongelmanratkaisutaitoja, joita työyhteisöissä tarvitaan. (Salovaara 1997.)

Havainnollistamisessa käytetään muun muassa tussitaululle kirjoitettuja ja piirrettyjä havainnollistavia kuvia, lyhyitä esimerkkejä ja laskukaavoja. Lisäksi käytetään rullamittaa, oppikirjan tietoja ja taskulaskinta. Havainnollistamiseen käytetään lisäksi toiminnallisuutta lähinnä mittaamista.

Yhteistoiminnalliseen tehtävään on ajoitettu käytettäväksi aikaa 17 minuuttia. Oppijat voivat liikkua luokassa ja luokan ulkopuolellakin tehtävän aikana. Oppijat käyttävät hyväksi luokan ovia sekä muuta luokkatilaa. Aikaisemmin on koottu tavallisempien tasokuvioiden pinta-aloista tietopohja, joten laskukaavat sekä siihen liittyvät käsitteet ovat tuttuja.

Aluksi kerroin, että kokeillaan seuraavaksi käytännön harjoitusta. Pyysin, että otetaan luku kahteen siten, että ensimmäisen rivin oppija sanoo yksi, toinen kaksi ja niin edelleen. Lisäksi pyysin oppijoita pitämään mielessä sanomansa luvun. Valitsin tämän tavan, koska ryhmiin tuli siten oppijoita, jotka eivät ihan vierekkäin istu. Seuraavaksi pyysin oppijoita ottamaan oppikirjan esille ja yksi oppija luki ääneen oppikirjasta tehtävänannon. Tein näin, jotta sain asian kiinnittymään oppikirjaan ja tehtävänantoon. Tehtävänanto oli seuraava: Rakennuslevyn pituus on 260 cm. Kuinka leveän levyn voi tuoda luokkahuoneen ovesta? Mikä on levyn pinta-ala? (Aunola, Ilomäki, Keskinen, Nieminen, Pösö, Salonen & Tanila 2004, 223.)

Pyysin ykkösryhmäläisiä tulemaan opettajanhuoneeseen menevälle ovelle ja kakkosryhmäläisiä luokan käytävälle menevälle ovelle. Välineinä oli kaksi kappaletta mitta-nauhoja, kynä, paperi ja taskulaskin. Rohkaisin oppijoita tekemään ryhmätyötä. Lisäksi ohjasin asiaa kysymällä, mikä leveys levyllä voi enimmillään olla. Kehotin myös piirtämään kuvaa paperille tai taululle. Oppijaryhmät ryhtyivät nopeasti tekemään ja mittasivat hätäisesti. Laitoin taululle yhteenvedon alustavasti esiin, mitä ryhmä yksi ja kaksi olivat saaneet levyn leveydeksi ja pinta-alaksi. Tähän kohtaan tuli ruokatauko.

Seuraava tunti alkoi pienryhmätyöskentelyjen jatkumisella. Kysyin mitattuja tuloksia. Ensimmäinen ryhmä oli mitannut ovenkarmeista leveyden ja pituuden, kun ovi oli auki. Toinen ryhmä oli mitannut vain oven korkeuden oven ollessa kiinni. Kirjaisin saatuja mittaustuloksia taululle. Tämän jälkeen kysyin levyn leveyttä. Ensimmäinen ryhmä arvioi leveydeksi jotain ja toinen ryhmä sanoi saman. Kirjasin tiedot taululle. Piirsin kuvan levystä sekä ovesta tussitaulun ruudukko-osaan. Tämän jälkeen muodostin Pythagoraan lauseen ryhmän yksi mittaamista arvoista ja pyysin laskemaan sen. Saatiin arvo ja sen jälkeen pyysin kumpaakin ryhmää mittaamaan vastaavan mitan oviaukosta. Ryhmien mittaustuloksissa oli 10 cm ero eri ovilla. Kysyin, ollaanko tyytyväisiä, ja oppijat olivat. Tämän jälkeen vielä laskettiin levyn pinta-ala.

Oppimispäiväkirjani kirjasin, että kahden pienryhmän ohjaaminen oli haasteellista, se vaatisi lisäharjoittelua ja suunnittelua. Tehtävän vastaus eli loppuyhteenveto ei onnistunut, se oli sekava. Lisäksi pitäisi kehottaa oppilaita huolellisuuteen ja tarkistamaan saadut mittaukset. Minusta kuitenkin tuntui, että onnistuin ryhmäyttämään toisen ryhmän ja sain oppijat pohtimaan asiaa. Lisäksi sain oppijat havaitsemaan mittaustuloksen tarkkuuden merkityksen. Joku oppija oli miettinyt ääneen, että saranat vievät 2 cm ja se tulee ottaa mittaustuloksesta pois. Havaitsin, että kakkosryhmä huomasi, että levy on tuotava ovesta vinottain sisään. Ensimmäinen ryhmä ei sitä havainnut itsenäisesti.

6 HAVAINNOLLISTAMISEN KEHITTÄMISMAHDOLLISUUKSIA OPETUSESIMERKEISTÄ

Luvussa on kerrottu edellisen luvun opetustilanne-esimerkkien havainnollistamisen kehittämismahdollisuuksista eri miellejärjestelmien mukaan. Visuaalisen opetusesimerkin havainnollistamisen kehitettyä opettamista olen myös kokeillut harjoitusoppitunnilla. Kutakin opetusesimerkkiä on mahdollista havainnollistaa useammalla tavalla esimerkiksi käyttämällä eri aisteja havainnoimiseen ja näinhän käytännön opetustilanteessa tapahtuukin. Tässä olen kuitenkin eri tilanteissa kiinnittänyt huomiota auditiiviseen, visuaaliseen, taktiiliseen ja kinesteettiseen miellejärjestelmään.

6.1 Auditiivinen

Kehitystavoitteena on, että juuri-käsite havainnollistuu kuuloaistin kautta. Olen ottanut avuksi kuutiopeli-menetelmän. Yleensä ongelma ei ole se, ettei ole sanottavaa, vaan se, miten asia pyydystetään näkyviin ja miltä pohjalta idearunsautta käydään mielekkäästi järjestämään (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2007, 34). Hirsjärven ym. (2007, 34) toteamukseen on helppo samaistua.

