



Olli Hänninen

FIN2023N00-geoidimallin paikallinen sovitus Helsingin alueella

Metropolia Ammattikorkeakoulu

Insinööri (YAMK)

Maanmittaustekniikka YAMK

Insinöörityö

24.4.2025

Tiivistelmä

Tekijä:	Olli Hänninen
Otsikko:	FIN2023N00-geoidimallin paikallinen sovitus Helsingin alueella
Sivumäärä:	57 sivua
Aika:	24.4.2025
Tutkinto:	Insinööri (YAMK)
Tutkinto-ohjelma:	Maanmittaustekniikka YAMK
Ammatillinen pääaine:	Maanmittaustekniikka
Ohjaajat:	DI Simo Gröhn Lehtori Matias Ingman

Insinööriyössä selvitettiin geoidimallin paikallisen sovituksen vaikutuksia GNSS-mittausten korkeustarkkuuteen. Sovitettua mallia käytettiin korkeuskiintopisteiden GNSS-mittauksessa, jonka tuloksen perusteella arvioitiin paikallisen sovituksen tarkkuutta.

Työssä toteutettiin staattinen suhteellinen GNSS-mittaus, jonka laskennan tuloksena saatiin kolmelletoista muunnospisteelle tasosijainti sekä ellipsoidinen korkeus. Staattinen GNSS-mittaus tehtiin kokonaisuudessaan JHS184-ohjeiden mukaisesti. Muunnospisteinä käytettiin Helsingin kaupungin tarkkavaaittuja korkeuskiintopisteitä. Näiden pisteiden perusteella laskettiin polynomimuunnos, jonka avulla sovittiin paikallisesti FIN2023N00-malli pisteiden muodostamalle alueelle. Paikallisesta sovituksesta muodostettiin maastomittausohjelmaan yhteensopiva ruudukko, jota voitiin käyttää GNSS-mittausten korkeuden korjaamiseen työssä määritetyllä alueella. Sovituksen tarkkuutta arvioitiin GNSS-mittausten tulosten perusteella.

Sovitetun geoidimallista muodostettiin suorakulmion muotoinen alue. Testimittauksia analysoitaessa havaittiin, että mentäessä muunnospisteiden muodostaman alueen ulkopuolelle tarkkuus heikkeni selkeästi. Tarkkuuden arvioinnin perusteella paikallisella sovituksella voitiin kuitenkin parantaa GNSS-mittausten yhteensopivuutta korkeuden osalta Helsingin korkeuskiintopisteisiin muunnospisteiden rajaaman alueen sisäpuolella.

Avainsanat: geoidimalli, geoidi, GNSS, satelliittimittaus, tasoituslaskenta, pienimmän neliön summa, tarkkavaaitus

Tämän opinnäytetyön alkuperä on tarkastettu Turnitin Originality Check -ohjelmalla.

Abstract

Author: Olli Hänninen
Title: Local Transformation of FIN2023N00 Geoid Model in City of Helsinki
Number of Pages: 57 pages
Date: 24 April 2025

Degree: Master of Engineering
Degree Programme: Land Surveying
Supervisors: Simo Gröhn, M.Sc.
Matias Ingman, Principal Lecturer

The purpose of the project was to study how the local transformation of the national geoid model affects to the accuracy in GNSS measurements. The methods used in the project were Static relative GNSS measurement to define the coordinates and ellipsoidal heights to calculate the transformation parameters, and the least squares method, to calculate the polynomial transformation. The local transformed grid was used in the GNSS survey to assessment the accuracy of the local transformation compared to the benchmarks of the city of Helsinki.

The project established that the local transformation improves both the overall accuracy and compatibility of the heights of GNSS measurements and accuracy compared to the benchmarks of the city. Furthermore, the project established that the transformation works well inside the area defined by the transformation points but once outside, accuracy decreases rapidly.

The method could be utilized in various applications currently performed with traditional measurements such as levelling. This could save both time and costs. However, as several other error sources affect the accuracy of the GNSS measurements, traditional methods should be prioritized in cases where accuracy is paramount.

Keywords: geoid, geoid model, GNSS, least square method, leveling, static relative GNSS survey

Sisällys

Lyhenteet

1	Johdanto	1
2	Vertausjärjestelmät ja -kehykset	3
3	Korkeuteen liittyvät järjestelmät ja niiden realisaatiot	5
4	Geoidi ja sen mallintaminen	7
4.1	FIN2023N00-geoidimalli	8
4.2	Geoidimallin paikallinen sovitus	9
5	GNSS-mittaus	10
5.1	GNSS-satelliittien ratatiedot	13
5.2	Staattinen suhteellinen GNSS-mittaus	14
5.3	RTK-GNSS-mittaus	17
5.4	GNSS-mittauksen virhelähteitä	18
5.4.1	Avaruussää	19
5.4.2	Muita GNSS-mittauksen virhelähteitä	20
6	Tarkkavaaitus	20
7	Tasoiuslaskenta	22
8	Tutkimusaineistot ja -käytännöt	25
8.1	Aluerajauksen suunnittelu	25
8.2	Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen suunnittelu	27
8.3	Mittausten suunnitteluun liittyvä maastokäynti	29
8.4	Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen toteutus	30
8.5	Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen tasoiuslaskenta	31
8.5.1	Havaintojaksokohtainen laskenta	32
8.5.2	Koko mittausaineiston vapaan verkon tasoiuslaskenta	37
8.5.3	Lopullinen tasoiuslaskenta ja tulosten analyysi	37
8.6	Bilineaarinen interpolointi	39
8.7	Paikallisen geoidimallin sovituksen määrittäminen	40
8.8	Sovituksen laskeminen pisteille	45

9	Sovituksen testaus ja arviointi	47
10	Tulosten tarkastelu	50
11	Yhteenveto	53
	Lähteet	56

Lyhenteet ja käsitteet

EUREF-FIN:

ETRS89-järjestelmän kansallinen realisaatio Suomessa.

EVRS: *European Vertical Reference System*. Eurooppalainen korkeusvertausjärjestelmä, jonka realisaatio N2000 on Suomessa.

GNSS: *Global Navigation Satellite System*. Maailmanlaajuinen paikannussatelliittijärjestelmä.

IGS: *International GNSS service*. Kansainvälinen laskentakeskus laskee esimerkiksi GNSS-satelliittien tarkat ratatiedot.

ITRF, ETRF:

Vertauskehys, jonka avulla voidaan tehdä mittauksia.

NAVSTAR GPS:

NAVigation Satellite Time and Ranging Global Positioning System. Amerikkalaisen satelliittipaikannusjärjestelmän alkuperäinen nimi.

RTK: *Real Time Kinematic*. Reaaliaikainen kinemaattinen mittaus.

TBC: *Trimble Business Center*. Trimblen ohjelmisto erilaisten aineistojen laskentaan kuten verkkotasoitus.

VRS: *Virtual Reference Station*. Virtuaalinen tukiasemaverkko laskee korjausta RTK-mittauksille.

WGS84, ITRS, ETRS89:

Geodeettisia vertausjärjestelmiä. Maan mukana pyörivä kolmiulotteinen koordinaatisto.

1 Johdanto

Helsingin kaupungin maastomittaustiimeissä on käytännön työssä todettu, että korkeuden mittaamisen epäluotettavuus GNSS-mittauksissa vähentää menetelmän käyttömahdollisuuksia useissa sovelluksissa. Aiheeseen liittyviä kysymyksiä heräsi ensimmäisen kerran vuonna 2019, kun kaupunkimittauspalvelut suunnitteli korkeuskiintopisteiden tihentämistä Helsingin Kalasataman alueella.

Mittausten lähtöpisteiksi etsittiin kallioon perustettuja korkeuskiintopisteitä, joiden korkeusarvoa verrattiin VRS-RTK-GNSS-mittauksella saatuun korkeusarvoon. Käytännön kokemukset olivat osoittaneet, että käytettäessä valtakunnallista FIN2005N00-geoidimallia erot korkeuskiintopisteiden ja mitattujen arvojen välillä olivat olleet noin 25 millimetrin luokkaa. Kalasatamasta löytyi korkeuskiintopiste, jonka aiemmin kuvatulla menetelmällä todettu korkeusero oli lopulta noin 45 mm. Tämä aiheutti pohdintoja, miten kyseiseen korkeuskiintopisteeseen pitäisi suhtautua. Soveltuuko se tarkkavaaituksen lähtöpisteeksi vai saako pisteen uuden korkeusarvon tarkkavaaituksessa? Korkeuskiintopiste valittiin lopulta yhdeksi mittauksen kontrollipisteistä, ja se mitattiin tarkkavaaituksen yhteydessä uudelleen.

Kun tarkkavaaituksen tasoituksen tulokset saatiin analysoitua, todettiin, että tasoituksesta saatu uusi korkeusarvo poikkesi vain noin 3 mm korkeuskiintopisteen rekisteriin merkitystä arvosta. Suunnitteluvaiheessa todetut eroavaisuudet johtuivat mahdollisesti VRS-GNSS-mittaukseen liittyvistä epävarmuuksista. GNSS-mittausten tarkkuuteen vaikuttaa moni eri tekijä, ja asiaa pohdittaessa tuli esiin ensimmäisen kerran ajatus paikallisesta geoidimallista Helsingin alueelle.

Paikallisen sovelluksen avulla satelliittimittausten korkeusasema muunnetaan vertausellipsoidista kaupungin käytössä olevaan N2000-korkeusjärjestelmään mahdollisimman tarkasti. Maanmittauslaitos on julkaissut uuden FIN2023N00-geoidimallin vuonna 2023, ja työssä sovitetaan paikallisesti osa tätä

valtakunnallista geoidimallia Helsingin alueelle. Geoidimallin paikallista sovittusta vertaillaan valtakunnallisiin geoidimalleihin FIN2005N00 ja FIN2023N00. Paikallinen geoidimallin sovitus määritellään staattisen GNSS-mittausten ja olemassa olevan korkeuskiintopisteverkon avulla valtakunnallisten geoidimallien perustuessa gravimetriseen kvasigeoidimalliin FIN_EIGEN-6C4_GEO (Saari ym. 2023: 1). Sovelluksen testaaminen on oleellinen osa työtä, ja tavoiteltu lopputulos on paikallisen geoidimallin sovituksen määrittäminen Trimble Access -ohjelman kanssa yhteensopivaan muotoon. Tarkkuuden osalta tavoite on päästä alle 10 mm:n korkeustarkkuuteen VRS-GNSS-mittauksissa paikallisesti sovitettun geoidimallin alueella. Helsingin kaupunkimittausspalveluilla on mahdollisuus hyödyntää tämän työn tuloksia pohtiessaan VRS-GNSS-mittausten laajempaa käyttöönottoa erilaisissa mittaustöissä. Työkulkuja on mahdollista tehostaa esimerkiksi korvaamalla paljon työaika vaativia vaatusmittauksia GNSS-mittauksilla, mikäli saavutettava korkeustarkkuus tähän on riittävä. Mittaamalla korkeuskiintopisteitä nykyaikaisilla satelliittipaikannusmenetelmillä, ja analysoimalla tuloksia saadaan tietoa Helsingin kaupungin korkeuskiintopisteverkon laadun tasaisuudesta.

Tutkimuskysymyksiä lähdettiin miettimään käytännön ongelman perusteella, joka oli se, että GNSS-mittauksella saatu korkeusarvo sisältää virhettä. GNSS-mittauksessa on useampi tekijä, joka voi aiheuttaa epävarmuutta mittauksiin, kuten ilmakehä (ionosfääri ja troposfääri), satelliittikonstellaatio, näkyvyys tai vaalle, monitieheijastukset, mittaajan toiminta ja korkeuden korjaukseen käytetty malli. Vaikka tutkimuksen toteutustavasta ei suunnitteluvaiheessa vielä ollut tarkempaa tietoa, valittiin työn tavoitteeksi käytettävän geoidimallin tai oikeastaan korkeuden korjaamiseen käytettävän mallin tarkentaminen. Aiheen kirjallisuuden perehtymisen perusteella löytyi tietoa mahdollisuudesta parantaa geoidimallin tarkkuutta paikallisesti määrittämällä paikallinen muunnospinta (Poutanen 2016: 64). Näin ollen tutkimuksessa etsitään vastausta seuraaviin kahteen kysymykseen:

1. Onko geoidimallin paikallisen sovituksen avulla mahdollista parantaa paikallisiin GNSS-mittauksiin perustuvien aineistojen tarkkuutta korkeuden osalta?
2. Mitkä ovat paikallisesti sovitetun geoidimallin ja valtakunnallisen geoidimallin FIN2023N00 erot, kun tarkastellaan vertausellipsoidikorkeuksia ja eri malleilla korjattuja korkeuksia?

2 Vertausjärjestelmät ja -kehukset

Tässä luvussa tarkastellaan vertausjärjestelmää ja -kehystä geodesian terminologian näkökulmasta. Satelliitti- ja avaruusgeodeettiset mittausmenetelmät ovat olennainen osa maailmanlaajuisista geodeettista havaintojärjestelmää, ja niihin perustuvat mittaukset ja laskennat ovat komiulotteisia. Satelliittigeodesiassa käytetään geosentrisiä kolmiulotteisia vertausjärjestelmiä ja -kehysiksi. (Vermeer 2019: 259.)

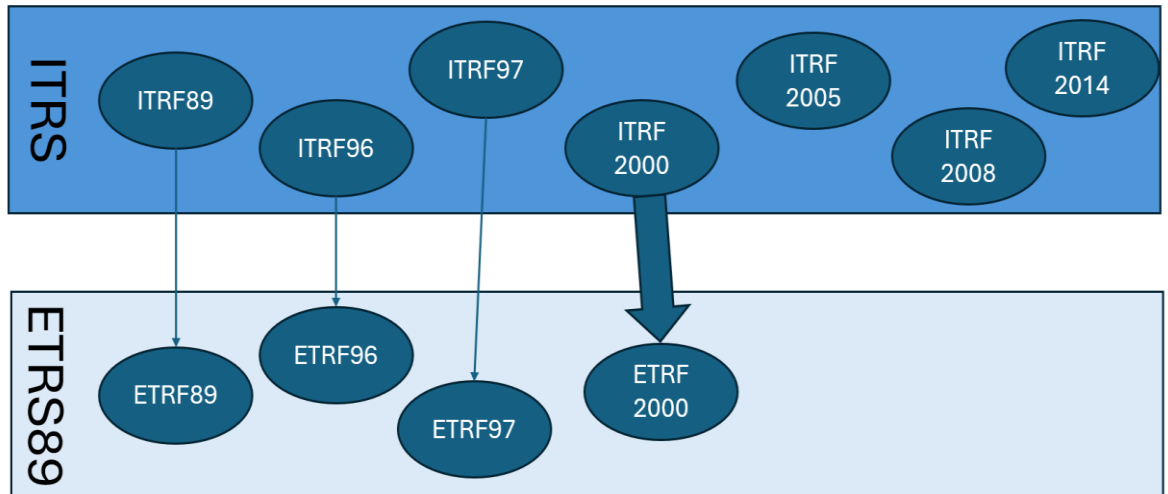
WGS84, ITRS ja ETRS89 ovat terrestrisiä eli maanpäällisiä vertausjärjestelmiä. Kahden jälkimmäisen nimessä olevat kirjaimet TRS tulevat englannin kielen sanoista Terrestrial Reference System. TRS on Maan mukana pyörivä kolmiulotteinen koordinaatisto, jonka origo on Maan (massa)keskipisteessä. Sen Z-akseli yhtyy Maan pyörimisakseliin. International Terrestrial System eli ITRS on tänä päivänä globaalisti tärkein vertausjärjestelmä. Vertausjärjestelmän avulla ei voida tehdä mittauksia vaan mittauksia varten tarvitaan vertauskehys, joka ITRS:n tapauksessa on nimeltään ITRF (International Terrestrial Reference Frame). ETRS89 taas on Euroopan alueelle viime vuosituhaten loppupuolella luotu yhtenäinen yleiseurooppalainen terrestrinen vertausjärjestelmä. ETRS89 yhtyy globaaliin ITRS-järjestelmään ajanhetkellä 1989.0. Tämän työn tuloksia käytettiin perustana kansallisille vertauskehyksille. (Poutanen 2016: 39–41; JHS196 EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa 2016: 5.)

Kun puhutaan konventionaalisesta terrestrisestä järjestelmästä, tarkoitetaan yleisesti TRS:n mukaista järjestelmää, jolle on liitetty tarvittavat parametrit ja

vakiot vertauskehyksen toteuttamista varten. Vertauskehyksen määritettäviin asioihin kuuluu myös vertausellipsoidi eli referenssipinta, joka kuvaa maan muotoa. Vertausellipsoidin avulla voidaan esittää maantieteelliset koordinaatit pisteille. Globaalin luonteensa vuoksi terrestrisissä vertausjärjestelmissä on huomioitava myös maapallon muuttuminen ajan saatossa. Näitä muutoksia voivat aiheuttaa maanjäristykset, mannerlaattojen liike ja maannousu. Muutosten takia tarkimmat vertausjärjestelmien realisaatiot ovat aikariippuvaisia, ja käytännön syistä ne sidotaan tiettyyn ajanhetkeen. (Poutanen 2016: 39–41; JHS196 EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa 2016: 5.)

JHS 196 EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit suomessa -suositus kuvaa yleiseurooppalaisen ETRS89-vertausjärjestelmän kansallista realisaatiota eli vertauskehystä EUREF-FIN. Suosituksen tavoitteena on tukea vertausjärjestelmän käyttöä Suomessa ja yhtenäistää käytäntöjä vertauskehukseen liittyen. (JHS 196 2016: 1.)

Suomessa käytettävä EUREF-FIN on vuosina 1996–1997 tehtyjen kiintopistemittojen perusteella tehdyn muunnoksen mukainen ETRS89-vertausjärjestelmän realisaatio, jonka mittojen keskiepookki on 1997.0. ETRS89-vertausjärjestelmän realisaation voidaan laskea ITRS-vertausjärjestelmän ITRF-vertauskehysesistä muunnoskaavojen ja parametrien avulla. Kuvassa 1 on esitetty eri realisaatioiden laskenta ITRF:stä ETRF:ään. (JHS 196 2016: 6.)



Kuva 1. ETRS89-järjestelmän realisoimiseen on käytetty ITRF-vertauskehyksiä (JHS196 2016: 7).

