

Examensarbete, Högskolan på Åland, Utbildningsprogrammet för Maskinteknik

Stabilitets- och hållfasthetsberäkningar för liten pråm

Anton Bengsén



<2025:07>

Datum för godkännande: <23.05.2025>
Handledare: Mats Åsgård

EXAMENSARBETE

Högskolan på Åland

Utbildningsprogram:	Maskinteknik
Författare:	Anton Bengsén
Arbetets namn:	Stabilitets- och hållfasthetsberäkningar för liten pråm
Handledare:	Mats Åsgård
Uppdragsgivare:	

Abstrakt
<p>Examensarbetet omfattar stabilitets- och hållfasthetsberäkningar av en pråm med längden 6,0 meter och bredden 2,6 meter. Pråmen är ett hemmabygge och i privat ägo, ändamålet är främst att transportera material, virke och fordon mellan en ö i skärgården och fastlandet. Framdrivningen av pråmen kan ske antingen med utombordsmotor eller bogserbåt. För sjösättning och upptagning finns en specialbyggd traktorvagn som man lagligt kan förflytta ekipaget med längs allmän väg.</p> <p>Syftet med beräkningarna är att bedöma den stabilitets- och hållfasthetsmässiga lastförmågan av pråmen då den lastas med en traktor som väger 3000 kg. Beräkningarna görs främst med Excel men kontrollräkningar görs och redovisas i arbetet. Verkliga krängningsprov och provtur har utförts för att bekräfta beräkningarnas riktighet.</p> <p>Slutsatsen är att skrovets hållfasthet är tillräcklig för att bära avsedd last men att stabiliteten ej är tillräcklig för att uppfylla tillämpliga klassregler. Framförande av pråmen lastad med traktorn kan på grund av detta ske endast under goda väder- och vindförhållanden.</p>

Nyckelord (sökord)
Pråm, stabilitetsberäkning, hållfasthetsberäkning

Högskolans serienummer:	ISSN:	Språk:	Sidantal:
2025:07	1458-1531	Svenska	57

Inlämningsdatum:	Presentationsdatum:	Datum för godkännande:
30.4.2025	23.5.2025	23.5.2025

DEGREE THESIS

Åland University of Applied Sciences

Degree Programme:	Bachelor of Engineering
Author:	Anton Bengsén
Title:	Stability and Strength Calculations of Small Barge
Academic Supervisor:	Mats Åsgård
Commissioned by:	

Abstract
<p>The thesis includes stability and strength calculations of a barge with a length of 6.0 meters and a width of 2.6 meters. The barge is home-built and privately owned, the purpose is primarily to transport materials, timber and vehicles between an island in the archipelago and the mainland. Propulsion of the barge can be done with either an outboard engine or a tugboat. For launching, there is a purpose-built tractor trailer with which the trailer loaded with the barge can be transported legally along public roads.</p> <p>The purpose of the calculations is to assess the stability and strength load capacity for the barge when loaded with a tractor with a mass of 3000 kg. The calculations are mainly made with Excel spreadsheet, but the validity of the result is confirmed by manual calculations that are presented in the thesis. Actual heeling and sea trials have been performed to confirm the accuracy of the calculations.</p> <p>The conclusion is that the strength of the hull is sufficient to carry the intended load, but that the stability is not sufficient to meet applicable class rules. Driving the barge loaded with the tractor can only take place in good weather and wind conditions.</p>

Keywords
Barge, stability calculation, strength calculation

Serial number:	ISSN:	Language:	Number of pages:
2025:07	1458-1531	Swedish	57

Handed in:	Date of presentation:	Approved:
30.4.2025	23.5.2025	23.5.2025

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

ORD- OCH FÖRKORTNINGSLISTA	7
FIGURFÖRTECKNING	8
TABELLFÖRTECKNING	10
1. INLEDNING	11
1.1 Bakgrund.....	11
1.2 Syfte	11
1.3 Metod	11
1.4 Avgränsningar.....	12
2. TEKNISK BESKRIVNING AV PRÅM	13
2.1 Skrov	13
2.2 Motor.....	15
2.3 Vagn.....	15
2.4 Last.....	15
3. KAJ OCH KRÄNGNINGSPROV	17
3.1 Syfte	17
3.2 Vägning av pråmen 0-trim 0-slagsida.....	17
3.3 Krängningsprov.....	18
3.3.1 Beräkning av KG baserat på krängningsprovet	20
4. HYDROSTATISKA BERÄKNINGAR.....	23
4.1 Skrovdela 1	23
4.2 Skrovdela 2	24
4.3 Skrovdela 3 och 4	25
4.4 Sammanställning.....	25
4.4.1 Yttröghetsmomentet.....	28
4.4.2 Masscentrum för lightship	28