Kuutiopeli ohjaa tarkastelemaan aihetta eri näkökulmista. Sen avulla saadaan nopeasti monipuolista materiaalia esimerkiksi lisäkysymyksiin ja -ongelmiin. Tarkoituksena on keskittyä aiheeseen, eikä kieliasuun. Menetelmässä on kuusi kohtaa.

1. Kuvaile kohde käyttäen kaikkia aistejasi. Millainen se on? Miltä se näyttää, kuulostaa, tuntuu, tuoksuu, maistuu? Millaisia ominaispiirteitä sillä on?
2. Vertaa. Mitä se muistuttaa? Minkä kanssa se on samanlainen/erilainen? Miten se eroaa jostakin lähikäsitteestä? Mikä on sen vastakohta?
3. Assosioi. Miten se ilmenee? Mitä se tuo mieleen? Millaisia asioita, tapahtumia, ihmisiä? Millaisia synonyymejä tai kielikuvia siitä käytetään? Mitä esimerkkejä voit siitä mainita?
4. Analysoi. Miten se on tehty? Mistä se koostuu? Mihin laajempaan yhteyteen tai luokkaan se kuuluu? Miten se toimii? Mistä se alkoi? Miten se on muuttunut? Mihin se vaikuttaa? Miten siihen voi vaikuttaa?
5. Sovella. Mihin sitä voidaan käyttää? Mihin sitä tarvitaan ja käytetään?
6. Argumentoi (esitä perusteluita) puolesta ja vastaan. (Hirsjärvi ym. 2007, 37.)

Olen soveltanut kuutiopeliä avuksi opettamisen havainnollistamiseksi suullista ilmaisua varten, jotta ilmaisu olisi monipuolista. Liitteessä kaksi on juuri-käsite kuutioituna.

Suulliset kysymykset antavat oppijoille mahdollisuuden löytää sen polun alkuun, joka johtaa kohti ratkaisua. Hyvä kysymys innostaa oppijaa ja ohjaa häntä miettimään, mitä kannattaa kokeilla tai tarkkailla. Kysymykset voivat koskea havaintoja, mittauksia, vertailuja, erilaisten tekijöiden vaikutuksia ja mahdollisia ennusteita. Paras tapa opettaa oppijoita tekemään kysymyksiä, on tehdä niitä heille malliksi. (Ahtee & Pehkonen 2000, 54–55.) Esimerkkitapauksessa opettaja voisi myös esittää ääneen kysymyksen: Mikä on juuri?

Auditiivisen havainnollistamisen kehittämisen yksi mahdollisuus olisi kertoa juuresta tarina. Esimerkiksi kauneimmat matemaattiset kaavat -kirjassa kerrotaan toisen asteen yhtälön juurista, että 500 eKr. kreikkalainen maanviljelijä halusi ostaa neliön muotoisen pellon ja aidan sen rajaamiseksi. Tarinassa päädytään toisen asteen yhtälön juuriin. (Salem, Testard & Salem 2000, 56.)

6.2 Visuaalinen

Tavoitteena on, että matemaattinen ongelma hahmottuu enemmän visuaalisesti trigonometrisestä tehtävästä. Samalla opitaan käyttämään laskinta apuna trigonometristen funktioiden ratkaisemiseen. Opetusharjoitteluni yhtenä kokeilutavoitteena oli kehittää esimerkkitehtävän havainnollistamista ja opetusmenetelmää sekä huomioida laskimen käytön opettaminen yhdistettynä opetukseen. Tehtävä kohteena oli arkipäivän ongelmanratkaisu, jonka avoimuus yleensä vaihtelee melko suljetusta täysin avoimeen. Toisaalta mielestäni tehtävässä on myös matemaattisen mallintamisen luonnetta, joka menetelmien kannalta on avoin ja lopputuloksen suhteen melko avoin tai avoin. Avoin ongelmanratkaisutehtävä on tässä tehty enemmän jäsennellysti, jotta havainnollistamiseen jää enemmän aikaa.

Aluksi testasin luokkahuoneen valot, jotta näkyvyys olisi tussitaululle paras mahdollinen. Valojen säätäminen ei tässä tilanteessa auttanut taulun kiiltoon. Luokkahuoneessa voisi mahdollisesti tutkia vielä verhojen tai sädekaihtimien käytön vaikutusta näkyvyyteen.

Seuraavassa on kuvattu kehityskohtia, muuten tehtävän opettamisen kulku meni, niin kuin kohdassa 5.2 on kuvattu. Kehitin harjoitustehtävää siten, että en kierrättänyt tiehallinnon monistetta, koska se ei tuonut oppijoille asian havainnollistamiseen lisäarvoa. Käytin kuitenkin monistetta opettamisen tiedonlähteenä. Piirsin liikennemerkin kuvan tussitaululle kuten aiemmin, mutta jätin prosenttilukumerkinnän siitä vielä pois. Kiinnitin huomiota, etten puhunut piirtämisen aikana, koska ei ollut tarvetta selittää kuvanpiirtoa. Siten huomioin oppijoiden yksikanavajärjestelmän ja samalla annoin mallia huolellisella piirtämisellä. Monisteen sijaan aktivoin aiheeseen kyselemällä opiskelijoilta, oletteko nähneet, mitä lukuja on jyrkkä ylämäki -liikennemerkissä. Oppija kertoi nähneensä, mutta ei muistanut lukuja. Täydensin kuvaa prosenttilukumerkillä ja kerroin, mitä se tarkoittaa. Kerroin oppijoille yleissivistävässä tarkoituksessa, että varoitusmerkkiä ei käytetä, jos pituuskaltevuus on alle viisi prosenttia. Eräs mahdollisuus olisi esittää oppijoille kysymys, mitä kuvassa tapahtuu, joka johdattelisi enemmän analysoimaan kuvaa ja kertomaan sen vaikutelmista (Pruuki 2008, 118). Oppimispäiväkirjaani olin merkinnyt, että oppilaat näyttivät olevan kiinnostuneita asiasta.