Muunnokset korjasivat EUREF-FIN pisteiden vaakakoordinaatit epookkiin 1989.0 Euraasian mannerliikkeiden osalta, mutta EUREF-komission suositusten mukaisesti ei korjattu maanoususta johtuvia muutoksia, joten sen osalta EUREF-FIN on epookissa 1997.0. (Poutanen 2016: 50–51.)

Käytännön töitä varten Suomessa on käytössä tasokoordinaattijärjestelmiä, jotka ovat muodostettu käyttäen UTM-karttaprojektiota tai Gauss-Krüger-projektiota. Suomen laajuinen koordinaattijärjestelmä on ETRS-TM35FIN, jonka keskimeridiaani on 27 astetta. Kaavoituksessa ja rakentamisessa käytetään Gauss-Krüger-projektiota, joka nimetään ETRS-GKn, jossa n tarkoittaa keskimeridiaanin astelukua. Helsingin kaupunki käyttää ETRS-GK25-projektiota. (Poutanen 2016: 52.)

3 Korkeuteen liittyvät järjestelmät ja niiden realisaatiot

Korkeusjärjestelmä määrittää korkeuden vertauspinnan, joka realisoidaan korkeuskiintopisteiden avulla. Suomen valtakunnallinen korkeusjärjestelmä on N2000. Geodesian näkökulmasta N2000-korkeusjärjestelmä on korkeusvertauskehys, joka on European Vertical Reference System eli EVRS-

korkeusvertausjärjestelmän realisaatio Suomessa. (JHS 163 Suomen korkeusjärjestelmä N2000 2019: 8.)

EVRS perustuu Maan painovoimakentän potentiaalin eli geopotentialin määrittämiseen, ja niiden avulla se voidaan realisoida. Normaalikorkeudet saadaan konvertoimalla geopotentialiluvut normaalipainovoimakentän ja geodeettisen leveysasteen (ETRS89) avulla. Geopotentialiluvulla tarkoitetaan havaintopisteen ja geoidin potentiaalierotuksen vastalukua. Eli γ_0 laskemiseen tarvitaan vertausellipsoidi, esimerkiksi GRS80, jonka leveydellä ϕ (ETRS89) saadaan γ_0 kaavalla 1:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_0 = & 9,7803267715 \cdot (1 + 0,0052790414\sin^2\varphi + \\ & 0,0000232718\sin^4\varphi + 0,0000001262\sin^6 + \\ & 0,0000000007\sin^8\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

Keskimääräinen normaalipainovoima voidaan laskea N2000 yhteydessä kaavan 2 avulla

$$\bar{\gamma} \approx \gamma_0 - \frac{1}{2}kH_m \quad (2)$$

k on $0,3086 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$

H_m on normaalikorkeuden H^N likiarvo.

Normaalikorkeus H^N voidaan laskea iteratiivisesti jakamalla geopotentialiluku seuraavasti kaavalla 3

$$H^N = \frac{c}{\bar{\gamma}} \quad (3)$$

N2000-korkeusvertauskehys perustuu Suomen kolmanteen tarkkavaaitukseen. Mitatut korkeuserot sidottiin epookkiin 2000.0 ja redukointiin käytettiin pohjoismaista maannousumallia NKG2005LU. Samalla epookki 2000.0 on geodeettisen komission antama suositus yhteisestä nollahetkestä pohjoismaisille korkeusjärjestelmille. N2000 perustuu NAP:n (Normaal Amsterdams Peil) määrittämään perustasoon toisin kuin edeltäjänsä, jotka perustuivat Helsingin

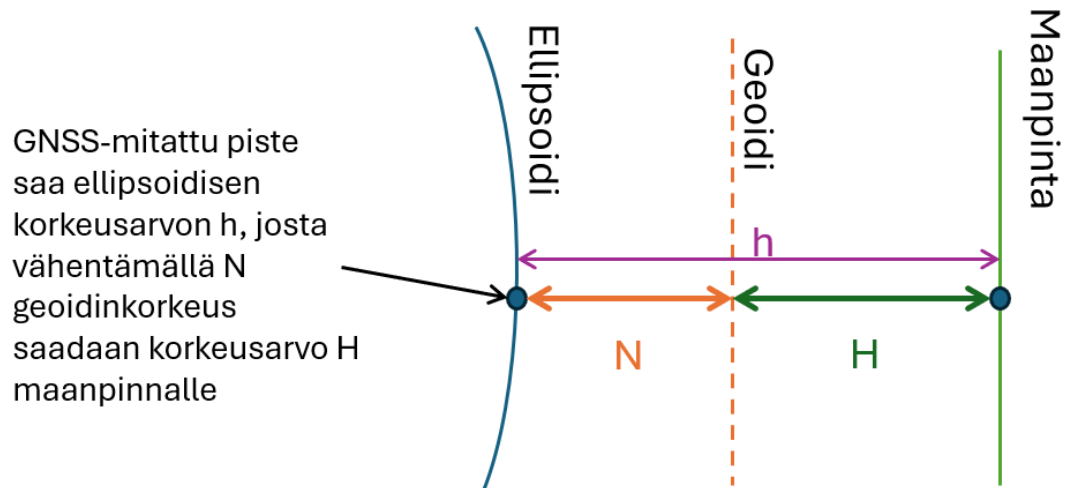
keskimääräiseen merenpintaan. N2000 aineiston käsittelyssä huomioitiin myös muunnokset vuoksijärjestelmien välillä. N2000-tasoituksen tuloksena saatiin geopotentialiluvut c , jotka muunnettiin normaalikorkeuksiksi kaavan 3 mukaisesti. (JHS 163 Suomen korkeusjärjestelmä N2000. 2019: 10–12, 14.)

4 Geoidi ja sen mallintaminen

Työssä käsitellään GNSS-järjestelmiä, joihin perustuvien satelliittimittausten korkeudenmäärittämiseen liittyy olennaisesti geoidimalli. Sen avulla ellipsoidinen korkeus muunnetaan paikalliseen metriseen korkeusjärjestelmään. Geoidimallin avulla voidaan siis interpoloida mitatun pisteen geoidinkorkeus N . Geoidi on esitys siitä tasosta, joka parhaiten kuvaa valtameren keskiveden pintaa, ja se muodostuu Maan painovoiman tasa-arvopinnasta. (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 5.)

Geoidinkorkeus saadaan geoidimallista, joka kuvaa geoidin ja vertausellipsoidin välistä eroa. Satelliittimittauksissa lasketaan maantieteelliset koordinaatit φ , λ sekä ellipsoidikorkeus h , joka on mittauspisteen etäisyys vertausellipsoidin pinnasta. Kuvassa 2 havainnollistetaan tilannetta, jossa mittapisteelle halutaan laskea ortometrinen tai normaalikorkeus geoidimallista saadun geoidinkorkeuden avulla kaavalla 4. (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 2.)

$$h = H + N \tag{4}$$



Kuva 2. GNSS-mittauspisteeseen liittyvä korkeuden korjauksen laskenta (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 2).

Geoidin määrittäminen perustuu painovoiman potentiaalimittauksiin. Nykypäivänä menetelmät perustuvat Maata kiertävien satelliittien avulla tehtäviin havaintoihin. Satelliittidataa tarkennetaan Maan pinnalla tehtävillä painovoimamittauksilla. Satelliittien painovoimahavaintojen perustuen voidaan laskea Maan potentiaalimalli, jota voidaan käyttää lähtötietona globaalin geoidimallin määrittämisessä. Yhdistämällä globaaliin malliin paikalliset Maan pinnalla tehdyt havainnot voidaan määrittää alueellisia geoidimalleja. (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 5.)

4.1 FIN2023N00-geoidimalli

FIN2023N00 on Suomen uusi geoidimalli, joka on todelliselta luonteeltaan enemmänkin korkeuden muunnospinta. Maanmittauslaitoksen paikkatietokeskuksen, Pohjoismaisen geodeettisen komission sekä Venäjän painovoima-aineistoista, Pohjoismaisen geodeettisen komission korkeusmallista ja painovoimatasatelliiteista saadun datan perusteella muodostetun EIGEN-6C4 aineistojen pohjalta on laskettu tarkka gravimetrinen kvasigeoidimalli FIN_EIGEN-6C4_GEO, johon FIN2023N00 perustuu. FIN_EIGEN-6C4_GEO-mallia

vertailtiin Suomen GPS-vaaitus-aineistoihin, ja todettiin, että kvasigeoidin tarkkuus on 1,78 cm. Verratessa kvasigeoidimallia N2000-korkeusjärjestelmään poikkeamaa oli noin 30 cm. Tästä syntyi tarve gravimetriseen kvasigeoidiin perustuvalla sovitetulle muunnospinnalle. Muunnospinta toteutettiin käyttämällä laskennoissa 74 GPS-vaaitus-pistettä, joiden avulla kvasigeoidimalli saatiin sidottua kansalliseen vertauskehukseen ja sen epookkiin. Sovitettu muunnospinta sai nimen FIN2023N00. (Saari ym. 2023: 1–2.)

4.2 Geoidimallin paikallinen sovitus

Kun alueella on olemassa tai alueelle mitataan staattisella suhteellisella GNSS-mittauksella mitattuja pisteitä, joille on vaaittu korkeus, voidaan valtakunnallista geoidimallia tarkentaa paikallisella sovituksella. Paikallisessa sovituksessa määritetään muunnospinta, josta voidaan interpoloida geoidinkorkeudet tai se voidaan ladata maastotietokoneeseen, ja määrittää projektissa käytettäväksi geoidimalliksi. (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 20.)

Näiden pisteiden avulla voidaan laskea polynomimuunnos tai käyttää muunnokseen pienimmän neliösumman kollokaatiota, jossa geoidimallin arvot estimoidaan kovarianssifunktion avulla tunnetuista piste-arvoista. Jälkimmäinen on tilastollinen estimointitekniikka, jota voidaan käyttää esimerkiksi keskivirheiden laskemiseen (Vermeer 2020: 261). Kovarianssifunktio kuvaa geoidikorkeuksien välistä yhteyttä, ja on riippuvainen pisteiden välisestä etäisyydestä. Laskentaa varten selvitetään GPS-vaaitusdatasta lasketut geoidierojen sekä laskettavan sovitetun geoidimallin pisteiden geoidierojen eli korjauspinnan kovarianssit. Kollokaatiomenetelmää käytettäessä pisteen vaikutus sovitukseen pienenee, kun etäisyys kasvaa, ja riittävän kaukana vaikutus on nolla. Gravsoft-geoidilaskentaohjelma käyttää pienimmän neliösumman kollokaatiomenetelmää. (Bilker-Koivula & Ollikainen 2009: 14–15.)

Polynomimuunnoksessa lasketaan havaintojen erotukset, kaksiulotteisessa tapauksessa x - ja y -koordinaattien Δx ja Δy yhteisillä pisteillä. Näihin voidaan

sovittaa matala-asteinen polynomipinta, ja uudet koordinaatit ratkaistaan koordinaattierojen avulla kaavalla 5

$$x_2 = x_1 + \Delta x \quad (5)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$\Delta x \text{ on } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} \Delta x^i \Delta y^j$$

$$\Delta y \text{ on } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} \Delta x^i \Delta y^j.$$

Muunnospinta voidaan laskea sovittamalla polynomipinta geoidikorkeuden eroihin. Optimaalista sovitusta voi hakea kasvattamalla polynomin astelukua. Tässä on otettava huomioon tuntemattomien ja havaintojen lukumäärät, koska polynomisovituksen parametrit ratkaistaan pienimmän neliösumman menetelmällä, jonka toteutumiseen tarvitaan ylimääritystä. Bilker-Koivula ja Ollikainen ovat työssään tutkineet eri polynomiasteen vaikutusta sovituksen tarkkuuteen, ja toteavat, että kolmannen asteen polynomi osoittautui parhaaksi FIN2005N00-geoidimallin sovitusta laskettaessa. (Poutanen 2016: 85; Bilker-Koivula & Ollikainen 2009.)

5 GNSS-mittaus

GPS liitetään yleisesti satelliittipaikannukseen, ja sitä käytetään usein arkikielessä, kun tarkoitetaan eri laitteiden paikannusominaisuuksia. GPS eli alkupe- räiseltä nimeltään NAVSTAR GPS on maailman laajuinen satelliitteihin perustuva paikannusjärjestelmä, joka on ollut käytössä jo useamman vuosikymmenen. Sittemmin on tullut myös muita satelliittipaikannusjärjestelmiä, kuten eurooppalainen paikannusjärjestelmä Galileo ja Venäjän vastaava GLONASS. Kiinan BeiDou-järjestelmä on otettu laajemmin käyttöön viime vuosien aikana. Lisäksi Japanilla ja Intialla on omat satelliittipaikannusohjelmansa käynnissä. Nämä perustuvat geostationaarisiiin ja geosynkronisiin satelliitteihin, ja ne eivät ole globaaleja järjestelmiä. Yhteinen nimitys kaikille näille paikannusjärjestelmille on GNSS, Global Navigation Satellite System. (Poutanen 2016: 11.)

Eurooppalainen Galileo on ollut toiminnassa vuodesta 2016. Se koostuu tänä päivänä 30 satelliitista keskikorkeilla kiertoradoilla (Medium Earth Orbit, MEO). Satelliitit ovat ympyrän muotoisilla radoilla 23 222 km korkeudessa, inkliinaation ollessa 56° päiväntasaajan nähden. Kiertoratoja on kolme, ja ne sijaitsevat toisiinsa nähden tasavälein maapallon ympärillä. Jokaisella kiertoradalla on 9 toiminnassa olevaa satelliittia ja yksi varasatelliitti. (Galileo.)

Glonass-järjestelmän konstellaatiossa on kaikkiaan 26 satelliittia, joista toiminnassa on 24 kappaletta. Glonass-satelliitit ovat Galileon tapaan kolmella kiertoradalla. Inkliinaation ollessa 64.8° , satelliittien korkeus Maan pinnasta on 19 100 km. (About Glonass.)

Amerikkalaisen GPS-järjestelmän avaruussegmentin konstellaatioon kuuluu vähintään 24 satelliittia. Satelliitit ovat kuudella eri kiertoradalla, ja konstellaatio poikkeaa eurooppalaisten ja venäläisten järjestelmistä. Kiertoratojen inkliinaatio on 55° päiväntasaajaan nähden, ja satelliitit ovat 20 200 km:n korkeudessa. Satelliittien kiertoaika on 12 tuntia. (Manning 2023.)

Kiinalaisessa BeiDou 3 -järjestelmässä on hieman erilainen konstellaatio verrattuna edellä kuvattuihin järjestelmiin. Järjestelmä koostuu kolmesta geostationaarisesta satelliitista ja kolmesta IGSO-satelliitista (Inclined GeoSynchronous Orbit), joiden lisäksi on 24 satelliittia MEO-kiertoradalla 21 528 kilometrin korkeudella. MEO-satelliittien kolmen kiertoradan inkliinaatio on 55° päiväntasaajan nähden. (BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document 2019: 1.)

Tänä päivänä yksi yleisimmistä käyttösovelluksista paikantamisessa on puhelien navigointisovellukset. Puhelimet pystyvät käyttämään puhelinverkon tukiasemia sekä tietyissä määrin Wi-Fi-verkon pisteitä paikantamiseen. Tolvanen on tutkinut älykkäitä liikennejärjestelmiä, jotka hyödyntävät puhelinpaikannusta, ja hän toteaa opinnäytetyössään, että eri GNSS-satelliittien hyödyntäminen on kuitenkin yleisesti käytössä, ja sillä päästään tarkkoihin tuloksiin puhelimen paikannuksessa (Tolvanen 2018: 6–7). Puhelin käyttää sijainnin selvittämiseen

koodipaikannusta, kuten useat muutkin edullisemmat paikannuslaitteet. Koodipaikannuksessa vastaanottimen ja satelliittien välinen etäisyys mitataan signaalin kulkuajan avulla. Paikan ratkaisemiseen tarvitaan vähintään neljä satelliittia. Näin saavutetaan metriluokan paikannustarkkuus. (Poutanen 2016: 13.)

Kantoaaltoon perustuva paikannus tarjoaa tarkemman mahdollisuuden paikantamiselle. Maanmittausalan ja geodesian sovellukset vaativat usein senttimetrituokan tarkkuutta, jota ei voida saavuttaa koodipaikannuksella, niinpä näillä aloilla mittaukset ovat suhteellisia, eli paikka mitataan tunnetun pisteen suhteen. Tähän tarvitaan vähintään kaksi vastaanotinta sekä GNSS-signaalin kantoaaltoa. Esimerkkinä GPS-satelliitit lähettävät kahden taajuuden kantoaaltoja. (Poutanen 2016: 14.)

Kantoaaltoihin on sisällytetty (moduloitu) kaksi pseudosatunnaiskoodia, jotka ovat C/A-koodi ja P-koodi, joiden lisäksi on Broadcast-efemeridi- ja almanakkatietoja sisältäviä navigointiviestejä. Almanakkatiedot sisältävät likimääräisemmät ratatiedot, jotka auttavat satelliittipaikanninta löytämään satelliitit nopeammin. Broadcast-efemeriditiedot sisältävät tarkkoja ratatietoja satelliittikohtaisesti. Niitä käytetään tarkemmissa sovelluksissa paikantamiseen ja jälkilaskentaan (CDDIS 2024). C/A-koodin modulaatiotila vaihtuu yhden mikrosekunnin välein, jonka aikana signaali kulkee 293 metriä. Tarkkuus tällä menetelmällä, jos vastaanotin on kykenevä mittaamaan modulaation vaihetta 1 % tarkkuudella kokonaisesta syklistä, on tällöin ± 3 metriä. (Vermeer 2019: 285–290.)

P-koodin taajuus on kymmenkertainen verrattuna C/A-koodiin. Signaalin kulku matka on 29 m frekvenssin ollessa $10,23 \text{ Mb/s}$. Kun oletetaan modulaation vaihemittauksen tarkkuudeksi 1 %, on pseudoetäisyshavainnon vastaava tarkkuus ± 30 cm. Siirrytään käyttämään modulaation sijaan kantoaaltoa, joiden aallonpituudet ovat L_1 19 cm ja L_2 24,4 cm. Vastaanottimen, jonka vaihemittaustarkkuus on 1 %, päästään ± 2 mm mittaustarkkuuteen. Käytetty modulaatiotyyppi on vaihemodulaatio, jossa kantoaallon vaihe kääntyy π :n verran, kun koodin tila vaihtuu 0 ja 1 välillä. Kaikki satelliitit käyttävät samoja kantoaallon taajuuksia L_1 ja L_2 . (Vermeer 2019: 290–291.)