4.4.3	Masscentrum för lastad pråm.....	29
5.	STABILITETSBERÄKNING	30
5.1	Initialstabilitet tvärskepps	30
5.1.1	Lightship	30
5.1.2	Lastad.....	32
5.2	GZ kurvor för olastad och lastad pråm	33
5.2.1	GZ för olastad pråm	34
5.3	GZ för lastad pråm	36
5.3.1	Kontrollräkning.....	38
5.4	Konstruktionsförbättringar.....	38
5.4.1	GZ för lastad pråm med traktorns däck tömda	38
5.4.2	Förbättring av GZ med höjda sidor.....	39
5.4.3	Förbättring av GZ med bredare pråm	41
5.5	Sammanfattning av stabilitetsberäkningar	42
6.	PROVTUR.....	43
6.1	Förberedelse	43
6.2	Släpprov	44
6.2.1	Släpprov med olastad pråm.....	44
6.2.2	Släpprov med lastad pråm.....	45
6.2.3	Sammanfattning av släpprov.....	47
6.3	Bränsleförbrukningstest	48
6.3.1	Sammanfattning av bränsleförbrukningstest.....	49
7.	HÅLLFASTHETSBERÄKNINGAR.....	50
7.1	Beräkning av yttröghetsmoment, böjmotstånd och dragspänning	54
	SLUTSATS	56
	KÄLL- OCH LITTERATURFÖRTECKNING	57
	BILAGA 1 – Beräkningar för skrovdel 3 och 4	

BILAGA 2 – Hydrostatisk sammanställningstabell

BILAGA 3 – Kontrollberäkningar för GZ kurva.....

BILAGA 4 – Kontrollberäkningar för hållfasthet.....

ORD- OCH FÖRKORTNINGSLISTA

Kajprov	Mätningar och prov då pråmen ligger till kaj	
LCG	Longitudinal Centre of Gravity	Longitudinellt masscentrum
TCG	Transversal Centre of Gravity	Transversellt masscentrum
VCG	Vertical Centre of Gravity	Vertikalt masscentrum
LCB	Longitudinal Centre of Buoyancy	Longitudinellt volymcentrum under vatten
TCB	Transversal Centre of Buoyancy	Transversalt volymcentrum under vatten
VCB	Vertical Centre of Buoyancy	Vertikalt volymcentrum under vatten
LWL	Length Water Line	Vattenlinjelängden
BWL	Breadth Water Line	Vattenlinjebredd
G	Centre of Mass	Tyngdpunkten/Masscentrum
B	Buoyancy centrum	Volymcentrum under vattnet
K	Keel point	Kölpunkt
D	Draft	Djupgående
GZ	Righting Arm	Rätande hävarmen
GM	Metacentric height	Metacenterhöjden
BM	Metacentric radius	Metacenterradie
C _L	Centre Line	Centerlinjen
A.P	Aft perpendicular	Aktra perpendikeln
V _s	Displacement speed	Deplacementfart
Δ	Weight displacement	Viktdeplacement
∇	Volume displacement	Volymdeplacement
α	Angle of heel	Slagsida
A	Area	Area
C _x	x-coordinate of polygon centroid	x-koordinat av polygonens mittpunkt
C _y	y-coordinate of polygon centroid	y-koordinat av polygonens mittpunkt
M	Bending moment	Böjmoment
DNV	Det Norske Veritas Classification Society	Det Norske Veritas Klassningssällskap

FIGURFÖRTECKNING

Figur 1. Fotografi av pråmen efter blästring och målning	13
Figur 2. Tvärskeppsskiss av skrovet	14
Figur 3. Longitudinell skiss av skrovet	14
Figur 4. Traktor med redskap som är ämnad att transporteras på pråmen	16
Figur 5. Krängningsprov	18
Figur 6. Krängningsprovs-skiss	19
Figur 7. Krängningsprov med last	20
Figur 8. Illustrering av punkternas läge i förhållande till skrovet för lastad pråm	22
Figur 9. Indelning av skrovet i delar för beräkning	23
Figur 10. Skrovdell 2 sedd från sidan	24
Figur 11. Förenklad skrovform för vissa beräkningar	26
Figur 12. Funktionen för hela pråmens VCB	27
Figur 13. Hela pråmens VCB	28
Figur 14. Aktervy (X-Z) olastad pråm	31
Figur 15 Aktervy (X-Z) lastad pråm	32
Figur 16. Illustrering av variablerna A, Cx och Cz	34
Figur 17. Beräknad GZ kurva för olastad pråm	35
Figur 18. Aktervy (X-Z) för 30 grader slagsida	35
Figur 19. Aktervy (X-Z) för 35 grader slagsida	36
Figur 20. GZ kurva och GM0 för lastad pråm	37
Figur 21. Aktervy (X-Z) för 20 grader slagsida	37
Figur 22. Aktervy (X-Z) för 25 grader slagsida	38
Figur 23. Jämförelse mellan traktor med fulla däck och tömda däck	39
Figur 24. GZ kurva med och utan 1,5m höga sidor	40
Figur 25. Jämförelse mellan konstruktion med och utan 1,5 m höga sidor	41
Figur 26. Jämförelse av GZ kurva för nuvarande konstruktion och 3,1 meter bred	42
Figur 27. Bogsering av olastad pråm	43
Figur 28. Bogsering i 4,3 knop	43
Figur 29. Släpprov (fotografiet taget vid 5,6 knop)	44
Figur 30. Fart och dragkraft för olastad pråm med excelgenererad kurvanpassning	45
Figur 31. Släpprov (fotografierna tagna vid 3,9 knop)	46
Figur 32. Fart och dragkraft för lastad pråm med excelgenererad kurvanpassning	47