Tällä kertaa muutin tehtävän aloituksen suljetuksi kysymykseksi ja kirjasin sen tussitaululle, jotta havainnollistamiselle jää enemmän aikaa. Oppijan tehtävänä oli kuitenkin löytää riippumaton muuttuja (tässä tapauksessa vaakasuora etäisyys, joka on maan alla, mäen alhaalta huipulle), jonka suuruutta muuttamalla hän voi vaikuttaa riippuvaan muuttujaan (mäen korkeus). Lisäksi oppijan piti löytää tilanteeseen muut vaikuttavat tekijät, joiden arvoja pyritään pitämään vakiona. Tällaisessa tutkimusta korostavassa työskentelyssä oppija tutustuu ja joutuu käyttämään matematiikan keskeisiä käsitteitä ja hänen käsitteellinen sekä luonnontieteellisen menetelmän ymmärryksensä kehittyy ja vahvistuu. Usein ajatellaan, että luova ongelmanratkaisu koostuu vain pulmatehtävistä, mutta myös rutiiniharjoittelu voidaan rakentaa sellaiseksi, että tehtäväjoukon takaa löytyy jokin yhtenäistävä struktuuri, jonka puitteissa voidaan harjoittaa mielekästä pohdiskelua. Pientenkin ongelmien ratkaisuun sisältyy luovuutta, kun ratkaisuun ei päädytä tuttua menetelmää käyttäen, vaan yhdistellään ja kokeillaan erilaisia ideoita ja toimintavaihtoehtoja. (Ahtee & Pehkonen 2000, 50–51 & 69–70).

Toisaalta tehtävän muuttaminen suljetuksi rajaa oppijalta mahdollisuuden oman matemaattisen mallin muotoilemisen tietyin reunaehdoin. Matemaattinen mallintaminen tarjoaa mahdollisuuden muun muassa kehittää ongelmanratkaisutaitoja (Sahlberg & Saharan 2002, 185). Kokemukseni mukaan opettaja voi myös johdatella suljettuun tehtävään, vaikka tehtävänanto on avoin. Jos tehtävän antaisi kotitehtäväksi, niin se saattaisi herättää enemmän keskustelua kuin pelkästään ihmettelyä. Avoimen tehtävän käsittelyyn olisi kuitenkin varattava runsaasti aikaa, jos erilaisia ja eri ratkaisustrategioita olevat tehtävät käytäisiin yhdessä läpi oppitunnilla.

Mäen kuvaamisen muutin peilikuvaksi, koska se visuaalisesti on yhtenäisempi liikennemerkin kuvan kanssa. Mielestäni tässä vaiheessa oleellista tehtävässä ei ollut hahmottaa peilikuvia tai muita asentoja. Ne tulevat esiin muissa tehtävissä. Pituuskaltevuuden yhtälöön täydensin näkyviin yhtälönratkaisutapahtumat, jotka tuovat näkyviin, mitä yhtälölle on tehty. Lisäksi laskin numeroarvot ja yhtälö sieveni lisää, joka helpotti oletusarvojen laskemista taulukkoon. Visuaalisuutta lisäisin vielä raamittamalla saatu yhtälö, jotta sen helposti hahmottaa muusta ympärillä olevasta asiasta. Taulukon merkintöjä kehitin visuaalisemmaksi käyttämällä väliviivaa hakasulkujen sijaan yksikkötunnuksen merkitsemisessä, koska pituusmitta on jaettu yksiköllä metri. Taulukolle lisäsin myös otsikon. Tällä kertaa en kirjannut taulukon viereen mitään lauseen muotoon, koska kirjaamassani vastauksessa oli näkyvissä vastaava tieto. Kerroin kuitenkin asian sanallisesti. Tämä valinta säästi hieman aikaa muuhun.

Kehitin jatkotehtävän, joka toi mukaan trigonometrisia funktioita, mikä syvensi tehtävää ja havainnollisti lisää asiaa. Kirjasin suljetun kysymyksen, mikä on mäen jyrkkyys asteina. Saatiin yhtälö sen ratkaisemiseksi. Oppijat pääsivät aikaisemmassa vaiheessa oppituntia kokeilemaan trigonometrisen funktion ratkaisemista laskimella. Laskimesta tulee tietää, miten sen saa deg-tilaan ja tietää, että se on siinä tilassa. Lisäksi pitää tietää, miten käänteisfunktiotoiminto saadaan laskettua laskimella. Näin saatiin yhdessä oppijoiden kanssa selvitettyä kunkin laskimen toiminta. Lisäksi oppija oppii tuntemaan trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot sekä kulmayksiköt. Tehtävä havainnollistui laskimen avulla. Saadusta ratkaisusta kehotin huomaamaan, kuinka yllättävän pieni mäen jyrkkyys on asteina. Piirsin suorakulmaiseen kolmioon saadun tuloksen. Piirtämiseen käytin punaista tussia, jotta se visuaalisesti erottuisi jo arvioidusti piirretystä kulmasta. Liitteessä kolme on kehitetyn tehtävän visuaalinen ilme. Esimerkkitehtävässä on myös taulu jaettu osiin, mikä rajaa ja selkeyttää muistiinpanojen kirjaamista. Myös valmiin ruututaulun hyödyntäminen voisi olla mahdollista. Se saattaa helpottaa oppijoiden muistiinpanojen kirjaamista omiin ruutupapereihinsa.

Yksi mahdollisuus voisi olla, että jatkotehtävää ei tuotaisi esille opettajan toimesta tässä vaiheessa, ellei se herättäisi jo nyt oppijoilta kysymyksiä. Tehtävään voisi palata myöhemmin, kun trigonometriset funktiot on jo käsitelty. Ajatuksena olisi, että opettaja ohjaisi ongelmanlähteelle siten, että tehtävä voisi herättää oppijoilta jatkokysymyksen, jolloin opittaisiin ongelman löytämistä.

Lopuksi vielä kerroin, että tämä tehtävä oli johdatteluksi suorakulmaisen kolmion trigonometriaan, josta näkyy, että kulma on trigonometrian keskeinen suure. Lisäksi suorakulmaisen kolmion sivujen suhteet riippuvat vain kulman, eivät kolmion koosta. Tämä johtuu siitä, että yksi terävä kulma määrää täydellisesti suorakulmaisenkolmion muodon. (Aunola, Ilomäki, Keskinen, Nieminen, Pösö, Salonen & Tanila 2004, 186.) Näin saatiin esimerkkitehtävä kiinnitettyä oppikirjan havainnollistavaan esimerkkiin. Esimerkkitehtävän, oppikirjan ja muun havainnollistavan aineiston avulla on pyritty selventämään trigonometristen funktioiden merkitystä.