Pseudosatunnaiskoodien avulla vastaanotin osaa erottaa eri satelliittien signaalit. Vastanotin suorittaa kaksi tehtävää, kun se saa signaaleja kaikista havaintohetkellä näkyvistä satelliiteista. Se osaa erottaa eri satelliittien signaalit toisistaan pseudosatunnaiskoodin perusteella, jonka jälkeen määritetään jokaisen satelliitin signaalin kulku-aika satelliitista vastaanottimelle. Molemmissa tehtävissä etsitään aikasiirtymää Δt , joka tekisi vastaanottimen generoiman repliikkasekvenssin ja vastaanotetun signaalin sekvenssistä identtiset. Replikaa siirretään ajassa vastaanotetun suhteen, kunnes vahva korrelaatio syntyy. Saatu Δt eli aikaero on GPS:n havaintosuure. (Vermeer 2019: 287–290.)

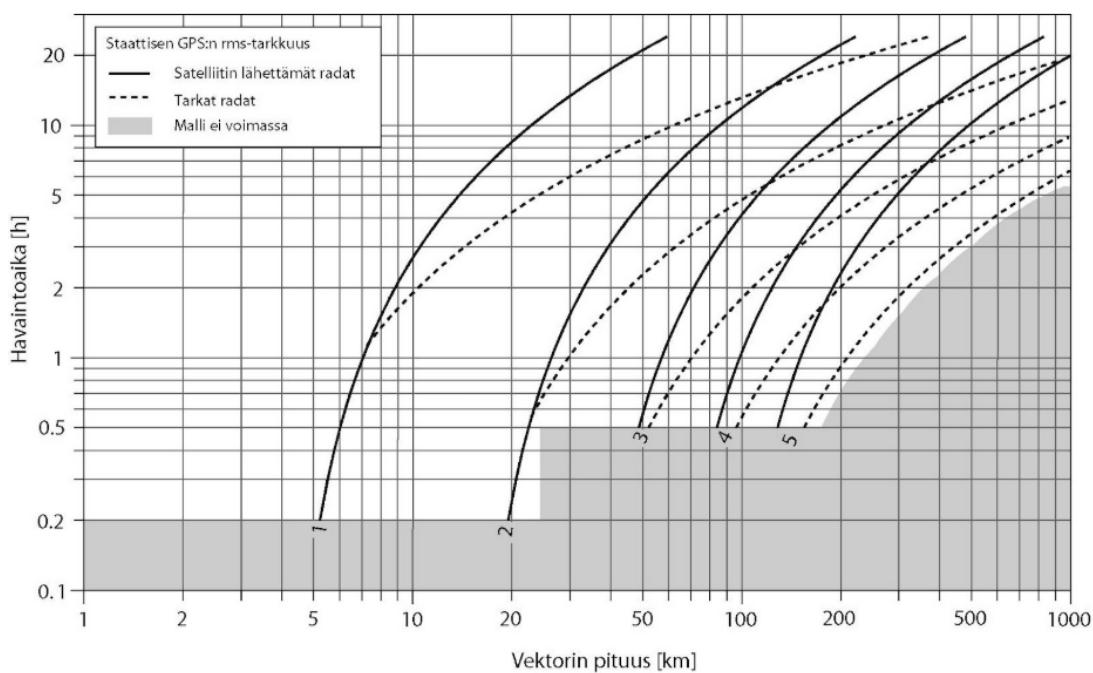
5.1 GNSS-satelliittien ratatiedot

Tärkeä osa satelliittipaikannusta on, että satelliittien sijainti on tiedossa. Jokainen satelliitti (paitsi GLONASS) lähettää aktiivisesti kahdenlaista ratatietoa. Broadcast-efemeridit pitävät sisällä satelliitin reaaliajassa lähettämän ratatiedon. Almanakka-ratatietoa voidaan hyödyntää satelliitin näkyvyystietojen laskennassa, mutta ei ole sijainniltaan yhtä tarkka kuin broadcast-efemeridit. GLONASS-satelliittien ratatiedot annetaan paikka- ja nopeusvektoreiden avulla Maahan kiinnitetystä vertausjärjestelmästä. Tarkimmissa mittauksissa käytetään kuitenkin tarkkoja ratatietoja. (Poutanen 2016: 157–162.)

International GNSS Service eli IGS laskee satelliittien toteutuneet tarkat ratatiedot, jotka Crustal Dynamics Data Information System eli CDDIS julkaisee sivuillaan. Sivuilta tieto voidaan ladata myös suoraan laskentaohjelmaan. CDDIS on maailmanlaajuisesti käytössä oleva datakeskus, ja se on ollut IGS:n käytössä jo 1990-luvun alkupuolelta. GNSS-satelliiteista saatuun tietoon perustuen luodaan erilaisia tuotteita, kuten GNSS satelliittien ratatiedot, Maan pyörimiseen liittyvät parametrit, maailman laajuisten seuranta-asemien koordinaatit ja kellotietoja, troposfääriarvioita ja maailman laajuinen ionosfäärikartta. Tarkat ratatiedot eli tarkat efemeridit ovat ladattavissa noin 13 päivän kuluttua mittausajakohdan GPS-viikon päättymisestä ASCII-tiedostona sp3c-formaatissa. Sp3c-formaatti sisältää tarkat ratatiedot sekä kellovirhetietoja. IGS:n julkaisemien tarkkojen ratatietojen tarkkuus on 2–5 cm. (CDDIS.)

Maailmanlaajuisesti eri puolilla sijaitsevat tutkimusasemat mittaavat satelliittien paikkoja Satellite Laser Ranging (SLR) -laseretäisyysmittareilla parhaimmillaan 5 millimetrin tarkkuudella. IGS:n laskentakeskukset laskevat näiden mittausten perusteella tarkat ratatiedot (Final Orbits). (Radoslaw ym. 2023: 1.)

Kuvassa 3 on esitetty staattisen GNSS-tarkkuuden, vektorin pituuden ja havaintoajan riippuvuutta. Kuvasta voidaan todeta, että havainto aika kasvaa, kun vektorin pituus kasvaa. Käyttämällä tarkkoja ratatietoja, myös kuvassa esitetty RMS (1–5 cm) pienenee. Käytännössä JHS184 suosittelee tarkkoja ratatietoja käytettäväksi yli 10 kilometrin pituisilla vektoreilla ja yli tunnin kestävien havaintojaksojen vektorilaskennassa. (JHS184. 2012: 10–11.)



Kuva 3. Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen tarkkuuden riippuvuuksia (JHS184).

5.2 Staattinen suhteellinen GNSS-mittaus

Peruskiintopisteluokkien mittaamiseen käytetään nykypäivänä menetelmänä staattista suhteellista GNSS-mittausta. Siinä mitataan samanaikaisesti

vähintään kahdella vastaanottimella pidempi ajanjakso, joka voi vaihdella puolesta tunnista jopa 48 tuntiin. Toinen vastaanotin on koordinaateiltaan tunnetulla pisteellä (lähtöpiste). Yleensä mittauksessa käytetään useampaa kuin kahta vastaanotinta, ja ne pysyvät paikoillaan eli staattisina mittauksen ajan. Menetelmällä voidaan määrittää uusille pisteille koordinaatit tunnettujen pisteiden suhteen. (JHS184 Kiintopistemittaus EUREF-FIN-koordinaattijärjestelmässä 2012: 9.)

Staattinen suhteellinen mittaus suunnitellaan ennen mittausta. Mitattavista pisteistä muodostetaan verkkomainen kokonaisuus. Suomessa JHS184 antaa suositukset ja ohjeet mittauksen suunnitteluun. Mitattavien pisteiden ja vastaanottimien lukumäärän perusteella lasketaan tarvittavien havaintojaksojen lukumäärä seuraavasti kaavalla 6:

$$Havaintojaksojen\ lkm = \frac{1.15 \cdot (3 \cdot (n-1) - r)}{N-1} \quad (6)$$

N on vastaanottimien lukumäärä

n on pisteiden lukumäärä

r on niiden pisteiden lukumäärä, jotka muodostavat verkon ulkoreunan.

Havaintojaksolla mitattavat pisteet suunnitellaan niin, että havaintojaksossa ei muodostu sulkeutuvia silmukoita. Silmukan sulkevia vektoreita kutsutaan triviaalivektoreiksi. Mitattavien vektoreiden pituudet määrittävät havaintojakson pituudet taulukon 1 mukaisesti. (JHS184 1012: 17.)

Taulukko 1. Havaintojakson aika riippuu vektorin pituudesta.

Vektorin pituus (km)	E3	E4
10	1 h	1 h
30	2,5 h	1,5 h
50	4,5 h	2,5 h
100	8 h	5 h

Peruskiintopiste perustetaan mahdollisuuksien mukaan kallioon. Mittauksessa vastaanotin pystytetään kolmijalalla ja pakkokeskisellä suoraan pisteen päälle. Vastaanottimen korkeus mitataan mahdollisimman tarkasti, ja kirjataan ylös. Kuvassa 4 on Trimble R12i -GNSS-laite, johon on integroitu antenni ja vastaanotin. Vastaanottimen ja pakkokeskisen välissä on lisäosa, jossa on korkeuden mittaamiseen tarkoitettu vipu. (JHS184 2012.)



Kuva 4. Trimble R12i -vastaanotin (Kuvat: Olli Hänninen).

5.3 RTK-GNSS-mittaus

RTK eli Real Time Kinematic -mittaus mahdollistaa GNSS-paikannuksen reaaliajassa. Se on suhteellinen mittaustapa samaan tapaan kuin staattinen suhteellinen GNSS-mittaus. Mitattaessa yhdellä vastaanottimella, mittaus on aloitettava koordinaateiltaan tunnetulta pisteeltä, ja myös lopetettava tunnetulle pisteelle. (Vermeer 2019: 339.)

Mittauksen aikana mitatuille pisteille voidaan laskea koordinaatit suhteessa aloituksen ja lopetuksen tunnettuihin pisteisiin. Menetelmä käyttää reaaliaikaisesti kanta-aallon vaihemittausta, ja sillä saavutetaan lyhyellä matkalla erinomainen tarkkuus. Kaksoiserotuksia käytettäessä RTK-mittauksessa on käytössä kaksi vastaanotinta, joista toinen toimii mittauksessa tukiasemana ja on mittauksen ajan paikallaan koordinaateiltaan tunnetulla kiintopisteellä. Toinen vastaanotin on liikkuva (Rover). Tässä asetelmassa ainoat tuntemattomat ovat liikkuvan vastaanottimen xyz-koordinaatit. (Vermeer 2019: 339.)

Kaksoiserotus voidaan laskea, kun myös nämä liikkuvan vastaanottimen koordinaatit ovat tunnetut eli Rover viedään kiintopisteelle. Kaksoiserotuksen ratkettua, voidaan ratkaista myös kokonaislukutuntemattomat, jonka jälkeen saadaan fix-alustus. Tämä tarkoittaa käytännössä, että kiinnitetään kokonaislukutuntemattomat, jotka ovat käytössä koko mittauksen ajan. Kiintopisteen sijaan, voidaan vaihtoehtoisesti liikkuvaa vastaanotinta pitää paikoillaan niin kauan, että fix-alustus saavutetaan. (Vermeer 2019: 339–341.)

Tätä menetelmää kutsutaan ”on the fly” -alustukseksi. Kun kokonaislukutuntemattomat ovat tiedossa, ja ne pysyvät samana koko mittauksen ajan, voidaan mitatuille pisteille laskea geometrinen kaksoiserotus. Oikea paikka saadaan tukiaseman suhteen parhaimmillaan millimetrien tarkkuudella. RTK toimii parhaiten lyhyillä matkoilla, joka voi vaihdella sadoista metreistä käytännössä noin kymmeneen kilometriin. Reaaliaikaisuus vaatii tiedonsiirtoa varten yhteyden tukiasemalta Roveriin. (Vermeer 2019: 341–342.)

Verkko-RTK-paikannus kuten VRS-RTK-GNSS-mittaus perustuu siihen, että käyttäjän liikkuva vastaanotin lähettää sijaintinsa palvelun tarjoajalle, jonka perusteella korjaukset lasketaan tähän sijaintiin. Toisin sanoen yhden tukiaseman sijaan käyttäjän liikkuvaan vastaanottimeen lähetetään sen paikkaan luotuja virtuaalihavaintoja, jotka pohjautuvat tukiasemaverkon havaintojen perusteella laskettuun virhemallinnukseen. Satelliittimittausten korjauspalvelua välittäviä tukiasemaverkkoja Suomessa ovat muun muassa Finpos, Trimnet ja Smartnet. (FINPOS-paikannuspalvelu.)

5.4 GNSS-mittauksen virhelähteitä

GNSS-mittauksiin liittyy erityyppisiä virhelähteitä. Osa virheistä voidaan eliminoida mallintamalla ilmiötä. Osa virheistä on vaikeampi poistaa, ja niiden vaikutukset on pyrittävä minimoimaan huolellisella suunnittelulla ja toiminnalla.

5.4.1 Avaruussää

Aktiivinen ionosfääri on merkittävä virheen aiheuttaja GNSS-mittauksissa ja tarkassa paikannuksessa. Aquiar ym. ovat tutkineet avaruussään aiheuttamaa skintillaatiota (häilyntää), minkä mukaan häilynnän vaikutukset GNSS-satelliittien näkyvyyteen ja tarkkaan paikannukseen voivat olla merkittäviä, sijainnissa useita kymmeniä metrejä (Aquiar ym 2024: 13.)

Paikannussatelliittien radiosignaalit joutuvat kulkemaan 20 000 kilometrin matkan vastaanottimeen. Väliin mahtuu mm. atmosfäärin kerrokset, joista ionosfääri ja troposfääri ovat merkityksellisiä satelliittipaikannuksesta puhuttaessa. Avaruusmyrskyt voivat heikentää satelliittipaikannuksen tarkkuutta, koska signaalin kulkuun vaikuttavat ionosfäärirefraktion ja troposfäärirefraktion vaikutukset voimistuvat sen seurauksena. GNSS-mittauksissa käytettävällä kaksitaajuusvastaanottimella ionosfäärin vaikutus pystytään käytännössä eliminoimaan kokonaan. Yksitaajuusvastaanottimilla, joita usein käytetään isomman suuruusluokan paikannusepä-tarkkuuden sallivissa sovelluksissa, häiriöt vaikuttavat tarkkuuteen, ja virhettä voidaan eliminoida jonkin verran ionosfäärimalleilla. (Avaruus ja magneettikenttä; Poutanen 2016: 182.)

Maan ionikehän ja lähiavaruuden säällä on siis merkitystä myös GNSS-mittaus-ten kannalta. Puhutaan avaruussäästä, joka muotoutuu Aurinkotuulesta ja Auringon toiminnasta johtuvista muutoksista olosuhteissa. Käytännössä ilmiöt ovat sähkö- ja magneettikenttien muutoksia ja vaihteluita hiukkasten määrissä ja niiden energiatasoissa. Auringon toimintaan vaikuttaa pilkkujakso, joka on 11-vuotinen, ja sen aikana Auringonpilkkumäärä vaihtelee. Auringonpilkkuminimin aikana Aurinko on rauhallinen, ja pilkkumaksimin aikaan runsaat Auringon purkaukset tekevät avaruussäästä myrskyisän. Roihupurkaukset ja Koronan massapurkaukset ovat erityyppisiä Auringon purkauksia. Roihupurkaukset lähettävät avaruuteen ryöpyn suuren energian omaavia hiukkasia ja sähkömagneettista säteilyä. Koronan massapurkauksissa Auringosta purkautuu avaruuteen jättimäisiä kaasupilviä. Massapurkaukset liittyvät mahdollisesti roihuihin, mutta

niiden esiintyvyydessä oleva satunnainen vaihtelun takia ilmiöiden välinen suhde on vielä epäselvä. (Avaruus ja magneettikenttä.)

5.4.2 Muita GNSS-mittauksen virhelähteitä

Satelliittien lähettämien radiosignaalien heijastuminen GNSS-vastaanottimelle on monimutkaisempi epävarmuuden lähde, ja vaikuttaa varsinkin tarkimmissa mittauksissa. Puhutaan monitieheijastuksista, jotka voivat johtua siitä, että radiosignaali heijastuu rakennuksen tai vedenpinnasta vastaanottimelle. Tällöin vastaanotin saa sekä suoran signaalin satelliitilta, että heijastuneena saman signaalin, joka aiheuttaa ristiriitaa laskennassa. (Poutanen 2016: 182.)

Kellovirheelle on kaksi virhelähdettä. Δt on vastaanottimen aikaero, ja ΔT on satelliitin aikaero. Aikaerolla eli kellovirheellä tarkoitetaan satelliitin tai vastaanottimen kellon ja GPS-ajan välistä eroa. Kun työssä käsitellyt virhelähteet otetaan huomioon, ja pyritään ratkaisemaan etäisyys havaintosuureena, puhutaan pseudoetäisyydestä. Tämä tarkoittaa käytännössä, että etäisyyteen vaikuttavat geometrisen etäisyyden lisäksi satelliitin ja vastaanottimen aikaerot Δt ja ΔT sekä ionosfääri ja troposfääri. (Vermeer 2019: 296–297.)