Yksi mahdollisuus olisi täydentää tehtävän visuaalista havainnoimista vielä siten, että kyseessä olevasta liikennemerkistä hankkisi kuvataulun, piirtoheitinkuvan tai tietokoneen avulla heijastaisi liikennemerkistä kuvan. Tästä tietystä liikennemerkistä voisi myös ottaa digikameralla kuvan ja heijastaa se näkyviin jollain luokassa käytössä olevalla laitteella. Havainnollistavana välineenä voisi myös käyttää videota, esimerkiksi kuvaamalla matkan Lukonmäkeä alhaalta ylös. Liikkuvassa kuvassa näkyisi myös liikennemerkki. Äänen, kuvan ja liikkeen yhdistävä multimedia tuovat esiin ilmiöitä, kun niitä ei voi tavoittaa omin havainnoin välittömästi ympäristöstä.

6.3 Taktiilinen

Tavoitteena on, että asia hahmottuu lisää havainnollistavan välineen avulla, jota voi koskea. Tässä on kuvattu kehityskohtia, muuten tehtävän opettamisen kulku menisi, niin kuin kohdassa 5.3 on kuvattu.

Kehitän tehtävää siten, että täsmennän heti alkuun, mitä tehdään, esimerkiksi lasketaan CD-levyn fyysinen pinta-ala. Näin säästyy aikaa. Lisäksi ajan säätöä tulisi, jos heti alkuun käyn läpi laskentaperiaatteen eli miten tehdään. Toinen tapa voisi olla, ennen kun oppijat ryhtyvät mittaamista, heitä pyydetään ensin arvioimaan pinta-alaa ja sitten mittaamaan. Näin mahdollisesti syntyisi myös keskustelua siitä, mitä tullaan mittaamaan. Piirtoheitintä hyödyntäisin havainnollistamisessa lisää. CD-levyn avulla voi piirtää havainnollistavan kuvan piirtoheitinkalvolle tussikynällä, kuten paperille. Näin voi antaa mallia myös oppijoille tehdä vastaavasti paperille. Oppijoiden itsenäisen tai parityöskentelyn jälkeen opettaja voi näyttää esimerkiksi läpinäkyvällä viivoittimella mittaamisen mallia myös piirtoheitinkalvolta. Jos käytössä on dokumenttikamera, niin sillä voi tehdä vastaavasti. Rohkaisevaa ja kannustavaa on myös esittää CD-levyn mittaamiseen toinen vaihtoehto, itse CD-levystä. Tämä ei vie paljoa aikaa. Lisäksi tarinan, miksi CD-levyn halkaisija on juuri 120 mm voi jättää pois, jotta aikaa jää enemmän esineen tarkasteluun käsin koskemalla. CD-levyä koskiessa voi tuntea esimerkiksi sen muodon tai painon. CD-levy tuo lisää havainnollisuutta ja vahvistaa muistamista. Yleensä esinettä voi koskea tai sen voi jopa liittää johonkin toiseen esineeseen.

Täydentäisin tehtävää siten, että lisäisin siihen vastauksen arvioinnin. Näin saattaisi havaita mahdolliset korjaukset, joka kehittää taitoa korjata toimintaa. Arviointia voi olla myös mielekästä käyttää, koska CD-levy on mittakaavassaan oleva esine, siten siitä saa esimerkiksi vertailukohteen johonkin toiseen esineeseen. Tämä kehittää arvioinnin taitoja. CD-levyllä voidaan myös havainnollistaa asian suuruusluokkaa, jolloin päättelykyky kehittyy. Jos CD-levyn pinta-ala laskua haluaisi myöhemmin jatkaa, niin siihen voisi lisätä esimerkiksi tilavuuden, painon, tallennuskapasiteetin, urien syvyyden tai levyn lukunopeuden laskemisen.

6.4 Kinesteettinen

Tehtävän kohteena oli siis mittaaminen ja tiedonkeruu, jotka oppijat tekevät yhteistoiminnallisesti pienryhmissä. Tehtävän on luonteeltaan jonkin verran avoin menetelmän suhteen, mutta melko suljettu lopputuloksen suhteen. Tässä on kuvattu kehityskohtia, muuten tehtävän opettamisen kulku menisi, niin kuin kohdassa 5.4 on kuvattu.

Pienryhmätyöskentelyn aloittamista voisi mahdollisesti kehittää siten, että se olisi täsmällisempi. Voisin sanoa alkuun, että aloitetaan mittaamalla oviaukon leveys ja korkeus. Näin ryhmä ryhtyisi toimimaan pohtimatta, mitä tulee mitata, mutta aikaa säästyisi. Pohdintavaihe myös hieman siirtyisi myöhemmäksi. Pohtia voisi mittauksen jälkeenkin. Yksi tehtävän kehittämismahdollisuus olisi kirjata taululle eri vaiheet, mitä tehdään. Tämä mahdollisesti nopeuttaisi tehtävän kulkua.

Kun ryhmien välinen ero mittaustuloksissa oli peräti 10 cm, voisin kysyä, miksi ryhmillä tuli eri arvot. Lisäksi tarvittaessa voisin myös mittaamalla tarkistaa tuloksen, ja havaita, ovatko ovi-aukot todellakin eri suuria. Jos mittaamani tulokset olisivat samat, voisin ohjata oppijoita sanomalla: ”Kummassakin ovessa eri mitat. Ei voi olla oikein.” Lisäksi esittäisin lisäkysymyksiä: ”Mikä pielessä? Kumpi ryhmä on oikeassa vai onko kumpikaan?” Tämä saattaisi aktivoida ryhmien itsenäiseen tarkistusmittaukseen. Täydennykseksi voisin kommentoida, että virheellistä tulosta ei voi hyväksyä. Lisäksi kohottaisin oppijoita huolelliseen mittaamiseen ja tarkistamaan, mistä mittauserot johtuvat.

Kehittäisin opetustani siten, että kiinnittäisin huomiota yhtenäisen tuloksen esittämiseen, joka parantaa selkeyttä. Mahdollisesti voisin kysyä tuloksia siten, että hyväksyn vain yhteenvetoon tehtävänannossa kysyttyjä asioita, joka tuo selkeyttä sekä havainnollistaa tulosten vertailtavuutta. Yksi mahdollisuus olisi, että ensimmäisessä vaiheessa yhteenvedon kirjaamisessa voin pysähtyä levyn leveyden tulosten arviointiin. Saatujen tulosten analyysin voi tehdä yhdessä oppijoiden kanssa ja tarvittaessa ryhmä voi tarkistaa, mitata ja laskea uudestaan tai yleensä korjata saatua tulosta. Tässä kohtaa saattaa tapahtua lisää oivalluksia ja asian ymmärtämistä, oppimista. Toisessa vaiheessa käsiteltäisiin levyn pinta-ala samoin. Eräs mahdollisuus vaikuttaa yhteenvedon selkeyteen olisi, että taululla käsiteltäisiin tehtävänannon vastaus yhdestä luokkahuoneen ovesta. Voisin ohjata niin, että esittäisin oppijoille, että otetaan tämä ovi. Sen jälkeen tehtäisiin siitä yhteenveto. Toinen ryhmä voisi tarkastella mittaamansa oviaukon tuloksia ja verrata niitä yhteenvetoon. Millä tavalla yhteenvedon tehtäisiinkin, niin lopulta olisi hyvä vielä kommentoida, että vastaus tai tulos on tässä, jotta ei jää epäselvyyttä siitä.

Ohjaamista voisi lisätä myös niin, että kertoisi pienryhmille tehtävänannon yhteydessä, miten tehtävänannon tulokset käsitellään. Valita voisi, että jätetäänkö tehtävänannon tulokset pienryhmän käsiteltäväksi vai käsitelläänkö molempien pienryhmien tulokset erikseen vai yhdessä siten, että muodostetaan yksi kaikkien hyväksymä ratkaisu tai jollain muulla tavalla. Sovittu tuloksien käsittely saattaa ohjata tehtävän prosessia ja ryhmän roolienjakoa. Esimerkiksi kirjuria ei tarvita, jos opettaja hoitaa tulosten kirjaamisen.

Eräs mahdollisuus olisi, että kummastakin ryhmästä yksi esittäisi ryhmän ratkaisun taululla. Opettaja voisi jakaa taulun niin, että kummallekin ryhmälle on taululla oma paikka esittää ratkaisunsa. Tällä tavalla jaetaan tietoja, saadaan erilaisia mielipiteitä esiin tai voidaan vertailla erilaisia ongelmanratkaisutapoja. Työskentely tapa luo myös luokkahenkeä. (Sahlberg & Sharan 2002, 31.) Oppijan esittämistaidot myös kehittyisivät. Pruukin (2008, 69) kirjassa esitetään eri tapoja, joilla ryhmätyöskentelyn tuloksia voi esittää. Tähän mielestäni voisi myös sopia, että kumpikin ryhmä tekee tehtävän paperille ja antaa sen sitten toiselle ryhmälle arvioitavaksi. Tämän jälkeen ryhmät voivat antaa toisilleen palautetta ja tehdä lisäkysymyksiä.

Opetustilannetta voisi myös kehittää siten, että ryhmille annettaisiin iso paperi tai mahdollisesti fläppitaulun paperi sekä tussit, johon ryhmä tekisi muistiinpanot ja esittelisi tämän jälkeen tuotoksen muille oppijoille. Näin opittaisiin tekemään yhteenvetoja ja esityksiä niistä. Haitta puolena on, että yhteiselle paperille yleensä on vain tilaa yhdelle kirjoittajalle. Lisäksi muistiin jäädyt muistiinpanot voivat olla hataria tai niitä ei jää ollenkaan tehtävästä. Yksi mahdollisuus olisi jakaa kullekin oppijalle moniste, jossa muun muassa on tehtävänanto ja jäsennelty rakenne. Tähän oppilaat sitten piirtäisivät ja kirjaisivat mittauksia sekä tekisivät tarvittavia laskuja. Samalla jäisi kullekin oppijalle muistiinpanot tehtävästä. Lisäksi henkilökohtainen moniste antaisi paremmin mahdollisuuden laatia erilaisia ratkaisuja.

Opettamista voisi kehittää myös siten, että lopuksi olisi pohdittu tehtävän tekemistä ja arvioitu sitä. Keskustelua voisi syntyä esimerkiksi, miten ovi aukeaa, miten karmit, kynnykset ja saranat vaikuttavat, miten mittavälineet ja niiden käyttö vaikuttaa tulokseen. Ehkäpä keskustelua olisi tullut Pythagoraan lauseen hyödyllisyydestä ja merkityksestä sekä pinta-alasta. Lisäksi olisi voinut kysyä, miltä pienryhmätyöskentely tuntui. Lisäksi oppijat voisi ohjata yhteispohdintaa esimerkiksi kysymyksillä, miten teitte tietyn asian, mitä siinä oli hyvää tai huonoa. Yhteistoiminnallisessa oppimisessa on tyypillistä avoimuus, luottamus ja yhteispohdinta (Peltonen 1997, 34). Yhteispohdinnalla voisi myös miettiä, voiko tehtävän tehdä toisin, vielä yksinkertaisemmin. Tehtävän toistaminen, tulosten vertailu toisen ryhmän kanssa ja yhdessä pohtiminen, varmistavat yleensä, että ollaan oikeassa ratkaisussa. Tällöin tuloksesta voidaan mahdollisesti tehdä yleistys.

Yksi mahdollisuus olisi vielä jatkaa kirjan tehtävää esimerkiksi kysymällä, paljonko levyjä tarvittaisiin täyttämään luokan jokin seinä. Jos jokin ryhmä ei huomioisi rakennuslevyn maksimileveyttä, vaan esimerkiksi ottaisi oven leveyden, niin kysyä voisi, paljonko enemmän levyjä tarvittaisiin täyttämään luokan seinä verrattuna maksimilevyiseen rakennuslevyyn. Vaihtoehtoisia ratkaisuja löytyisi esimerkiksi siitä, miten levyt asetetaan seinään ja miten hukkapalat hyödynnettäisiin. Rakennuslevyä voisi esimerkiksi verrata luokan tauluun. Kysymys voisi olla, onko luokan taulu tuotu ovesta sisään ja miten. Tässä yhteydessä voisi käyttää esimerkiksi havainnollistamisvälineenä klinometriä tai muuta kulmanmittausvälinettä luokan korkeuden määrittämiseen.