6 Tarkkavaaitus

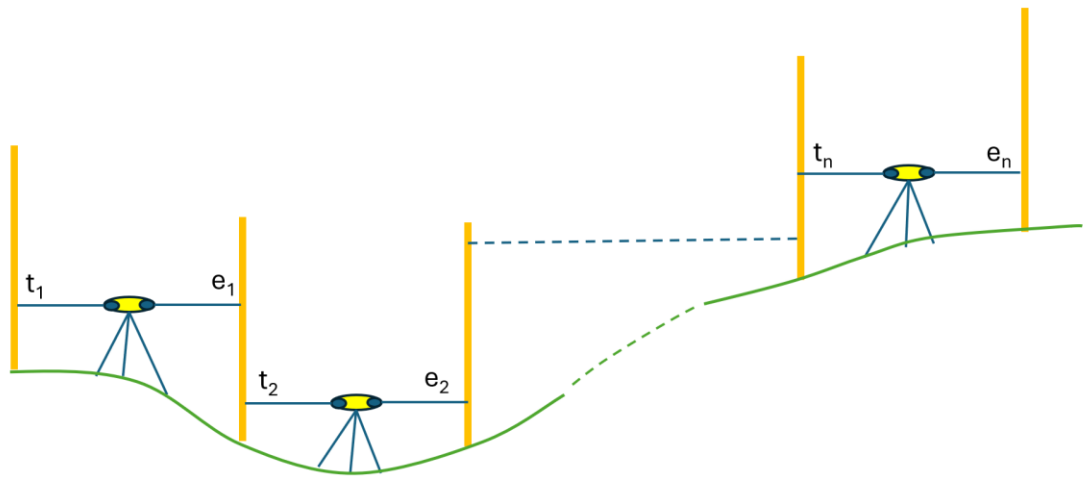
Vaaitus on vuosisatoja käytetty perinteinen korkeudenmittausmenetelmä. Tarkimmat korkeudenmittaukset tehdään edelleen vaaitsemalla. Tarkkavaaituksella tarkoitetaan vaaitusmittausta, jossa saavutetaan alle 0,5 mm:n keskihajonta kilometrin mittaisella matkalla, kun matka kuljetaan edestakaisin, ja suljetaan lähtöpisteeseen. Tarkkavaaituksella mitataan myös kuntien ja kaupunkien ylläpitämät korkeuskiintopisteverkot. (Laurila 2012: 203, 215.)

Valtakunnallinen korkeusrunko on tarkkavaaitusverkko, jossa toteutus on hierarkkinen tihennysmittauksineen. Laskennassa käytetään valtakunnallista korkeusjärjestelmää, esimerkiksi N2000-järjestelmää. Suomen laajuinen viimeinen valtakunnallinen tarkkavaaitus (Suomen 3. tarkkavaaitus) laskettiin vielä N60-

järjestelmässä. Siinä vaaitusverkon laskennat suoritetaan geopotentialilukuina, joista lasketaan nykyisen korkeusjärjestelmän mukaiset normaalikorkeudet (N2000). Vaaituksessa mitataan pisteiden välisiä korkeuseroja. Käytännössä vaaituskojeella havaitaan kuvan 5 mukaisesti taakselukemia ja eteenlukemia, joiden erotuksia summaamalla saadaan ratkaistua kahden pisteen korkeusero kaavalla 7:

$$\begin{aligned}\Delta H &= (t_1 - e_1) + (t_2 - e_2) + \dots + (t_n - e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - e_i).\end{aligned}\tag{7}$$

t on taaksepäin havainto
e on eteenpäin havainto.



Kuva 5. Jonovaaitus. Vaaituskojeella havaitaan taakse- ja eteenlukemia (Vermeer 2019: 109).

Vaaitus lähtee aina tunnetulta kiintopisteeltä, ja päättyy tunnetulle kiintopisteelle. Hyvä suunnitelmallinen vaaitusverkko koostuu sulkeutuvista silmukoista, joihin kaikki mitatut uudet pisteet kuuluvat osana. Oleellista on asettaa tähtäysvälit taaksepäin ja eteenpäin mahdollisimman samanmittaisiksi. Tähtäysvälien tasaisuuden lisäksi on syytä kiinnittää huomiota tähtäysvälin pituuteen, joka ei saisi esimerkiksi tarkkavaaituksessa ylittää viittäkymmentä metriä. (Vermeer 2019: 109.)

7 Tasoituslaskenta

Geodeettisten mittaustulosten jälkilaskentaa tehdään tasoituslaskennalla, ja siinä käytetään pienimmän neliösumman menetelmää. Menetelmään liittyy myös se, että mittauksissa pyritään tekemään aina ylimääräisiä havaintoja. Ylimääräisistä havainnoista syntyvä ylimääritys eli redundanssi mahdollistaa mittauksen virheiden arvioinnin. Pienimmän neliösumman menetelmää käytetään ylimääräisten mittausten aiheuttaman ristiriidan ratkaisemiseen. (Laurila 2012: 51.)

Tasoitusprosessiin kuuluu aina kaksi tilastotieteessä käytettyä mallia, joista toinen on funktionaalinen malli. Se on luonteeltaan enemmän geometriaa. Funktionaalisen mallin avulla voidaan selvittää havaintojen ja tuntemattomien parametrien yhteys. Stokastisessa mallissa otetaan huomioon ilmiön satunnaisuus ja epävarmuus. Havaintojen tarkkuus ilmaistaan havaintojen kovarianssimatriisilla. Se on keskeinen työkalu stokastisessa mallinnuksessa, koska se kuvaa vaihtelun suuruutta sekä eri muuttujien vaihtelua yhdessä. (Kallio 1999: 6.)

Pienimmän neliösumman menetelmä on tilastomatemattinen estimointitekniikka, jossa ratkaistaan varsinaisten tuntemattomien lisäksi jäännösvirheet. Jäännösvirhe eli residuaali lasketaan kaavalla 8:

$$v_i = l_i - \hat{x} \quad (8)$$

v_i on jäännösvirhe

l_i on havainto

\hat{x} on suureen laskettu arvo

Tasointimenetelmän parametrinen muoto perustuu havaintoyhtälöiden muodostamiseen kaavan 9 mukaisesti:

$$\begin{aligned} \underline{l}_1 + \underline{v}_1 &= a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + \dots + a_{1m}\hat{x}_m, \\ \underline{l}_2 + \underline{v}_2 &= a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + \dots + a_{2m}\hat{x}_m \\ &\vdots \\ \underline{l}_n + \underline{v}_n &= a_{n1}\hat{x}_1 + a_{n2}\hat{x}_2 + \dots + a_{nm}\hat{x}_m \end{aligned} \quad (9)$$

Yhtälöryhmä kirjoitetaan kaavan 10 matriisimuotoon:

$$\underline{l} + \underline{v} = A\hat{x} \quad (10)$$

Josta voidaan kirjoittaa edelleen kaava 11:

$$\begin{aligned} \underline{l} &= \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \\ \underline{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \\ \hat{x} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Pienimmän neliösumman ratkaisu lasketaan kaavalla 12

$$A^T A \hat{x} = A^T \underline{l} + A^T \underline{v} \quad (12)$$

Kun asetetaan “virheet” nolaksi $A^T \underline{v} = 0$, pienimmän neliösumman ratkaisu \hat{x} on kaavan 13 muotoa:

$$(A^T A)\hat{x} = A^T l \quad (13)$$

Tämä muoto tunnetaan normaaliyhtälönä, ja sen ratkaisu on kaavassa 14:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (14)$$

Jäännösvirheet $v = A\hat{x} - l$ ovat oleellisia geodeettisten laskentojen laadunvalvonnassa. Jäännösvirheiden suuruus tuo esiin verkon ristiriitoja ja karkeita virheitä. Verkon luotettavuuden kannalta ylimääritys on oleellista, koska sulkuvirheet mahdollistavat erilaiset tarkastukset. Karkeita virheitä on mahdollista paikantaa tilastollisen testauksen avulla. Löytyneet karkeat virheet voidaan poistaa havaintoaineistoista, ja korvata uusilla vastaavilla havainnoilla tai vaihtoehtoisesti jättää ne pois, jos ylimääräiset havainnot mahdollistavat tämän. Tilastollista testausta varten on oltava ainakin kaksi hypoteesia. Toinen on aina nollahypoteesi, joka olettaa, että havainnoissa ei ole karkeita virheitä. Vaihtoehtoinen hypoteesi on, että havainnoissa esiintyy vähintään yksi tai useampi karkea virhe. Jälkimmäinen hypoteesi voidaan testata χ^2 -testin eli Khiin neliötestin avulla. Testissä vertaillaan havaintojen arvoja odotettuihin arvoihin. Staattisen GNSS-verkon tasoituksen tapauksessa on mahdollista testata, sopiiko havaintojen residuaalien jakauma teoreettiseen normaalijakaumaan. Verkon luotettavuus tulee esiin karkeita virheitä paikannettaessa. Mikäli karkea virhe pääsee vaikuttamaan paljon yksittäiseen vektoriin, voidaan verkkoa pitää luotettavana. (Vermeer 2019: 389–396.)

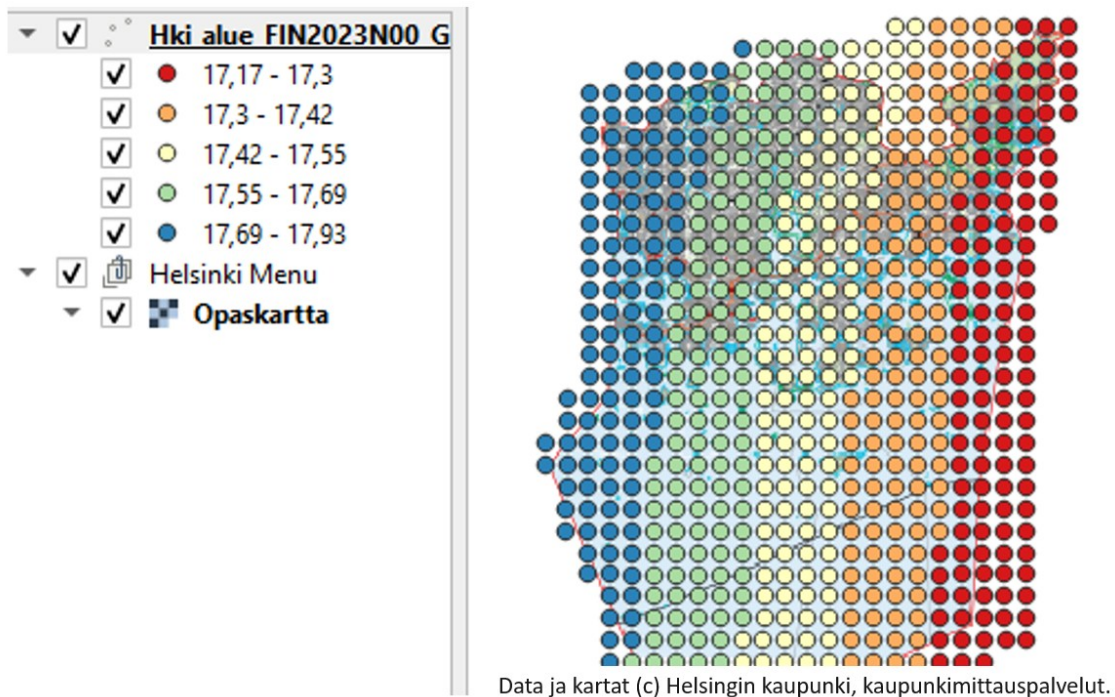
8 Tutkimusaineistot ja -käytännöt

Tässä luvussa selostetaan tutkimuksen toteutusta, kuten aluerajauksen muodostamista, työssä käytettyjä aineistoja ja niihin liittyvät mittaukset. Aineiston perusteella tehtiin paikallisen sovituksen laskennat. Laskentojen jälkeen suoritettiin mittauksia tarkkuuden ja luotettavuuden arviointia varten.

8.1 Aluerajauksen suunnittelu

Alkuperäinen ajatus oli kokeilla muunnospintaa melko pienellä rajatulla alueella. Ajatus yhdeksästä mitattavasta määrittämyspisteestä oli vahva aihe-ehdotuksesta, ja aiheen hahmottelusta lähtien. Alustava suunnitelma ilman mitään lähtöainestoa oli tehdä työ Laajasalon alueelle. Alue noudattelisi tällöin nelikulmion muotoa, ja se muodostuisi yhdeksästä pisteestä mahdollisimman tasaisin välimatkoin 3 x 3 pisteen ruudukon.

FIN2023N00-mallin geoidinkorkeudet tarjosivat hyvää tietoa siitä, miten geoidipinta käyttäytyy Helsingin alueella. Kaupungin alueelle osuvat pisteet luokiteltiin geoidinkorkeuksien perusteella. Värjäämällä nämä luokat, saatiin muodostettua geoidinkorkeuksien muutoksia havainnollistava kuva 6. Kuvaa tarkasteltaessa pieni nelikulmion muotoinen alue hylättiin suunnittelun lähtökohtana. Jos aluerajaus on liian pieni, muodostuu geoidinkorkeus alueella vakioksi, ja varsinaisen muunnospinnan merkitys jää tällöin olemattomaksi. Tarkastelussa todettiin myös, että merkittävimmät muutokset geoidinkorkeuksissa tapahtuvat itä-länsisuunnassa. Pohjois-eteläsuunnassa muutokset ovat vähäisempiä. Aluerajaus tulisi olemaan muodoltaan suorakulmiota noudatteleva monikulmio.



Kuva 6. Geoidinkorkeudet luokiteltiin, ja värjättiin luokkien mukaisesti. Tuloksesta käy ilmi, miten muutokset geoidinkorkeuksissa käyttäytyy Helsingin alueella. (Kuva: Olli Hänninen.)

Valittavan alueen sisään tulisi jäädä riittävä määrä kallioon perustettuja Helsingin kaupungin korkeuskiintopisteitä. Mittauksiin perustuen Kaupunkimittauspalveluissa on todettu, että näiden korkeuskiintopisteiden korkeustiedot ovat luotettavia, ja kallioperusta on minimoinut muutokset pisteissä (jos ei huomioida globaaleja muutoksia).

Kartta-aineistojen analyysien pohjalta aluerajaus sijoitettiin Herttoniemi-Vartiokylä-Mellunkylä-Vuosaari-akselille. Alue oli tässä vaiheessa leveydeltään hieman alle kuusi kilometriä, ja sen korkeus on vajaa neljä kilometriä. Oletuksena oli, että valitun aluerajauksen sisällä geoidinkorkeuksien vaihtelu leveyssuunnassa on yli 10 cm, ja korkeussuunnassa se on vähäisempää.

Työn suunnitteluun liittyneen maastokäynnin jälkeen tultiin siihen tulokseen, että aluetta on laajennettava edelleen. Alueeseen lisättiin Kalasatama ja osa

kantakaupunkia, niin että lounainen nurkka oli Olympiastadionin vieressä. Näin saatiin tutkittavan alueen sisään riittävästi kallioon perustettuja korkeuskiintopisteitä testimittauksia varten. Lisäksi Kalastamassa sijaitseva korkeuskiintopiste, jossa oli aiemmin todettu eroja GNSS-mittausten korkeudessa, sisältyi laajennuksen jälkeen tutkimusalueeseen.

8.2 Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen suunnittelu

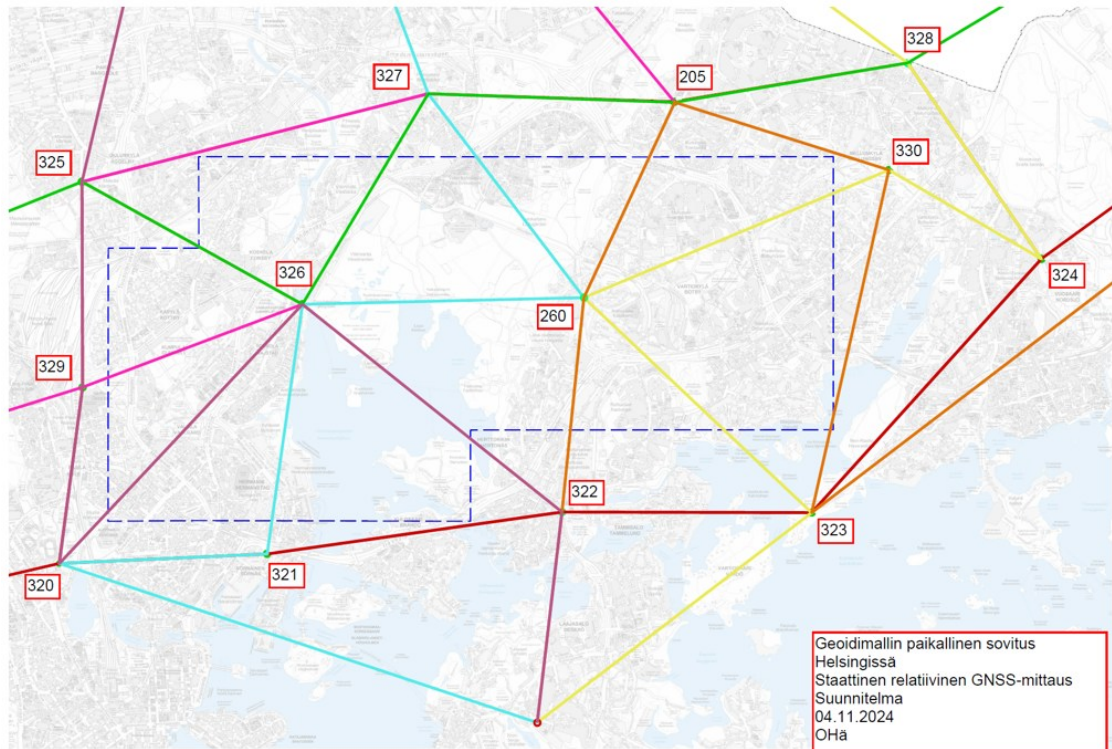
Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen suunnittelu toteutettiin JHS184 ohjeiden mukaisesti. Aluerajaus oli tarkentunut aikaisemmista arvioista, ja mitattavien pisteiden määrä suunnittelun alussa oli 13 kappaletta. Kiintopisterekisteriä, kantakarttaa ja ortoilmakuvia hyödyntämällä etsittiin mahdollisia korkeuskiintopisteitä, jotka valittaisiin mukaan mittaukseen.

Mittaukseen varattiin 5 kappaletta GNSS-vastaanottimia, joiden lisäksi jokaisessa havaintojaksossa käytettiin kahta Trimnet-palvelun aktiivista tukiasemaa (lähtöpisteet), jolloin kokonaismäärä GNSS-vastaanottimille oli 7 kappaletta havaintojaksolla ($N=7$). Pisimmät vektorit mittauksessa olivat 35 kilometrin luokkaa, jolloin E4-peruskiintopisteitä mitattaessa havaintojakson pituudeksi määritettiin 2 tuntia. Mitattavia vektoreita suunniteltavassa verkossa oli vähintään 46, jolloin minimi havaintojaksomäärä oli 6. Sopivia kontrollipisteitä mittausalueella oli kaksi, ja ne valittiin mukaan mittaussuunnitelmaan. Kuvassa 7 on esitetty suunnitelman pohjaksi laskettuja lukuja.

Geoidimallin paikallinen sovitus Helsingissä	
Staattinen relatiivinen GNSS-mittaus	
Havaintojakson pituus	2 tuntia
Vastaanotinten määrä	7
Sivuja	40
Mitattavia vektoreita	46
Havaintojaksoja	6
Kontrollipisteet	5 Alueella on 2, jotka valittiin

Kuva 7. Mittaussuunnitelman vaatimuksia (Kuva: Olli Hänninen).

Verkon havaintojakson suunnittelu toteutettiin Microstation-ohjelmassa, jossa vektorit voitiin suunnitella havaintojaksoittain omalle tasolle. Suunnittelussa noudatettiin JHS184 annettuja ohjeita. Lopuksi varmistettiin vielä, että kaikki JHS184:n mukaiset vaatimukset mittaukselle täyttyvät. Kuvassa 8 on suunniteltu verkko, jonka mittauskelpoisuus varmistettiin seuraavaksi vuorossa olevan työvaiheen maastokäynnin yhteydessä.



Data ja kartat (c) Helsingin kaupunki, kaupunkimittauspalvelut.

Kuva 8. Staattisen suhteellisen GNSS-verkon mittaussuunnitelma. Eri havaintojaksojen vektorit on esitetty havaintojaksokohtaisella värillä. (Kuva: Olli Hänninen.)

Kun havaintojaksojen ja mitattavien vektoreiden suunnitelma oli valmis, tehtiin vielä erillinen suunnitelma maastoryhmille koko mittausprojektin toteuttamisesta. Suunnitelmassa osoitettiin jokaiselle mittausryhmälle oma piste kullekin havaintojaksolle. Hyvin laadittu suunnitelma selkeyttää työn johtamista, ja kokenut projektiryhmä pystyy toteuttamaan mittauksen varsin itsenäisesti, kun mittaussuunnitelmaan on tutustuttu mittausprojektin aloituskokouksessa.

8.3 Mittausten suunnitteluun liittyvä maastokäynti

Alustavan mittaussuunnitelman pohjalta valittujen korkeuskiintopisteiden soveltuvuus GNSS-mittauksiin varmistettiin maastokäynnillä. Korkeuskiintopisteen tulisi sijaita kalliolla niin, että sen päälle voidaan turvallisesti ja tukevasti pystyttää GNSS-vastaanotin kolmijalkaa hyödyntäen. Näkyvyys taivaalle varmistettiin

visuaalisesti valitun korkeuskiintopisteen päältä, ja lisäksi samasta kohdasta laadittiin peitepiirros kompassin ja bussolin avulla. Peitepiirrosta hyödynnettiin mittaussuunnitelman viimeistelyssä, jolloin varmistettiin satelliittien näkyvyys mittaussjaksolle valittuna ajankohtana. Korkeuskiintopisteisiin, jotka täyttivät edellä mainitut vaatimukset, tehtiin keskistysmerkki halkaisijaltaan 3 mm poralla.

Maastokäynnillä todettiin, että osaa alustavaan mittaussuunnitelmaan valituista korkeuskiintopisteistä ei voida valita mukaan lopulliseen mittaukseen. Hylkäyksen syynä oli korkeuskiintopisteen peitteisyys tai pisteen sijainti. Rakennukset, puut tai pensaat voivat muodostaa esteitä, kun tarkastellaan näkyvyyttä tai vaalle. Korkeuskiintopisteet voivat myös sijaita mittaussjalustan pystyttämisen kannalta vaikeissa paikoissa. Esimerkkinä kallioleikkaukseen tai ihan sen reunan läheisyyteen rakennetut pisteet. Näissä tapauksissa mittaussjalustaa ei ole mahdollista asettaa suoraan pisteen päälle, kallioleikkaus muodostaa näköesteen taivaalle tai työturvallisuusriskit lisääntyvät, mikäli työskennellään aivan korkean kallioleikkauksen reunan läheisyydessä.

8.4 Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen toteutus

Mittausten valmistelut aloitettiin päivää ennen suunniteltua mittaussajankohtaa. Valmisteluvaiheeseen kuului, että mittaajat tarkastivat oman mittausskalustonsa. Tarkastuksessa kolmijalat kiristetään niin, että niissä ei ole väljyyttä. Pakkokeskisistä tarkastettiin putkitasaimet sekä optinen luoti, ja säädettiin tarvittaessa samassa yhteydessä. Mittaajat kävivät maastossa etsimässä, ja varmistamassa RTK-GNSS-kaluston avulla, että juuri oikeat suunnitelman mukaiset mitattavat pisteet löytyvät maastosta. Käytännössä nämä valmistelut vievät työaikaa, mutta kokemus on osoittanut, että toimittaessa näin, säästyään monelta epäselvyydeltä mittausten toteutus- ja jälkilaskentavaiheessa. Mittaukset ajoitettiin välille 6.1. - 11.1.2024. Havaintojaksoja toteutettiin kaksi päivässä, paitsi perjantaina viikkotyöjärjestyksen takia mitattiin vain aamupäivän havaintojakso. Vastaanottimina mittauksessa käytettiin Trimble R10-, R10-2- tai R12i-mallimerkinältä olevia laitteita. Kuvassa 9 on listattuna mittauksessa mukana olleet

vastaanottimet. Mittauspäivän päätteeksi ladattiin Trimnet-palvelusta tarvittavat havainnot E2-kiintopisteiden osalta.

Liitoshavainnot					
Tiedostonimi	Ant. korkeus	Ant. menetelmä	Ant. valmistaja	Ant. tyyppi	
03063200.T04	1,1910	R10-jatkon vipu	Trimble	R10-2 Internal	
15023200.T04	1,4810	R12i-jatkon vipu	Trimble	R12i Internal	
02363200.T04	1,2570	R10-jatkon vipu	Trimble	R10 Internal	
86953201.T04	1,3050	R10-jatkon vipu	Trimble	R10 Internal	
10063200.T04	1,3090	R12i-jatkon vipu	Trimble	R12i Internal	
Hki1320G.t02	0,0000	Antennin jalusta alaosa	Trimble	Zephyr 3 Geodetic w/TZGD	
Kir1320G.t02	0,0000	Antennin jalusta alaosa	Trimble	Zephyr 3 Geodetic w/TZGD	
Porw320G.t02	0,0000	Antennin jalusta alaosa	Trimble	Zephyr Geodetic 2 RoHS w/	
Vant320G.t02	0,0000	Antennin jalusta alaosa	Trimble	Zephyr Geodetic 2	

Kuva 9. Staattisessa suhteellisessa mittauksessa käytetyt GNSS vastaanottimet. Antennin korkeus ja siihen liittyvä mittausmenetelmä voidaan tarkastaa tässä listauksessa. (Kuva: Olli Hänninen.)

Jokaisen havaintojakson aineisto laskettiin erikseen viimeistään seuraavana päivänä. Tässä vaiheessa ratkaistiin satelliittien lähettämällä ratatiedoilla vektorit sekä vapaanverkon tasoitus minimi kiinnityksillä. Tämän perusteella voitiin todeta mittausten onnistuminen. Menetelmällä ilmeni, että havaintojaksossa 7 on jotain virhettä, jota ei pystytty lopulta paikantamaan. Arvioitiin, että auringon aktiivisuuden takia myös ionosfääri on ollut aktiivinen havaintojakson aikana, ja aiheuttanut häiriötä mittauksen aikana. Havaintojakso 7 uusittiin 15.11.2024. Uusintamittaus onnistui, ja staattisen suhteellisen mittauksen toteutus saatiin valmiiksi.

8.5 Staattisen suhteellisen GNSS-mittauksen tasoituslaskenta

Staattisesta suhteellisesta mittauksesta saadut havainnot vietiin jälkilaskentaan, jossa tavoitteena oli saada määritettyä koordinaatit sekä ellipsoidipinnan korkeusarvot mitatuille pisteille. Jälkilaskentaa varten luotiin uusi projekti Trimble Business Center-ohjelmistoon. Projektitiedoston asetukset määritettiin vastamaan JHS184 mukaisia vaatimuksia esimerkiksi koordinaattijärjestelmän, vektorilaskennan ja tasoituslaskennan osalta.

8.5.1 Havaintojaksokohtainen laskenta

Kaikki havainnot ladattiin projektiin yksi havaintojakso kerrallaan. Maastossa tehtyjen havaintojen lataamisen yhteydessä varmistettiin antennikorkeuden mitauskohdan ja kirjatun korkeuden oikeellisuus maastossa muistiinpanojen avulla. Mittauksessa osa vektoreiden pituuksista oli >10 km, joten laskennassa käytettiin tarkkoja ratatietoja. Tarkat ratatiedot (IGS final orbits) ladattiin TBC:n internet-lataus-toiminnon kautta NASAn palvelimelta (cddis.nasa.gov). Näiden valmisteluiden jälkeen siirryttiin vektoreiden laskentavaiheeseen. Vektorien laskennan parametreinä käytettiin TBC:n oletuksia. Korkeusmaski laskennassa oli 20 astetta, ja laskennassa käsiteltiin kaikki taajuudet. Poutasen mukaan lyhyillä vektoreilla saavutettaisiin paras tulos yhdellä taajuudella, kun taas pitkillä vektoreilla se saavutettaisiin L3-vaiheella. (Poutanen 2016: 292.)

Vektorilaskennan tuloksia tarkasteltiin seuraavassa vaiheessa. Heti vektorilaskennan jälkeen avautuu ikkuna, josta voi todeta, että kaikki laskennassa olleet vektorit ovat ratkaistu onnistuneesti. jokaisen vektorin kohdalta voidaan tarkastella vektoreiden laskennan raporttia, josta ilmenee mm. vektorin keskivirheet ja A posteriori kovarianssimatriisi (kuva10).

Keskivirheet

Vektorin virheet:					
$\sigma \Delta$ Itäkoordinaatti	0,0015 m	s NS ed. atsimuutti	0°00'00,1"	$\sigma \Delta X$	0,0049 m
$\sigma \Delta$ Pohjoiskoordinaatti	0,0023 m	σ Etäis. ellipsoidilla	0,0019 m	$\sigma \Delta Y$	0,0023 m
$\sigma \Delta$ Korkeus(ortom)	0,0099 m	$\sigma \Delta$ Korkeus(ellips)	0,0099 m	$\sigma \Delta Z$	0,0087 m

A posteriori -kovarianssimatriisi (Metri²)

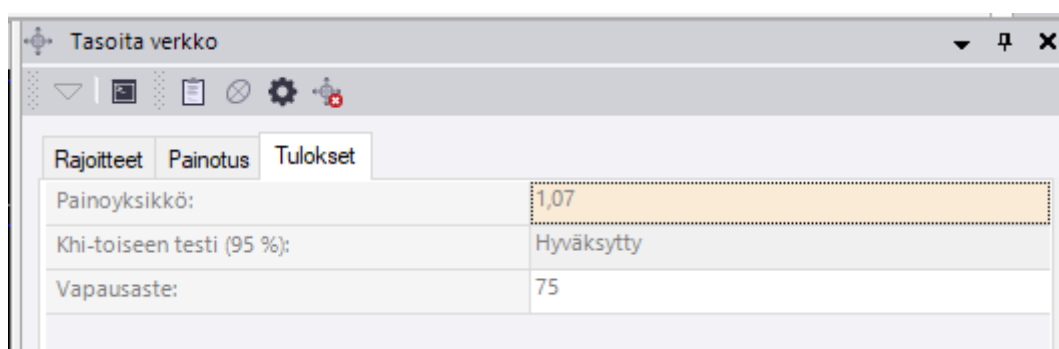
	X	Y	Z
X	0,0000243139		
Y	0,0000084201	0,0000053031	
Z	0,0000372756	0,0000130267	0,0000751224

Kuva 10. vektorilaskennan raportista selviää vektorin keskivirheet sekä A posteriori kovarianssimatriisi (Kuva: Olli Hänninen).

Mitattujen pisteiden muodostamien silmukoiden sulkuvirhelaskennassa pistesulkuvirhe saa olla JHS 184:n mukaisesti 75 mm luokassa E4. Silmukka voi

muodostua enintään kuudesta pisteestä. Laskennassa ei löytynyt yhtään tämän raja-arvon ylittävää silmukkaa, joten siltä osin katsottiin havaintojen olevan kunnossa.

Laskennassa toteutettiin havaintojaksokohtainen vapaan verkon tasoitus. Vapaan verkon tasoituksessa kiinnitetään minimimäärä lähtöpisteitä eli käytännössä yksi lähtöpiste, jonka jälkeen lasketaan tasoitus. Ohjelma tekee Khiin neliötestin, ja raportoi sen perusteella painoyksikön (keskivirheen), jonka pitäisi olla lähellä arvoa yksi (Kuva 11).



Rajotteet	Painotus	Tulokset
Painoyksikkö:		1,07
Khi-toiseen testi (95 %):		Hyväksytty
Vapausaste:		75

Kuva 11. Khiin neliötesti voi kertoa virheellisistä tai epätarkoista havainnoista. Kuvassa verkkotasoituksen tuloksena Khiin neliötestin tulos, painoyksikön keskivirhe sekä tasoituksen vapausaste. (Kuva: Olli Hänninen.)

Jos tämä arvo poikkeaa reilusti ykkösestä tai Khiin neliötesti epäonnistuu, on syytä tarkastella havaintoaineistoa. Vapaan verkon tasoituksen raportista tarkasteltiin tässä vaiheessa A priori ja A posteriori -varianssien välisiä eroavaisuuksia sekä redundanssilukua. A posteriori -varianssi on sama kuin Khiin neliötestin painoyksikkö. Jotta tämä testi saataisiin hyväksytysti laskettua, perehdyttiin seuraavaksi jäännösvirheiden tarkasteluun.

Standardisoitu jäännösvirhe saattaa paljastaa virheellisiä havaintoja. JHS184:n oletus on, että virheet ovat normaalisti jakautuneita. Kaavan 14 mukaisesti standardisoitu jäännösvirhe v_{std} on havainnon residuaali jaettuna residuaalin keskivirheellä (JHS 184 Kiintopistemittaus EUREF-FIN-koordinaattijärjestelmässä 2012):

$$v_{std} = \frac{v}{\sigma_v} \quad (14)$$

v_{std} on standardisoitu jäännösvirhe

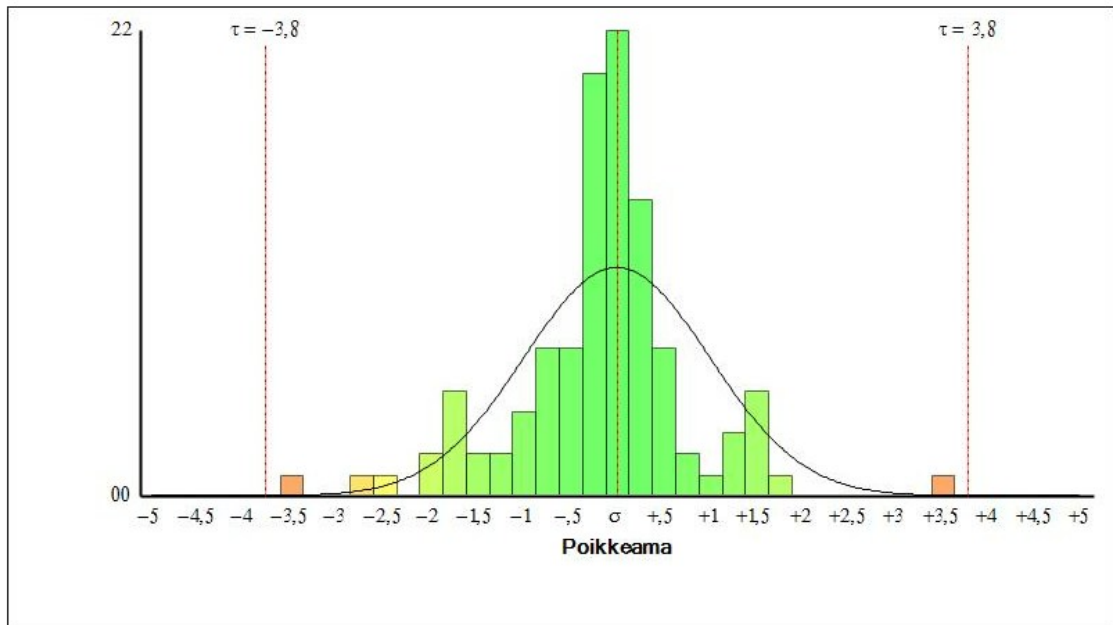
v on havainnon residuaali

σ_v on residuaalin keskivirhe.

JHS184:n mukaisesti tarkastellaan jäännösvirheiden itseisarvoja. Jos se on suurempi kuin 2,8 havaintoa voidaan pitää poikkeavana. TBC testaa kuitenkin Tau-testillä standardisoidun jäännösvirheen, jolloin itseisarvojen vertailuarvona käytetään Tau-arvoa. Tau-testi arvioi havainnon jäännösvirheen ja odotetun jäännösvirheen suhteen. Ohjelma laskee Tau-arvon havaintojen, vapausasteen ja annetun luottamusvälin (95%) perusteella, ja käyttää arvoa sellaisten poikkeavien havaintojen etsimiseen, jotka erottuvat jakaumasta. Toisin sanoen, jos Tau-arvo ylittää ennalta määritetyn kynnysarvon havainto merkitään mahdollisesti poikkeavaksi havainnoksi. (Manual Trimble Business Center v5.40 – Processing and Adjusting GNSS Survey Control Networks 2021: 70.)

Standardoitujen jäännösvirheiden histogrammi

Kriittinen tau-arvo: 3,8
 Havainnot, jotka eivät läpäise tau-testiä: 0



Kuva 12. TBC:n tasoitusraportista löytyvä standardisoitujen jäännösvirheiden histogrammi auttaa löytämään virheellisiä tai epätarkkoja havaintoja. Terävämpi ja korkeampi käyrä kuvaa pienempää hajontaa. (Kuva: Olli Hänninen.)