Lopuksi, jos aikaa on toimintaa jatkaa, niin voisi leikata esimerkiksi pahvista, styroksista tai muusta jäykästä materiaalista mittojen mukaisen rakennuslevyn ja käytännössä kokeilla, kuinka se mahtuu ovesta sisään ja tehdä siitä havaintoja. Mahdollisesti luokkaan voisi tuoda oikean rakennuslevynkin, jossa mitat olisivat tehtävän tuloksen mukaisia tai rakennuslevy työstettäisiin mittojen mukaiseksi. Toinen vaihtoehto voisi havainnollistamiseen olla tietokoneohjelma, jossa esimerkiksi animaation avulla tehtävän ratkaisuja havainnollistetaan tai testataan niitä. Toiminnallisuutta voisi lisätä niin, että oppijat käyttäisivät tietokonetta.

7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Opetuksen havainnollistaminen koostuu kielestä, kuvista, tuntemisesta ja toiminnasta. Valitsemme ja tulkitsemme, mitä havaitsemme. Havaintoja teemme kaikilla aisteilla. Havainnot vetoavat erilaisiin oppimistyyleihin, miellejärjestelmiin. Yleensä muiden kuin oman oppimistyylien ymmärtäminen ja niihin sopeutuminen lisää opetustaitoa. Miellejärjestelmäni on lähinnä visualiskinesteettinen. Opettajan on hyvä tietää oma vahvin miellejärjestelmänsä, jotta osaa enemmän painottaa niitä itselle heikompien miellejärjestelmien käyttöä. Opetusta ei voi järjestää niin, että nyt tulee auditiivisille ja sen jälkeen kinesteettisille, vaan opetuksen luokkatilanne tulisi olla monikanavaista. Erilaiset oppimistyylit tulisi kuitenkin opetuksen havainnollistamisessa ottaa huomioon. Opettajan salliva ja joustava toiminta antaa tilaa oppimistyyleille. Opettajan on hyvä miettiä opetusta suunniteltaessa, kuinka voisi huomioida erilaiset miellejärjestelmät.

Matematiikan havainnollistamistapoja ja mahdollisuuksia on kuunteleminen, näkeminen, tunteminen ja tekeminen. Esimerkiksi piirretyt kuvat auttavat jäsentämään ajattelua. Opetusmenetelmistä esimerkiksi yhteistoiminnallinen menetelmä auttaa havainnollistamaan oppijoiden aistikokemuksia sosiaalisessa oppimisympäristössä.

Myös oppimateriaalin ja opetusvälineiden avulla voidaan havainnollistaa ja konkretisoida.

Havainnollistamisella syvennetään opetusta, konkretisoidaan asiaa ja helpotetaan hahmottamista. Lisäksi helpotetaan ymmärtämistä, muistamista ja kohdistetaan tarkkavaisuutta tiettyyn asiaan. Havainnollistamalla annetaan myös virikkeitä ja herätetään kiinnostusta. Havainnollistaminen antaa mahdollisuuden käyttää erilaisia esitysmuotoja. Havainnoinnin kautta esimerkiksi oivalletaan matemaattisia ilmiöitä.

Kehittämishanke merkitsi huomaamaan erilaisia tapoja havainnollistaa matematiikan opetusta huomioimalla eri miellejärjestelmät. Samalla tutustuin erilaisiin matematiikan oppimisvaikeuksiin ja opetusmenetelmiin sekä oppimiskäsityksiin. Merkityksellistä oli kehittyä havainnollistamaan matematiikan opettamista.

LÄHTEET

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Oy Edita Ab.

Ahtola, J. 2001. Matematiikan oppimisvaikeudet; esimerkkinä lähihoitajaopiskelijoiden matematiikka. Hämeenlinna: Hämeen ammattikorkeakoulu.

Ahonen, T., Siiskonen, T. & Aro, T. 2004. Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä. Jyväskylä: PS-kustannus.

Ahvenainen, O & Holopainen, E. 2005. Lukemis- ja kirjoittamisvaikeudet; Teoreettista taustaa ja opetuksen perusteita. Jyväskylä: Special Data Oy.

Aunola, H., Ilomäki, R., Keskinen R., Nieminen, P., Pösö, J., Salonen, R. & Tanila, J. 2004. Pythagoras 1 tekniikan ammattimatematiikka. Helsinki: Edita Prima Oy.

Hakkarainen, K., Bollström-Huttunen, M. Pyysalo, R. & Lonka K. 2005. Tutkiva oppiminen käytännössä. Helsinki: WSOY.

Hirsjärvi, S. & Huttunen, J. 2000. Johdatus kasvatustieteeseen. Helsinki: WSOY.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara P. 2007. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Hyppönen, O. 2004. Opetuksen ja opiskelun tuki. Helsinki: TKK.

Hämäläinen, R., Liias, S., Taarna, V. & Valkama, A. 2007. Erilaisen oppijan käsikirja. Helsinki: Erilaisten oppijoiden liitto ry.

Kangasniemi, E. 2000. Opettajan uskomukset ja opetusmenetelmät sekä oppilaiden oppimistulokset matematiikassa. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kivelä, S. 2007. Matematiikan opettamisen vaikeus. Helsinki: Suomen fyysikkoseura, Suomen matemaattinen yhdistys.

Lahtinen, A. 2006. Opastettu kierros matematiikan näkymättömään katedraaliin. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuuskunta.

Lauttamus, U. 1987. Matematiikan oppimisvaikeudet ammattikoulun ensimmäisen vuoden aikana opettajien ja oppilaiden arvioimina. Jyväskylä: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylän yliopisto. Väitöskirja.

Lyytinen, P., Korkiakangas, M. & Lyytinen, H. 2003. Näkökulmia kehityspsykologiaan, kehitys kontekstissaan. Helsinki:WSOY.