Trimble Business Centerin verkkotasoitusraportissa standardisoitujen jäännösvirheiden histogrammissa on esitetty Tau-viivat kuvan 12 mukaisesti. Tau-viivojen ulkopuolella olevat arvot TBC liputtaa ja värjää punaiseksi verkkotasoitusraportissa. Näiden vektoreiden muodostumista ja tietoja voitiin tarkastella syvällisemmin pisteiden johtoraportista. Raportista ilmenee pisteelle saadut koordinaatit sekä käytetyt vektorit sekä yksittäisen käytetyn vektorin eromitat muodostettuihin koordinaatteihin (Kuva 13.). Tässä vaiheessa liputetut vektorit todettiin epäkelvillisiksi ja poistettiin käytöstä.

Pistepoikkeamat

Pisteelle saadut koordinaatit: [320](#)

Itäkoordinaatti		Pohjoiskoordinaatti		Korkeus	Korkeus(ellips)		
[] m		[] m		19,699 m	37,339 m		
Tiedot	Käytetty lask.	Status	ΔItä (Metri)	ΔPohjoinen (Metri)	Etäisyys (vaakas.) (Metri)	ΔKorkeus (Metri)	ΔKorkeus(ellips) (Metri)
Tasoitettu (globaali)	NEeh	Sallittu	0,000 m	0,000 m	0,000 m	0,000 m	0,000 m
Kir1 → 320		Sallittu	-0,004 m	0,004 m	0,006 m	0,013 m	0,013 m
Hki1 → 320		Sallittu	0,006 m	-0,007 m	0,009 m	-0,050 m	-0,050 m
Vant → 320		Sallittu	-0,003 m	0,002 m	0,004 m	0,003 m	0,003 m
6.11.2024..322 → 320		Sallittu	0,005 m	-0,008 m	0,009 m	0,003 m	0,003 m
323323323 → 320		Sallittu	0,003 m	-0,004 m	0,006 m	0,003 m	0,003 m
Porw → 320		Sallittu	-0,002 m	0,005 m	0,006 m	0,006 m	0,006 m
324 → 320		Sallittu	0,002 m	-0,002 m	0,003 m	-0,005 m	-0,005 m
Globaali (10063110.T04)		Sallittu	-1,678 m	-0,280 m	1,701 m	2,443 m	2,443 m

Pisteen laskemiseen käytetyt mittaustiedot: [320](#)

Kuva 13. TBC:n pisteiden johtoportista käy ilmi pisteiden muodostuminen, ja tasoitettujen koordinaattiarvojen erot havaittuihin vektoreihin (Kuva: Olli Hänninen).

Tasointiraportista voitiin tarkastella kuvan 14 mukaisia virhe-ellipsin komponentteja, jotka kertovat, minkä kokoiselle alueelle mitattu piste valitulla luotavuustasolla asettuu. Tätä voidaan pitää melko konkreettisenä tietona tarkkuutta arvioitaessa.

Error Ellipse Components

Point ID	Semi-major axis (Meter)	Semi-minor axis (Meter)	Azimuth
205	0,0011	0,0008	0°
260	0,0010	0,0007	177°
320	0,0010	0,0007	174°
321	0,0013	0,0010	172°
322	0,0010	0,0008	173°
323	0,0011	0,0008	175°
324	0,0014	0,0011	3°
325	0,0009	0,0007	178°
326	0,0011	0,0008	177°
327	0,0012	0,0008	0°
328	0,0012	0,0009	8°
329	0,0011	0,0008	174°
330	0,0012	0,0010	180°

Kuva 14. TBC:n tulostamassa verkkotasointiraportissa on listattu virhe-ellipsin komponentit tasoitetuille pisteille (Kuva: Olli Hänninen).

Havaintojaksokohtaiset tasointilaskennat hyväksyttiin, kun kaikki tässä luvussa käsitellyt tarkistukset olivat tehty. Joitain epäkelvolliseksi todettuja vektoreita piti

poistaa laskennasta, ja varmistaa, että suunnitellut vektorit säilyvät mukana laskennassa.

8.5.2 Koko mittausaineiston vapaan verkon tasoituslaskenta

Seuraavaksi toteutettiin koko mittausaineiston vapaan verkon tasoituslaskenta. Tämän laskennan tuloksena voitiin todeta havaintojaksojen yhteensopivuus. Laskentaa varten yhdistettiin havaintojaksokohtaisessa laskennassa tehdyt TBC-projektitiedostot. Samalla uuteen projektiin tuotiin kaikki tarpeellinen laskenta-aineisto havaintojaksokohtaisesta laskennasta. Vapaassa verkkotasoituksessa kiinnitettiin yhden aktiivisen lähtöpisteen koordinaatit. Tasoituslaskenta ja sen onnistumisen analysointiin käytettiin samoja menetelmiä, mitä aiemmin havaintojaksokohtaisessa laskennassa.

Tarkasteltaessa standardisoituja jäännösvirheitä, jouduttiin joitakin vektoreita karsimaan laskennasta. Samalla seurattiin jäännösvirheiden ja virhe-ellipsien kehittymistä. Lopulta jäi kaksi vektoria, joiden Tau-arvo ylitti sallitun. Khiin neliötesti meni läpi, mutta vektorien poistamisen vaikutus jäännösvirheisiin ei ollut toivottu. Päätettiin jättää kyseiset vektorit verkkoon, ja siirtyä lisäämään rajoitteita tasoitukseen.

8.5.3 Lopullinen tasoituslaskenta ja tulosten analyysi

Laskennan tässä vaiheessa lähdettiin rajoittamaan tai kiinnittämään lähtöpisteiden koordinaatteja. Lähtöpisteille voidaan asettaa tason ja korkeuden osalta σ -arvon, jotka ovat oletuksena 0.000 m. Näin ollessa voisi päätellä, että kyseessä on lähes sama asia kuin kiinnitys. Jos näitä arvoja lähtee muuttamaan, niin siirytään rajoittamaan. Poutanen toteaa kirjassaan, että rajoittaminen olisi suositeltavampi tapa, koska lähtöpisteiden tiedot säilyvät mukana normaaliyhtälömatrississa jatkokäsittelyä ajatellen. (Poutanen 2016: 291.)

Rajoittaminen vaikutti Khiin neliötestiin, a posteriori -kertoimeen sekä standardisoituihin jäännösvirheisiin. Edessä oli taas vektoreiden karsiminen.

Karsimisessa huomioitiin, että suunnitellut vektorit pidettiin mukana, ja karsittavat vektorit olivat pisimpiä ei suunnitelmassa mukana olleita vektoreita. Lopulta tasoitus saatiin onnistuneesti läpi, ja a posteriori -kertoimeksi 1,06. Tasoituslaskennan tuloksia tarkasteltaessa kiinnitettiin huomiota jäännösvirheisiin. Jäännösvirheet ja virhe-ellipsin komponentit (kuva 14) olivat millimetriluokkaa. Jos kuvassa 15 esitetyissä jäännösvirheissä olisi todettu isoja muutoksia tässä vaiheessa verrattuna kohdan 9.8.3 laskentaan, niin tämä voisi viitata lähtöpisteiden koordinaateissa oleviin ristiriitoihin.

Adjusted Geodetic Coordinates

Point ID	Latitude	Latitude Error (Meter)	Longitude	Longitude Error (Meter)	Height (Meter)	Height Error (Meter)	Constraint
205		0,0011		0,0008	56,556	0,0047	
260		0,0010		0,0007	47,754	0,0047	
320		0,0010		0,0007	37,310	0,0052	
321		0,0013		0,0010	25,878	0,0066	
322		0,0010		0,0008	22,969	0,0054	
323		0,0011		0,0008	30,012	0,0054	
324		0,0014		0,0011	31,950	0,0068	
325		0,0009		0,0007	54,110	0,0044	
326		0,0011		0,0008	19,632	0,0051	
327		0,0012		0,0008	52,954	0,0056	
328		0,0012		0,0009	64,424	0,0053	
329		0,0011		0,0008	41,631	0,0050	
330		0,0012		0,0010	48,471	0,0053	
Hki1		?		?	50,744	?	LLh
Kir1		?		?	41,297	?	LLh
Porw		?		?	51,259	?	LLh
Vant		?		?	69,123	?	LLh

Kuva 15. TBC:ssä tasoitettujen koordinaattien jäännösvirheet (Kuva: Olli Hänninen).

Tasoituslaskennan tuloksena saatiin koordinaatit mitatuille pisteille. Tämän työn kannalta oleellinen koordinaattiarvo oli ellipsoidinen korkeus. Sen osalta jäännösvirheet olivat 5–7 mm:n luokkaa. Tällä voi olla merkitystä koko työn kannalta, mutta on hyväksyttävä, koska ellipsoidiset korkeudet ovat lopulta sivutuote kaupungin viranomaistyönä tehtyyn E4-luokan peruskiintopisteverkon ylläpitoon ja tihentämiseen liittyvistä mittauksista. Tarkkuuden arviointia, ja siihen liittyviä pohdintoja käsitellään edempänä olevissa kappaleissa. Tasoituslaskennan tuloksena saatiin koordinaattien lisäksi TBC:ssä kovarianssitermit, jäännösvirheet sekä viitekerroin, joka on Trimblen käännös englanninkielisestä

ohjelmistoversiosta, jolla mahdollisesti tarkoitetaan a posteriori varianssia. Tulosten analysoinnin perusteella todettiin, että tasoituslaskenta oli onnistunut.

8.6 Bilineaarinen interpolointi

Staattisen mittauksen tasoituslaskennan tuloksena saatiin mitatuille pisteille elliptoidiset korkeudet. Vaaitut korkeudet saatiin suoraan kaupungin pisterekisteristä, ja tarvittiin vielä FIN2023N00-geoidinkorkeudet samoille pisteille sovituksen parametrien ratkaisemiseksi. FIN2023N00 on muodoltaan tasavälinen hila, jolloin geoidinkorkeus tietylle pisteelle voidaan laskea bilineaarisella interpoloinnilla. Tässä valittiin mittauspisteen neljä lähintä FIN2023N00-pistettä, joiden avulla laskettiin muunnos mittauspisteelle. Geoidimallin pisteet muodostavat hilan, ja mittauspisteen neljän lähimmän hilapisteen muodostaman nelikulmion kulmat ovat (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_2) ja (x_2, y_1) . Geoidinkorkeudet vastaavasti z_1 , z_2 , z_3 ja z_4 . Geoidinkorkeus halutulle pisteelle z_p pisteessä (x_p, y_p) saadaan kaavalla 15:

$$z_p = \frac{(x_2 - x_p)(y_2 - y_p)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} z_3 + \frac{(x_p - x_1)(y_2 - y_p)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} z_2 + \frac{(x_2 - x_p)(y_p - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} z_4 + \frac{(x_p - x_1)(y_p - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} z_1 \quad (15)$$

Laskenta toteutettiin taulukkolaskentaohjelmalla, jolla on yksinkertaista laskea näin pieni määrä pisteitä. Kuvassa 16 on esimerkki taulukkolaskentaohjelmasta, jossa kaava 15 on sisällytetty sarakkeen H soluihin. Interpoloinnin tuloksena saatiin geoidinkorkeus mitatuille pisteille. Geoidinkorkeus ratkaistiin kaikille 13 mittauspisteelle sovitusparametrien laskentaa varten.

	C	D	E	F	G	H	I
		X	Y	Z			FIN2023N00
320		254	667				
1		254	66	17,65	a	4,415	
2		254	66	17,66	b	3,818	
3		254	66	17,62	c	5,043	
4		254	66	17,62	d	4,360	17,636
205		255	668				
1		25	66	17,46		5,148	
2		25	66	17,47		1,731	
3		25	66	17,44		7,904	
4		25	66	17,43		2,658	17,441
260		25	667				
1		25	66	17,47		7,150	
2		25	66	17,48		2,383	
3		25	66	17,45		5,940	
4		25	66	17,44		1,980	17,453

Kuva 16. Bilineaarinen interpolointi taulukkolaskentaohjelmassa (Kuva: Olli Hänninen).

8.7 Paikallisen geoidimallin sovituksen määrittäminen

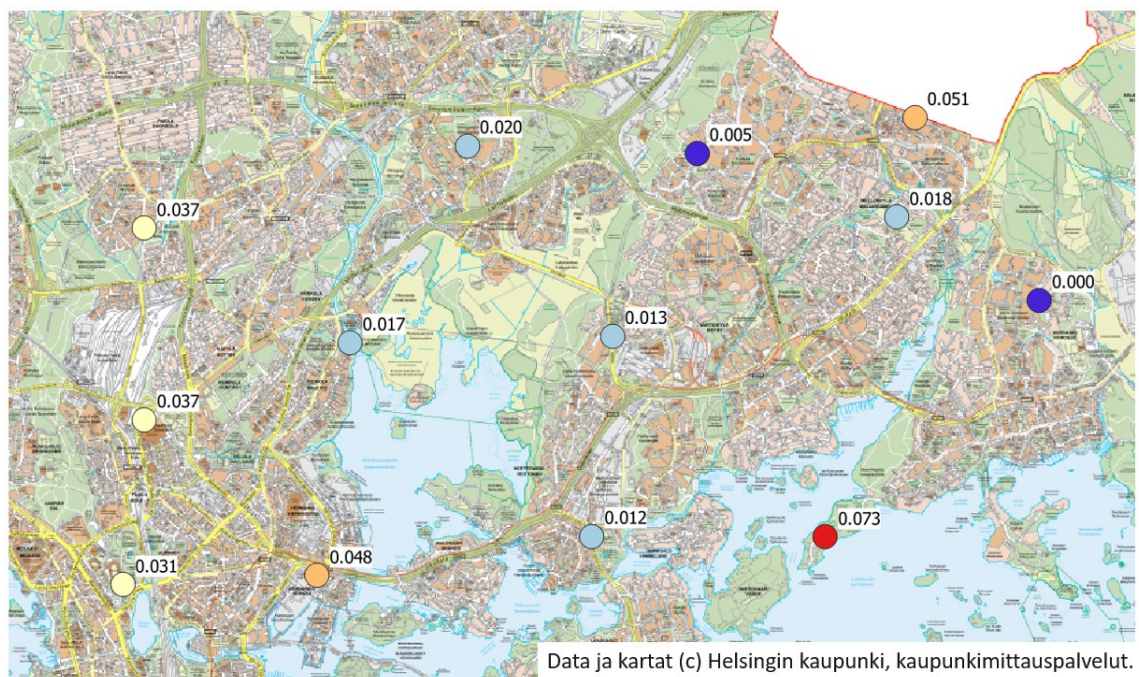
Sovittamisen lähtökohdaksi tarvittavat tiedot eri korkeuksista saatiin staattisesta suhteellisesta GNSS-mittauksesta (h_{ell}), Helsingin kaupungin kiintopisterekisteristä ($H_{vaaittu}$) sekä bilineaarisella interpoloinnilla ($N_{FIN2023}$). Näillä tiedoilla voidaan laskea tasoituksessa tarvittava arvo ΔN lasketaan kaavalla 16:

$$\Delta N = N - N_{FIN2023} \quad (16)$$

N on $h_{ell} - H_{vaaittu}$.

Lasketut ΔN -arvot luettiin QGIS-ohjelmaan kuvassa 17, jossa tarkasteltiin laskettujen arvojen muutoksia suhteessa sijaintiin. Silmämääräisesti korrelaatiota

ei näyttänyt olevan tai se ei ollut johdonmukaista. ΔN on laskettu arvoista, joissa ovat virheet eivät kaikilta osin ole tiedossa. Eniten epävarmuutta liittyy yksittäisiin korkeuskiintopisteisiin, jotka voivat olla vuosikymmenien ikäisiä. Tällä ei välttämättä ole työn lopputuloksen kannalta merkitystä, koska tavoitteena on saada parannettua geoidimallin sopivuutta juuri näihin olemassa oleviin korkeuskiintopisteisiin. Mikäli korkeuskiintopisteessä olisikin virhettä, on myös mahdollista, että virhe on alueellinen, jolloin sovitettu geoidimalli on taas yhteensopivampi alueen virheestä johtuvan ”paikallisen” korkeusjärjestelmän kanssa.



Kuva 17. Kaavalla 16 lasketut ΔN -arvot ennen paikallista sovitusta esitettyinä kartalla QGIS-ohjelmassa (Kuva: Olli Hänninen).

Sovitusmenetelmäksi valittiin polynomipinnan sovitus. Polynomipintaa lähdettiin sovittamaan geoidinkorkeuksien eroihin pienimmän neliösumman menetelmällä kaavalla 17:

$$\Delta N = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{2-1} a_{ij} \Delta \varphi^i \Delta \lambda^j \quad (17)$$

$$\Delta \varphi \text{ on } \frac{\varphi - \varphi_{min}}{\varphi_{max} - \varphi_{min}}$$

$$\Delta \lambda \text{ on } \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}$$

$\Delta \lambda$ ja $\Delta \varphi$ ovat normeeratut koordinaatit

λ_{min} on alueen x-koordinaatin minimiarvo

λ_{max} on alueen x-koordinaatin maksimiarvo

φ_{min} on alueen y-koordinaatin minimiarvo

φ_{max} on alueen y-koordinaatin maksimiarvo.

$\Delta \lambda$ ja $\Delta \varphi$ kuvaavat pisteen suhteellista sijaintia sovitettavalla alueella. Valittiin toisen asteen polynomisovitus, jolloin ratkaistava yhtälö on kaavan 18 mukainen:

$$\Delta N = a_{00} + a_{10} \Delta \lambda + a_{01} \Delta \varphi + a_{20} (\Delta \lambda)^2 + a_{11} (\Delta \lambda \Delta \varphi) + a_{02} (\Delta \varphi)^2 \quad (18)$$

Havaintosuureet kirjoitettiin kaavan 19 muotoon

$$l = \begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

Rakennematriisiin seuraavasti kaavalla 20:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \lambda_1 & \Delta \varphi_1 & (\Delta \lambda_1)^2 & (\Delta \lambda_1 \Delta \varphi_1) & (\Delta \varphi_1)^2 \\ 1 & \Delta \lambda_1 & \Delta \varphi_2 & (\Delta \lambda_2)^2 & (\Delta \lambda_2 \Delta \varphi_2) & (\Delta \varphi_2)^2 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \Delta \lambda_n & \Delta \varphi_n & (\Delta \lambda_n)^2 & (\Delta \lambda_n \Delta \varphi_n) & (\Delta \varphi_n)^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Ratkaistavat tuntemattomat kaavalla 21:

$$x = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{pmatrix} \quad (21)$$

ΔN arvot eli havainnot sisältävät virheitä, pitää laskentaan ottaa mukaan havaittujen ja laskettujen arvojen erotus eli jäännösvirheet. Kirjoitetaan kaavalla 22 muotoon.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

Lähtökohtana laskennalle kaava 23:

$$l = Ax \quad (23)$$

Kuten edellä todettiin, havainnot l eivät ole absoluuttisen tarkkoja, otetaan mukaan virheet v , jolloin kaavan 24 mukaisesti:

$$l = Ax + v \quad (24)$$

Havaintojen painoksi P valittiin alkutilanteessa yksikkömatriisi, koska kaikki havainnot oli tehty samoilla havaintomenetelmillä, ja lähtötilanteessa ei ollut tietoa tarkkuuksien vaihtelusta. Yksikkömatriisissa matriisin lävistäjällä on pelkkiä ykkösiä, ja muut ovat nollia. Pienimmän neliösumman estimaatit \hat{x} saadaan tuntemattomille muuttujille x normaaliyhtälön ratkaisuna kaava 25

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (25)$$

Laskenta tehtiin taulukkolaskentaohjelmassa, mikä todettiin soveltuvista vaihtoehdoista yksinkertaisimmaksi ja nopeimmaksi tavaksi edistää työtä. Taulukkoon kerättiin kaikki tarvittavat tiedot laskentaa varten.