Malaty, G. 1993. Matematiikan didaktiikkasarja: Geometrinen ajattelu 1 didaktiikka. Helsinki: WSOY.

Malaty, G. 2003. Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Opetushallitus.

Martio, O. 2004. Didaktinen matematiikka?. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuuskunta.

Martio, O. 2007. Matematiikan osaamisesta ja oppimisesta. Helsinki: Suomen fyysikkoseura, Suomen matemaattinen yhdistys.

Myllylä M. 2008. Tampereen ammatillinen opettaja korkeakoulun opetuksen havainnollistamisen kurssi materiaali. Tampere: Tampereen ammatillinen opettaja korkeakoulu.

Neuwos-sivu. Viitattu 2.11.2008. Saatavissa: http://www.docutech.fi/esitys/piirtoheitinkalvot.html.

Nurmi S. & Jaakkola T. Teknologiset oppimisympäristöt ja oppiminen. Turku: Turun yliopisto, opetusteknologia yksikkö.

Patrikainen, R. 1999. Opettajuuden laatu. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Pehkonen, E. 2003. Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuuskunta.

Pruuki, L. 2008. Ilo opettaa: tietoa, taitoa ja työkaluja. Helsinki:Edita Publishing Oy.

Rauste-von Wright, M. & von Wrigh, J. 1994. Oppiminen ja koulutus. Helsinki: WSOY.

Rekola, H. Opetus, ohjaus, oppiminen. Tampere: Tampereen yliopisto [verkkodokumentti]. Viitattu 18.6.2008. Saatavissa: http://aikap3.files.wordpress.com/2008/01/opetus-ohjaus-oppiminen-1712008.ppt.

Repo, I & Nuutinen, T. 2003. Viestintätaito. Helsinki: Otava.

Räsänen, P. & Ahonen, T. 2005. Oppimisvaikeudet, neuropsykologinen näkökulma. Helsinki:WSOY.

Sahlberg, P. & Saharan, S. 2002. Yhteistoiminnallisen oppimisen käsikirja. Helsinki:WSOY.

Salem, L., Testard, F. & Salem, C. 2000. Kauneimmat matemaattiset kaavat. Helsinki: Art House Oy.

Salovaara, H. 1997. Oulun yliopisto [verkkodokumentti]. Viitattu 11.7.2008. Saatavissa: http://wwwedu.oulu.fi/okl/lo/kt2/kasitt.htm.

Seppälä, M. 2004. Laskutaito ja numeroiden lukutaito edelleen tarpeen. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuuskunta.

Shmakov, P. & Selikhova, L. 2006. Keksitään ratkaisu yhdessä oppilaiden kanssa: ajatuksia sekä vapaaehtoisesta matematiikan kerhotoiminnasta ja kilpailuista että luovuudesta. Helsinki: Suomen fyysikkoseura, Suomen matemaattinen yhdistys.

Tossavainen, T. 2004. Matematiikan aineenopettajakoulutuksesta ja didaktisesta matematiikasta. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuuskunta.

Tossavainen, T. 2005. Matematiikka ja kieli. Helsinki: Tieteellisen seurain valtuus-kunta.

Tossavainen, T. 2007. Matematiikan osaamisen ja oppimisen asiantuntijoita. Helsin-ki: Suomen matemaattinen yhdistys.

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena: Konstuktivistisen oppimiskäsi-tyksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

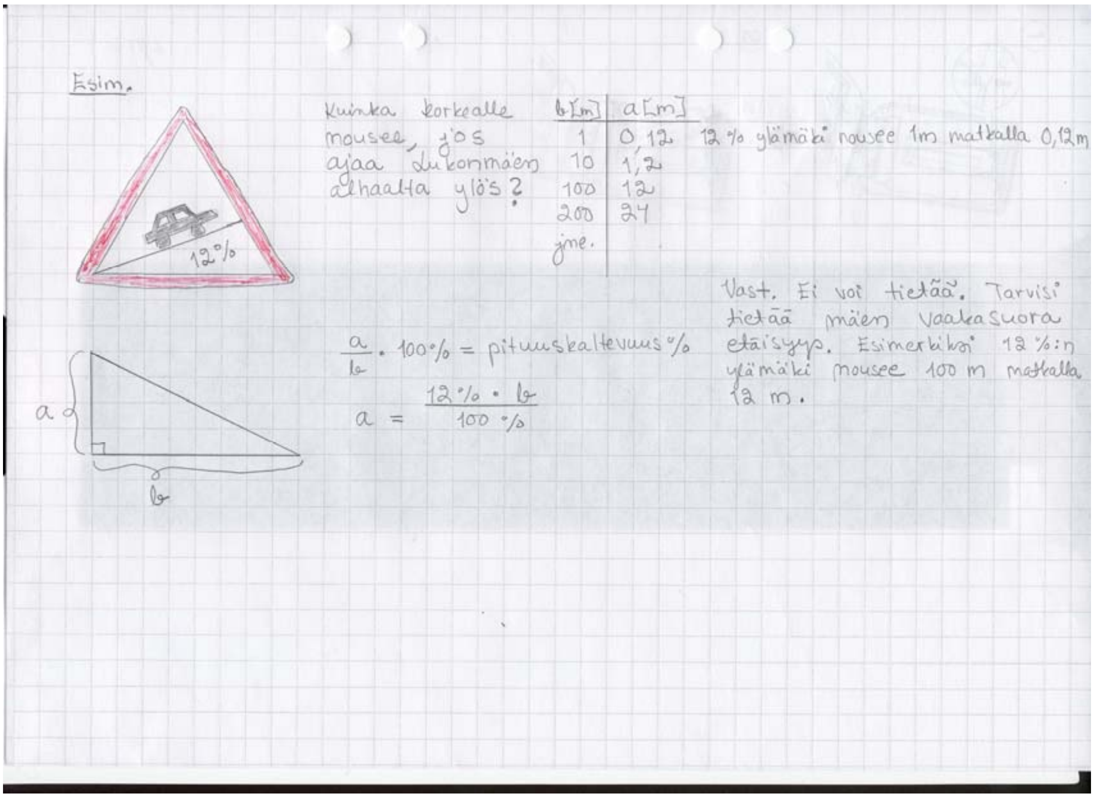
Uusikylä, K. & Atjonen, P. 2002. Didaktiikan perusteet. Helsinki: WSOY.

Vuorinen, I. 2005. Tuhat tapaa opettaa. Tampere: Resurssi.

Vuorinen, M. 2003. Matematiikka - monipuolinen tiede. Helsinki: Suomen fyysik-koseura, Suomen matemaattinen yhdistys.

Wikipedia. Viitattu 18.6.2008. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Oppimisteoria#Kognitivismi_ja_behaviorismi.

LIITE 1: VISUAALISUUS OPETUSESIMERKISSÄ



LIITE 2: KUUTIOITU JUURI-SANA

Kuutioin sanan **juuri**

1. Kuvailu

Juuria on monenlaisia esimerkiksi puna**juuria**, hampaan**juuria**, **juuri**hakemistoja ja taikina**juuria**. Tässä **juurella** tarkoitetaan matemaattista **juuri**operaatiota eli laskutoimitusta. Reaalilukujen **juuri**funktio matematiikassa *n*:nnellä **juurella** luvusta *x* tarkoitetaan lukua, jonka *n*:s potenssi on x. Tätä merkitään symbolilla $\sqrt[n]{x}$. Tässä *n* on luonnollinen luku. Nollan **juuri** on nolla kaikilla *n*. Parittomilla *n*-**juuri** voidaan määritellä kaikille reaaliluvuille *x* siten, että **juuren**otto on bijektiivinen funktio. Jos indeksi n on pariton, voi juurrettava x olla myös negatiivinen. Parillisilla *n*-**juuri** voidaan määritellä epänegatiivisille *x* siten, että **juuren**otto on bijektiivinen funktio, eli parillinen **juuri** on määritelty vain, kun juurrettava x on positiivinen luku tai nolla.

2. Vertailu

Juuren voi hahmottaa myös kuvana. Kun n:n arvo on kaksi, **juuri** näyttää neliöltä. Kun n:n arvo on kolme, **juuri** näyttää kuutiolta, ja se luetaan ”kuutio**juuri** x:stä”. Neliö**juuren** indeksiä eli n:ää ei yleensä kirjoiteta näkyviin, niin kuin kuutio**juuressa** tehdään.

Ratkaistaessa toisen asteen yhtälöä **juuren** alla olevaa lauseketta kutsutaan diskriminantiksi. Sen merkki määrää yhtälön **juurten** lukumäärän. Jos dikriminantti on suurempi kuin nolla, yhtälöllä on kaksi eri suurta **juurta**. Jos dikriminatti on yhtä suuri kuin nolla, yhtälöllä on yksi **juuri**. Jos dikriminantti on pienempi kuin nolla, yhtälöllä ei ole reaalilukualueella **juuria**. Imaginäärilukualueella neliö**juuri** -1:stä on i. **Juuri** voidaan siis määritellä myös kompleksitasossa, jolloin x:n arvona voi olla myös negatiivisia arvoja.

3. Assosiointi

Babylonialaiset määräsivät aikoinaan, ehkä jo noin 1700 eKr, neliö**juuren** likiarvon eräällä irrationaalimenetelmällä. **Juuri** on englanniksi root, ranskaksi carrée, saksaksi wurzel. Neliö**juuri**merkki on tyylitelty pienestä r-kirjaimesta, joka aloittaa latinan kielen **juurta** tarkoittavan sanan radix. Tästä sanasta ovat suomen kieleen johtuneet mm. sanat radikaali ja retiisi.

Yleensä **juuri**-käsite on lähellä potenssi käsitettä. Ne molemmat kuuluvat algebraan. Useasti laskimessa ovat **juuri**- ja potenssinäppäimet vierekkäin.

4. Analysointi

Juuri koostuu määritelmästä, merkintätavasta ja sen ominaisuuksista. Lisäksi on laskukaavoja ja -sääntöjä, joihin sisältyy **juuren** käsitteitä, kuten juurrettava. Laskutoimituksista yhteenlaskussa yhdistetään ne **juuret**, joissa on sama juurrettava. Kerto- ja jakolaskussa viedään juurrettavat saman **juuri**-merkin alle.

5. Soveltaminen

Yleisestä **juuresta** ehkä eniten on käytetty neliö**juurta** tai kuutio**juurta** käytännössä. Luvun a neliö**juuri,** on sen neliön sivun pituus, jonka pinta-ala on a. Jos luku a on positiivinen reaaliluku, kuution, jonka sivun pituus on a, tilavuus on a^3. **Juurella** on perusominaisuuksia, joita voidaan käyttää hyödyksi laskutoimituksissa. Saatua lauseketta voidaan sieventää käyttämällä neliö**juuria** koskevia laskusääntöjä. Reaaliluku**juurelle** pätevät seuraavat laskutoimitukset:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}},$$

missä *a* ja *b* ovat positiivisia reaalilukuja. Jokaisella ei-negatiivisella luvulla on täsmälleen yksi neliö**juuri**. Laskusäännöt ovat käyttökelpoisia myös toiseen suuntaan.

Neliö**juurelle** on löydettävissä likiarvoja esimerkiksi kokeilemalla käyttäen hyväksi **juuren** määritelmää. **Juuri**arvoja voidaan myös laskea laskimella tai tietokoneella sekä lukemalla graafista esitystä tai katsomalla taulukosta. Neliö**juuren** likiarvoon voidaan ottaa yhtä monta merkitsevää numeroa kuin niitä on juurrettavassa.

Tavallisesti Pythagoraan lausetta sovellettaessa tai ratkaistaessa toisen asteen yhtälöä joudutaan neliö**juuri**laskuihin. Lisäksi **juuri**laskutoimituksia esiintyy usein mm. tilastollisessa tarkastelussa.

6. Argumentointi

Juurilaskutoimitusten osaaminen mahdollistaa laskun sieventämisen, joka yleensä mahdollistaa ratkaisuun pääsemiseen. Yleisellä **juuren** määritelmän nojalla voidaan osoittaa oikeaksi laskusääntöjä, joita voidaan käyttää esimerkiksi käytännön ongelmanratkaisussa. **Juuri** on tarpeellinen ja hyödyllinen käsite matematiikassa.

LIITE 3: OPETUSESIMERKIN VISUAALISUUDEN KEHITYS