Normaaliyhtälön ratkaisemisen jälkeen kaavalla 26 laskettiin jäännösvirheet

$$\hat{v} = l - A\hat{x} \quad (26)$$

Sekä ratkaisun kaavalla 27 a posteriori varianssi $\hat{\sigma}_0^2$ ja kaavalla 28 painoyksikön keskivirhe \hat{m}_0

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{n-u} \quad (27)$$

ja

$$\hat{m}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} \quad (28)$$

Vapausasteella tarkoitetaan lukua, joka saadaan vähentämällä havaintojen määrästä n tuntemattomien määrä u . Pienimmän neliösumman ratkaisua ei saada, jos ei ole ylimääritystä. Ylimäärityksellä tarkoitetaan tilannetta, jossa havaintoja on enemmän kuin tuntemattomia.

Painoyksikön keskivirheen pitäisi olla lähellä ykköstä. Jos tämä ehto ei toteudu, voivat havaintojen painotukset olla pielessä. Tässä laskennassa

redundanssiluku on alle kymmenen (7), jota voidaan pitää pienenä redundanssina. Tällöin myöskään painoyksikön keskivirhe ei välttämättä ole luotettava mittari.

Ensimmäisen laskennan tuloksena saatiin painoyksikön keskivirheeksi 0.019. Tämä poikkeaa merkittävästi ykkösestä, joten lähdettiin tutkimaan muutoksia painotukseen.

Jäännösvirheistä (=poikkeama odotusarvosta) laskettiin jäännösvirheiden neliö, ja painoiksi valittiin jäännösvirheiden neliöiden käänteisluvut. Painomatriisi P muodostettiin näistä luvuista. Tämä valinta tehtiin, koska tavoitteena oli pitää niitä kohtia muuttumattomina, jossa sovitus ”istuu” jo hyvin. Kohtia, joissa sovitus poikkeaa odotusarvosta enemmän, haluttiin myös muuttaa enemmän.

Ratkaistiin normaaliyhtälö uusilla painoilla, jolloin painoyksikön keskivirheeksi saatiin 1,080. Iterointia päätettiin jatkaa niin kauan, kunnes painoyksikön keskivirhe ei enää lähesty ykköstä. Tämä vaihe saavutettiin viidennellä iteraatiokierroksella, joten neljännen kierroksen tuloksiin oltiin tyytyväisiä. Lopulliseksi painoyksikön keskivirheeksi saatiin 1,017.

8.8 Sovituksen laskeminen pisteille

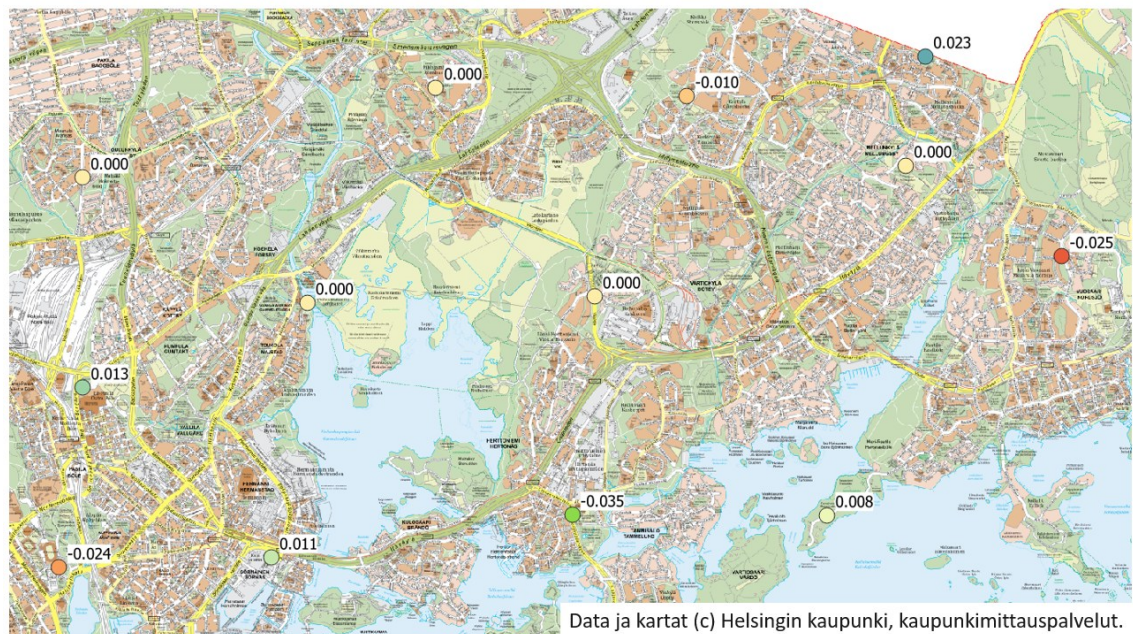
Sovitusparametrien laskennassa käytettyjen koordinaattien minimi- ja maksimiarvojen perusteella luotiin tasavälinen ruudukko, jonka pisteväli on noin 500 m. Ruudukon leveys on 12 kilometriä ja korkeus 6 kilometriä, jolloin ruudukossa on 325 pistettä. Asteina ruudukon pisteväli latitudin suunnassa on 0,00458 ja longitudin suunnassa 0,00903. Ruudukon pisteille tarvittiin FIN2023N00-geoidinkorkeudet sovitususta varten. Päädyttiin tekemään tämä vaihe QGIS-ohjelmalla, koska bilineaarinen interpolointi taulukkolaskentaohjelmassa olisi vaatinut pienimuotoista koodin kirjoitusta, ja vaiheen kertaluonteisuuden takia tämä ei vaikuttanut tehokkaalta ratkaisulta.

FIN2023N00-geoidimallista oli jo aiemmassa vaiheessa irrotettu Helsingin alueen geoidinkorkeudet. Pisteistä muodostettiin rasteri, jonka pikselin arvo oli FIN2023N00-geoidinkorkeus. Ruudukon pisteille laskettiin pikselin arvon perusteella Geoid_H-kenttä QGIS:n Field calculator -toiminnolla.

Ruudukko luettiin geoidinkorkeuksineen taulukkolaskentaohjelmaan. Laskettiin tarvittavat muuttujat $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda^2$, $\Delta\lambda \Delta\varphi$ ja $\Delta\varphi^2$ ruudukon jokaiselle. Pisteille laskettiin polynomimuunnoksessa määritetyillä parametreilla lopullinen sovitusarvo, jonka jälkeen voitiin laskea ruudukolle sovitetut geoidinkorkeudet kaavalla 29:

$$\text{Paikallinen sovitus}_{\text{FIN2023N00}} = \text{Fin2023N00} - \text{Sovitus}. \quad (29)$$

Kuvassa 18 on esitetty paikallisesti sovitettujen muunnospisteiden välinen korkeusero FIN2023N00-malliin. Verrattaessa näitä arvoja kuvan 17 arvoihin, voidaan todeta, että paikallisen sovituksen jälkeen alueen keskiosassa esiintyneet erot ovat lähellä nollaa.



Kuva 18. Paikallisesti sovitettujen muunnospisteiden korkeuserot verrattuna FIN2023N00-mallin korkeuteen QGIS-ohjelmassa (Kuva: Olli Hänninen).

9 Sovituksen testaus ja arviointi

FIN2023N00-geoidimallin paikallinen tehtiin Trimble Grid Factory -ohjelmalla. Siinä sovitetusta ruudukosta kirjoitettiin Trimble Access ja Trimble business center -yhteensopiva GGF-tiedosto. Tätä tiedostoa voidaan käyttää maastomittausprojekteissa suoraan geoidimallina.

Sovituksen lopputuloksena saatiin sovitetut arvot (HELPS25 = HELsingin Paikallinen Sovitus 2025) tekstitiedostomuotoisena koordinaattilistauksena, jossa jokainen piste sijaitsee omalla rivillään. Grid Factory -ohjelmaan vientiin tarvittiin tekstitiedosto, jossa geoidikorkeudet sijaitsevat omalla paikallaan ruudukossa, ja sarakkeet sekä rivit omaavat koordinaattiarvot. Kuvassa 19 on havainnollistettu oikea tekstitiedoston muoto. Tiedosto tallennettiin nimellä "PS_GEOID_250125_FOR_GGF.txt"

17.636	17.624	17.611	17.597	17.584	17.570	17.556	17.543	17.529	17.517	17.504
17.639	17.627	17.614	17.600	17.586	17.572	17.558	17.545	17.531	17.518	17.505
17.641	17.628	17.615	17.601	17.587	17.573	17.559	17.545	17.532	17.518	17.504
17.642	17.629	17.615	17.601	17.587	17.573	17.558	17.545	17.531	17.517	17.503
17.641	17.628	17.614	17.600	17.586	17.571	17.556	17.542	17.529	17.515	17.501
17.639	17.626	17.612	17.597	17.583	17.568	17.553	17.540	17.525	17.511	17.497
17.636	17.622	17.607	17.593	17.579	17.565	17.550	17.535	17.520	17.506	17.492
17.631	17.617	17.602	17.587	17.572	17.559	17.544	17.529	17.514	17.500	17.486
17.625	17.610	17.595	17.580	17.566	17.551	17.536	17.522	17.508	17.493	17.479
17.617	17.602	17.587	17.572	17.557	17.543	17.528	17.514	17.500	17.485	17.471
17.608	17.593	17.578	17.563	17.549	17.534	17.520	17.505	17.491	17.477	17.462
17.597	17.582	17.568	17.554	17.540	17.524	17.510	17.495	17.480	17.466	17.452
17.586	17.571	17.557	17.542	17.528	17.513	17.498	17.484	17.469	17.456	17.441

Kuva 19. HELPS-geoidinkorkeuksista muodostettiin tekstitiedostomuotoinen ruudukko, joka voitiin lukea suoraan Grid Factory -ohjelmaan (Kuva: Olli Hänninen).

Grid Factory -ohjelmassa voidaan määrittää paikallinen ruudukko, jonka jälkeen ruudukkoon voidaan lukea tekstitiedostosta geoidinkorkeudet. Määritysvaiheessa annetaan muun muassa haluttu interpolointimenetelmä ja tiedot muodostettavan alueen ulottuvuuksista vertailukehyksessä. Interpolointimenetelmäksi valittiin "Bi-linear". Muita vaihtoehtoja tässä olivat "Biquadratic" ja "Bispline".

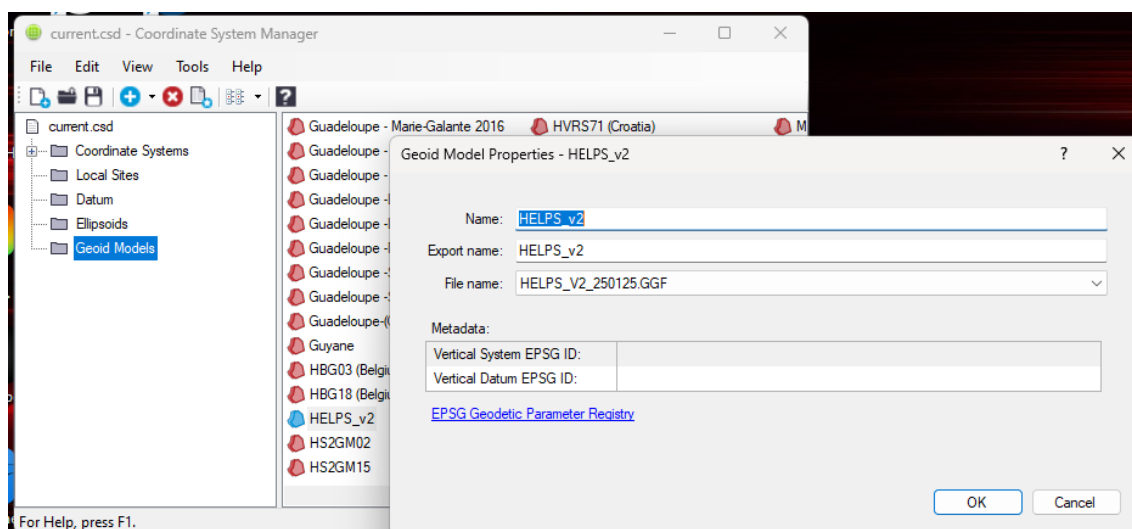
Ruudukon ulottuvuudet määritettiin antamalla ensin sarakkeen ensimmäinen ja viimeinen latitudiarvo sekä ruudukon pisteväli latitudisuunnassa. Samoin annettiin rivin ensimmäinen ja viimeinen longitudiarvo sekä ruudukon pisteväli longitudisuunnassa. Viimeisenä ja oleellisena vaihtoehtona valittiin, mitä tietoa ruudukossa esitetään, ja valittiin vaihtoehtoista "Geoid separations" eli geoidinkorkeudet. Näiden määritysten perusteella luettiin aiemmin muodostettu "PS_GEOID_250125_FOR_GGF.txt" Grid Factory -ohjelmaan. Ohjelman käyttöliittymä on pelkistetyn yksinkertainen, ja muodostettu ruudukko näkyy sinisenä laatikkona maailman kartalla. Kun vie hiiren osoittimen laatikon päälle, näkyy alareunassa kyseisen kohdan geoidinkorkeus. Tämän perusteella todettiin, että GGF-tiedoston määrittäminen on onnistunut, ja se tallennettiin nimellä "HELPS_v2.GGF".

Trimble TSC7 -maastotietokoneissa on käytössä Trimble Access -maastomittausohjelma, joka käyttää GGF-tiedostoa geoidikorjaukseen. "HELPS_v2.GGF" kopioitiin TSC7 Trimbledata/geodata -kansioon, jonka jälkeen se oli valittavissa geoidimalliksi mittausprojektin asetusten määrittämisvaiheessa Trimble Accessissa. Tätä hyödynnettiin testimittauksen toteutuksessa. Mittauksissa saatiin suoraan sovitettu korkeus, ja sitä voitiin verrata kiintopisteen pisterekisterissä olevaan korkeusarvoon.

Trimble Business Center -ohjelma käyttää samaan tapaan GGF-tiedostoa kuin aiemmassa kappaleessa käsitelty Trimble Access -maastomittausohjelma. TBC:ssä käyttöönotto vaatii hieman useamman vaiheen, mutta etenee kohtuullisen johdonmukaisesti. GGF-tiedosto kopioidaan Trimblen geodata-kansioon, jonka jälkeen Coordinate system Manager -ohjelmassa määritetään uusi geoidimalli. Kuvassa 20 näkyy tarvittavat tiedot geoidimallin lisäämistä varten. Geoidimallin nimi ja "export name" ovat identtiset. Valittava tiedosto "HELPS_V2_250125.GGF" löytyy alasvetovalikosta, kun tiedosto on kopioitu oikeaan sijaintiin geodata-hakemistoon.

Määrittämisen jälkeen geoidimalli on käytettävissä TBC:ssä, ja esimerkiksi maastomittausprojekti, jossa on käytetty kyseistä geoidimallia, on mahdollista lukea

oikein TBC:n. Jos tätä vaihetta ei ole määritetty oikein, TBC varoittaa puuttuvasta geoidimallista maastomittaustiedostoa luettaessa. Tässä työssä sovitettun geoidimallin tuominen TBC:n oli oleellista, koska testimittaukset käsiteltiin kyseisellä ohjelmalla.



Kuva 20. Coordinate system managerissa syötetään tarvittavat tiedot geoidimallin lisäämistä varten Trimble Business Centerin geoidimallivalikoimaan (Kuva: Olli Hänninen).

Testimittaukset toteutettiin VRS-RTK-GNSS-mittauksina. Maastomittausprojektiin oli valittu käytettäväksi geoidimalliksi ”HELPS_v2”, jolloin voitiin jo kentällä verrata mitattua arvoa pisterekisterissä olevaan korkeusarvoon. Testipisteiksi valittiin kallioon perustettuja Helsingin kaupungin korkeuskiintopisteitä, jotka sijaitsevat eri puolilla sovitettua geoidimallin aluetta. Kaikki testipisteet mitattiin vähintään viiden sarjan mittauksena, ja osa mitattiin kahteen kertaan. Kahteen kertaan mittaus vastaa JHS184 mukaista E5-luokan käyttökiintopistemittausta RTK-GNSS-menetelmällä. Yksittäisen sarjan mittauspiste koostui 30 tallennetusta epookista, jolloin jokainen sarja piti sisällään 5 pistettä (x 30 epookkia). Sarjojen välillä RTK-mittaus alustettiin uudelleen.

Ensimmäinen testimittauserä kattoi 6 kohtaa työn alueelta, joista yhdessä kohdassa eli Kalasataman alueella mitattiin kolmea testipistettä. Mittaukset suoritettiin mittasauvalla, jolloin korkeuden osalta pieni epävarmuus voi tulla myös

sauvan korkeusmittaustarkkuuden myötä antennin korkeuteen. Muutama testipiste päätettiin mitata kolmijalalle asetetun pakkokeskisen avulla, jolloin antennikorkeus pystyttiin mittaamaan millimetrien tarkkuudella. Toisaalta työn tarkoituksena oli myös todeta, parantaako paikallinen sovitus GNSS-korkeuden tarkkuutta suhteessa korkeuskiintopisteisiin käytännön mittauksissa, jolloin on perusteltua tehdä osa testi mittauksista samalla menetelmällä, joka on käytössä kaupunkimittausspalveluiden päivittäisessä mittaustyössä.

10 Tulosten tarkastelu

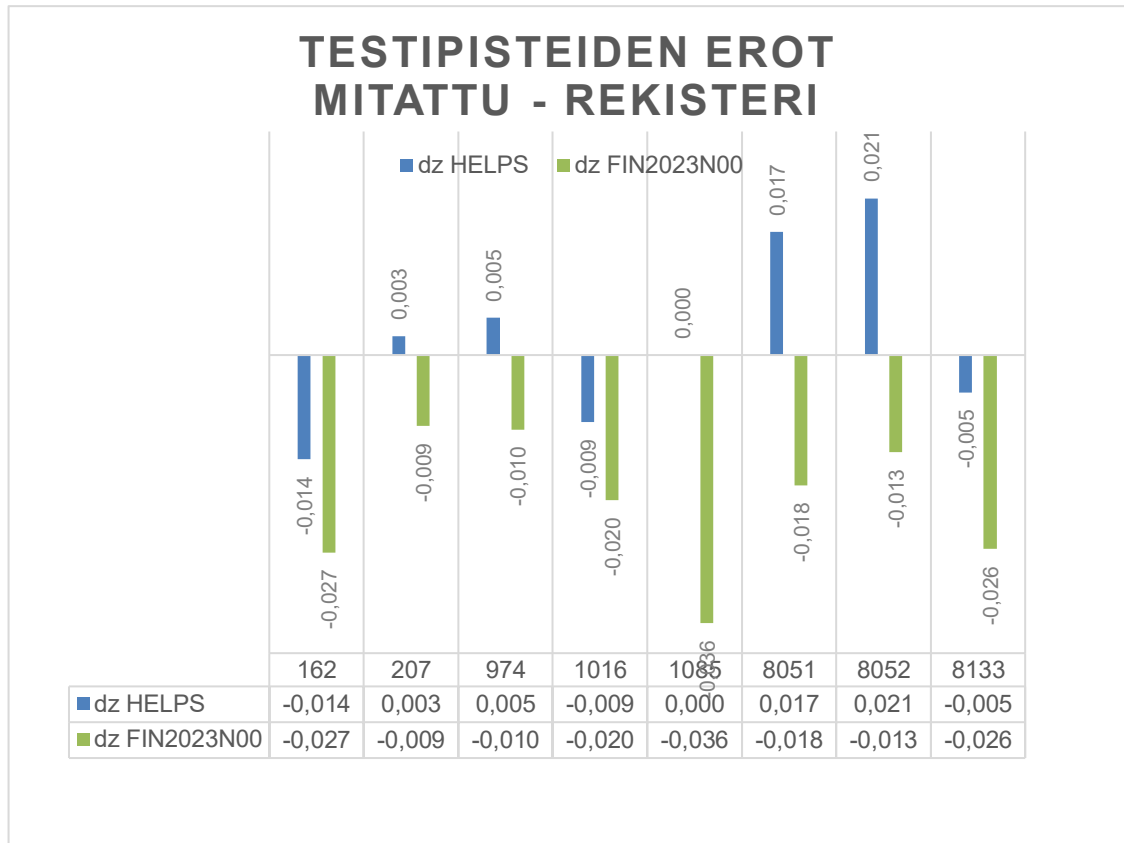
Mittaustiedot luettiin TBC:n, jossa mittaussarjojen pisteistä laskettiin keskiarvopisteet. Keskiarvopisteistä tallennettiin sovitetun mallin ja valtakunnallisen mallin korkeusarvot, ja ne kirjoitettiin omaan tiedostoon. Varsinainen vertailu tehtiin taulukkolaskentaohjelmassa. Kuvassa 21 on testipisteiden pisterekisterissä olevien korkeusarvojen ja eri geoidimallien avulla saatujen korkeusarvojen vertailua. Korkeuserot laskettiin kaavalla 30:

$$\Delta Z = Z_{mitattu} - Z_{vaaittu} \quad (30)$$

$Z_{mitattu}$ on testimittauksessa saatu korkeusarvo

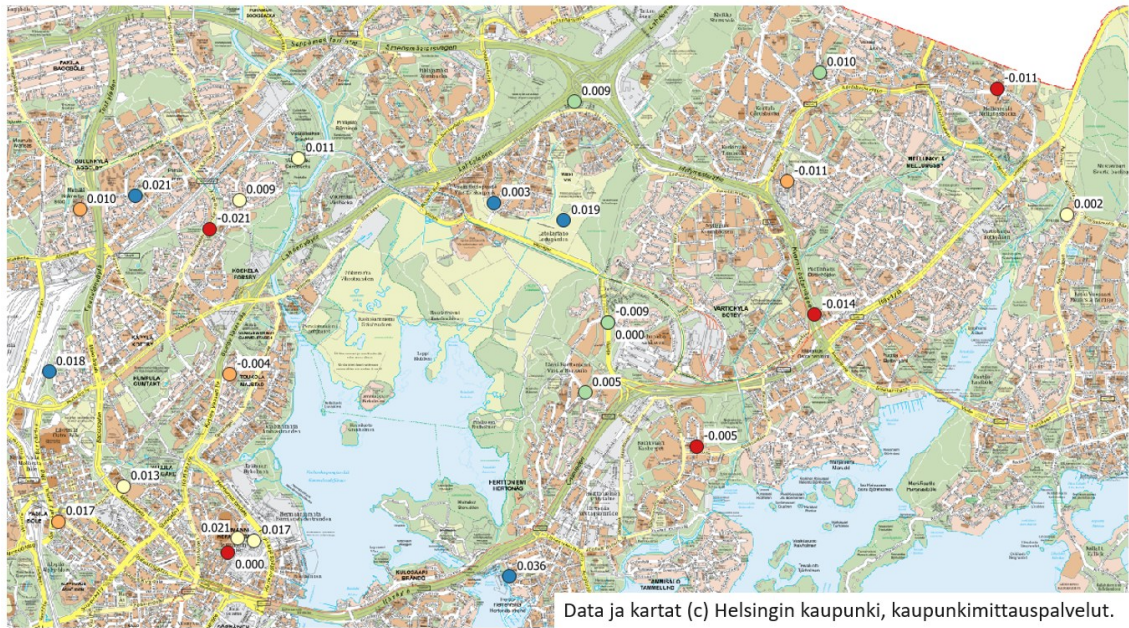
$Z_{vaaittu}$ on kiintopisterekisterin mukainen korkeusarvo.

Negatiivinen arvo tarkoittaa, että testimittauksessa mitattu piste on ”alempana” kuin kiintopisteelle vaaittu arvo ja positiivinen arvo, että mitattu piste on ”ylempänä” kuin kiintopisteen vaaittu arvo.



Kuva 21. Testipisteiden kiintopisterekkisteriarvon ja eri geoidimallilla saatujen korkeusarvojen vertailua (Kuva: Olli Hänninen).

Testimittausten tulokset luettiin myös QGIS:n tasoksi erojen sijaintien tarkastelua varten kuvan 22 mukaisesti. Tavoitteena oli saada testimittauksia tasaisesti koko työn alueelta, jolloin sovituksen toimivuutta pystyttiin arvioimaan mahdollisimman kattavasti koko aluerajauksen osalta.



Kuva 22. Tulokset kartalla QGIS-ohjelmassa. Paikallisen sovituksen ja kiintopisterekisterin väliset korkeuserot jokaiselle testipisteelle. (Kuva: Olli Hänninen)

Paikallisen sovituksen ruudukko muodostettiin sovituspisteiden leveyden ja pituuden maksimi- ja minimiarvojen perusteella, jolloin alueesta muodostui suorakulmio. Testimittauksia tehtiin myös tämän suorakulmion nurkka-alueilla, jolloin menttiin selkeästi sovituspisteiden muodostaman alueen ulkopuolelle. Testimittauksien tuloksista voitiin todeta, että virheet kasvavat mentäessä näille nurkka-alueille, ja päätettiin jättää niillä sijaitsevat testipisteet pois lopullisesta testipisteiden laskennasta.

Tämän päätöksen jälkeen testimittauspisteiden eräkokoko oli 25 pistettä. Mittauspisteiden HELPS_v2- ja FIN2023N00-mallien avulla korjattuja korkeuksia verrattiin Helsingin kaupungin kiintopisterekisterin korkeusarvoihin. Eroista laskettiin kuvan 23 mukaisesti keskiarvo, varianssi, keskihajonta, maksimi- ja minimiarvot. Keskiarvo kuvaa mittauserän tasoa, mihin mitatut korkeuserot keskimäärin asettuvat. Sovitetun mallin keskiarvoksi saatiin 0,006 m, kun FIN2023N00-mallilla korjatuilla pisteillä se asettui arvoon -0,016 m. Tämä osoittaa, että HELPS_v2 antaa yleisesti hieman suurempia arvoja verrattuna FIN2023N00-malliin.

Korkeuserojen vaihtelua keskiarvon ympärillä tutkittiin laskemalla varianssi. HELPS_v2-aineiston varianssiksi saatiin 0,00018 ja FIN2023N00-aineistolle 0,00011. Keskihajonta kuvaa korkeuserojen hajontaa mittausyksiköissä, ja pienempi keskihajonta tarkoittaa, että korkeuserot ovat lähempänä keskiarvoa, kun suuri keskihajontaa antaa viitteitä suuremmasta vaihtelusta. Kuvan 23 mukaisesti HELPS_v2 keskihajonta oli 0,013 m, ja FIN2023N00 korjatun aineiston keskihajonta oli 0,011 m. HELPS_v2-mallin tulokset vaihtelevat hieman enemmän kuin FIN2023N00.

Maksimi- ja minimiarvoilla kuvataan aineistojen ääripäitä sekä mittausten vaihteluväliä. Näiden arvojen perusteella HELPS_v2 antaa hieman suurempia arvoja kuin FIN 2023N00 samaan tapaan kuin keskiarvojen kohdalla.

	Keskiarvo	Varianssi	Keskihajonta	Maksimi	Minimi
HELPS_v2	0,006	0,00018	0,013	0,036	-0,020
FIN2023N00	-0,016	0,00011	0,011	0,009	-0,041
dz_ERO	0,022	7,863E-05	0,009	0,040	0,011

Kuva 23. Testipisteiden analyysissä saadut tunnusluvut. "dz_ERO" on laskettu kahden ylemmän mittauksen erotuksesta eli toteutunut sovituksen arvo. (Kuva: Olli Hänninen.)

Laskettiin vielä tunnusluvut HELPS_v2 ja FIN2023N00 korjattujen korkeusarvojen erotukselle "dz_ERO", joka kuvaa sovituksen vaikutusta mittauspisteisiin. Keskimääräinen sovitus on 0,022 m luokkaa, ja keskihajonnan ollessa 0,009 m vaihtelua voidaan pitää melko vähäisenä.

11 Yhteenveto

Työn yhteydessä toteutettiin kohtuullisen kokoinen E4-luokan peruskiintopisteverkko staattisena suhteellisena GNSS-mittauksena. Mitattu kiintopisteverkko määritteli paikallisen sovituksen rajauksen. Paikallinen sovitus laskettiin toisen asteen polynomimuunnoksena, jossa sovitettiin osa valtakunnallista FIN2023N00-mallia Helsingin korkeuskiintopisteisiin. Sovituksen arviointia varten mitattiin Helsingin korkeuskiintopisteitä VRS-RTK-GNSS-mittauksella käyttäen

korkeuden korjaamiseen paikallisesti sovitettua mallia. Mittauksesta saatuja tuloksia verrattiin Helsingin kiintopisterekisterin korkeusarvoihin. Lisäksi mitatuille pisteille laskettiin FIN2023N00-mallilla korjatut korkeusarvot.

Tutkimuksessa asetettiin kaksi keskeistä tutkimuskysymystä, joista ensimmäinen oli se, onko geoidimallin paikallisen sovituksen avulla mahdollista parantaa paikallisiin GNSS-mittauksiin perustuvien aineistojen tarkkuutta korkeuden osalta. Työn tulosten perusteella geoidimallin paikallisen sovituksen avulla on mahdollista parantaa paikallisiin GNSS-mittauksiin perustuvien aineistojen tarkkuutta korkeuden osalta. Analyysissä ilmeni, että paikallisella sovituksella saatiin tarkennettua korkeutta suhteessa kaupungin korkeuskiintopisteisiin, kun verkkiaineistona käytettiin FIN2023N00-mallilla saatuja korkeuksia.

Toinen tutkimuskysymys koski paikallisesti sovitetun geoidimallin ja valtakunnallisen geoidimallin FIN2023N00 eroja. Työssä todettiin, että paikallisesti sovitetun geoidimallin ja valtakunnallisen FIN2023N00-geoidimallin erot tarkasteltaessa eri malleilla korjattuja korkeuksia osoittivat, että paikallinen sovitus tuottaa tarkempia tuloksia tietyillä alueilla. Testipisteiden osalta paikallisella sovituksella laskettujen korkeuserojen keskiarvo oli kuusi millimetriä verrattuna kaupungin korkeuskiintopisteisiin, kun vastaava luku valtakunnallista mallia käytettäessä oli -16 mm.

Käytännön mittauksissa paikallisesti sovitettu malli voi parantaa korkeustarkkuutta tilanteissa, joissa koron tuonti vaaitsemalla korkeuskiintopisteeltä olisi epäedullista. Mahdollinen käyttökohde voi olla esimerkiksi takymetrin orientointi GNSS-yhteiskäytöllä, jolloin saadaan korkeuskiintopisteiden kanssa yhteenso-piva korkeus mukaan mittauksiin. Yhteiskäyttöisesti tehtävien takymetrimittauksien sovelluskohteita ovat muun muassa rakennusvalvontamittaukset, kaavoitus- ja maanmittaukseen liittyvät tehtävät sekä erilaiset infrastruktuurin rakentamisen mittaukset.

Käytännön tekninen merkitys saadaan todennäköisesti tarkemmin selville tulevaisuudessa, kun paikallisen sovituksen tarkkuutta voidaan arvioida laajemmin

kenttä mittauksissa. Tällöin paikallinen sovitus voi tarjota parannuksia nykyisiin käytäntöihin.

Taloudellisesta näkökulmasta arvioituna paikallisen sovituksen käyttö voisi nopeuttaa maastossa tapahtuvaa mittausta, ja vähentää lisämittaustarpeita, mikä pitkällä aikavälillä pienentäisi kustannuksia.

Vuosia sitten vastaan tullut kysymys liittyen yksittäiseen Kalasataman korkeuskiintopisteeseen oli alkusysäys tämän työn ideointiin. Testimittausten perusteella paikallista sovitusta käyttämällä tämä korkeusero GNSS-mittauksen ja korkeuskiintopisteen rekisteriarvon välillä pystyttiin suurimmaksi osaksi eliminoidaan.

Lähteet

About Glonass. Verkkoaineisto. Glonass applied consumer center. <<https://glonass-iac.ru/>>. Luettu 26.11.2024

Aguiar, C. R., Monico, J. F. G., & Moraes, A. O. 2025. Impact of ionospheric scintillations on GNSS availability and precise positioning. *Space Weather*. Vol. 23, s. 1–16.

Avaruus ja magneettikenttä. Verkkoaineisto. Ilmatieteen laitos. <<https://www.ilmatieteenlaitos.fi/avaruus>>. Luettu 20.2.2025

BeiDou Navigation Satellite System Signal in Space Interface Control Document. 2019. Verkkoaineisto. China Satellite Navigation Office. <<http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201902/P020190227702348791891.pdf>>. Luettu 26.11.2024

CDDIS. 2024. Verkkoaineisto. NASA. <<https://cddis.nasa.gov/index.html>>. 29.07.2024. Luettu 12.2.2025.

Bilker-Koivula, Mirjam & Ollikainen, Matti. 2009. Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. Helsinki: Geodeettinen laitos.

FINPOS-paikannuspalvelu. Verkkoaineisto. Maanmittauslaitos. <<https://www.maanmittauslaitos.fi/finpos>>. Luettu 18.2.2025

Galileo. Verkkoaineisto. The European Space Agency. <https://www.esa.int/Applications/Satellite_navigation/Galileo/>. Luettu 26.11.2024

Gleason, S. Gebre-Egziabhe, D. 2009. *GNSS Applications and Methods*. Boston/London: Artech house.

JHS 163 Suomen korkeusjärjestelmä N2000. 2019. Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta.

JHS 184 Kiintopistemittaus EUREF-FIN-koordinaattijärjestelmässä. 2012. Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta.

JHS 196 EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa. 2016. Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta

Kallio, Ulla. 1999. *Tasoituskasku*. Helsinki: Otatieto

Laurila, Pasi. 2012. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet. Rovaniemi: Rovaniemen ammattikorkeakoulu.

Manning, C. 2023. Verkkoaineisto. NASA. <<https://www.nasa.gov/directorates/somd/space-communications-navigation-program/gps/>>. Luettu 1.12.2024.

Manual Trimble Business Center v5.40 – Processing and Adjusting GNSS Survey Control Networks. 2021. Opintomateriaali. Queensland Government (Department of Transport and Main Roads).

Poutanen, Markku. 2016. Satelliittipaikannus. Helsinki: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa.

Zajdel, Radoslaw; Masoumi, Salim; Sośnica, Krzysztof; Gałdyn, Filip; Strugarek, Dariusz; Gregorz, Bury. 2023. Combination and SLR validation of IGS Repro3 orbits for ITRF2020. Journal of Geodesy. Vol. 97, s. 1-29.

Saari, Timo. Bilker-Koivula, Mirjam. Häkli, Pasi. 2023. Suomen uusi geoidimalli FIN2023N2000. Helsinki: Maanmittauslaitos.

Tolvanen, Tuukka. 2018. Representing multimodal routes in an intelligent traffic system. Diplomityö. Aalto-yliopisto. Aaltodoc-julkaisuarkisto.

Vermeer, Martin. 2020. Fysikaalinen geodesia. Helsinki: Aalto-yliopisto.

Vermeer, Martin. 2019. Geodesia: Kaiken perusta. Helsinki: Aalto-yliopisto.