Figur 33. Jämförelse i dragkraft.....	48
Figur 34. Karta över teststräcka (från lantmäteriverkets websida)	49
Figur 35. Maximalt tillåtet moment som funktion av längden	50
Figur 36. Krafter som verkar på skrovet och indelning för beräkning. Q är kraften som verkar mot bottenplåten minus kraften som skrovets egen tyngd utgör.	52
Figur 37. Belastningsdiagram	53
Figur 38. Tvärkraftsdiagram	53
Figur 39. Böjmomentdiagram	53
Figur 40. Tvärsektionssnitt	54

TABELLFÖRTECKNING

Tabell 1. Skrovets mått och vikter	15
Tabell 2. Vägningresultat.	17
Tabell 3. Resultat av krängningsprovet i lättvikt	19
Tabell 4. Funktionerna för skrovdela nr 3 & nr 4.....	25
Tabell 5. Volymen av alla skrovdela	26
Tabell 6. Skrovdelaernas lokala buoyancy centrum	27
Tabell 7. Skrovdelaernas momentarm från köl och aktra perpendikel	27
Tabell 8. Vikt och moment för last och pråm	29
Tabell 9. Simulering av initialstabilitet och verkligt mätresultat för olastad pråm	31
Tabell 10. Simulering av initialstabilitet och verkligt mätresultat för lastad pråm	32
Tabell 11. Släpprov för olastad pråm.....	45
Tabell 12. Släpprov för lastad pråm.....	46
Tabell 13. Bränsleförbrukningstest.....	49
Tabell 14. Viktfördelning.....	51

1. INLEDNING

1.1 Bakgrund

Hösten 2022 införskaffades en nyttillverkad hemmabyggd pråm med dimensionerna längd överallt 6,00 m bredd, 2,59 m och djup 0,65 m. Syftet med inköpet var delvis att transportera material till byggprojekt och delvis att transportera maskiner för att bedriva småskaligt skogsbruk i skärgården. Ett behov av att redogöra för pråmens lastförmåga väcktes, främst med avseende på att undvika en kapsejsning och dyra och besvärliga bärgningskostnader som följd. Författaren hade tidsmässigt i samband med detta, planer på att börja studera maskinteknik och därmed var valet av examensarbete redan självklart.

1.2 Syfte

Syftet med examensarbetet är att med hjälp av beräkningar och praktiska test bedöma vilken last och under vilka förhållanden som pråmen i praktiken är lämplig att användas samt eventuella regler som begränsar användning. Vad som är lämpligt att lastas styrs av hur stabiliteten och hållfastheten påverkas. Med avseende på stabiliteten är det fråga om att förhindra en kapsejsning och för hållfastheten är det att förhindra skador på skrovet med kapsejsning som följd. Särskilt studeras i beräkningarna lämpligheten av att lasta en viss traktor som är avsedd att transporteras med pråmen. Examensarbetet omfattar även provturer då nödvändig motorkraft och bränsleförbrukning bestäms.

1.3 Metod

Tack vare att pråmens skrovform är nästan en parallelepiped kan beräkningarna göras för hand utan inblandning av något avancerat beräkningsprogram. Ett Excelprogram används dock som hjälpmedel främst i stabilitetsberäkningarna för att stabiliteten vid olika förhållanden snabbt och enkelt skall kunna utvärderas. Hållfasthetsberäkningarna görs för hand och redovisas i arbetet. Excel och Matlab används för generering av diagram och figurer.

Pråmens sjövärdighet i verkligheten, utvärderas delvis med kaj- och krängningsprov och delvis med ett antal provturer då pråmen samt dess last bogseras varvid mätningar och observationer görs.

1.4 Avgränsningar

En fullständig redogörelse för pråmens alla egenskaper skulle vara fullt möjlig och även eftersträvansvärd men p.g.a. begränsningen till 15 studiepoäng måste avgränsningar av examensarbetet göras.

I arbetet omfattas inte beräkningar av långskeppsstabilitet eftersom det inte anses vara lika kritiskt som tvärskeppsstabiliteten med avseende på kapsejsning, förutom eventuellt vid på- och avlastning. Annat trim än 0 används inte heller i beräkningarna. Vidare så avgränsas arbetet genom att inte redovisa någon detaljritning av pråmen, det anses inte heller relevant med avseende på stabilitet och hållfasthet. En annan avgränsning i arbetet är att inga tester av pråmens egen utombordsmotor görs, av den enkla anledningen att motorn vid tillfället inte var i bruksskick. Omfattande tester görs dock med bogserbåt. Läckstabiliteten är ett annat område som förbises, inte för att det skulle vara oviktigt men som nämndes i föregående stycke så måste arbetets omfattning begränsas. Hållfasthetskapitlet omfattar endast beräkningar av longitudinellt böjmoment, yttroghetsmoment och böjmotstånd utan påverkan av vågor.

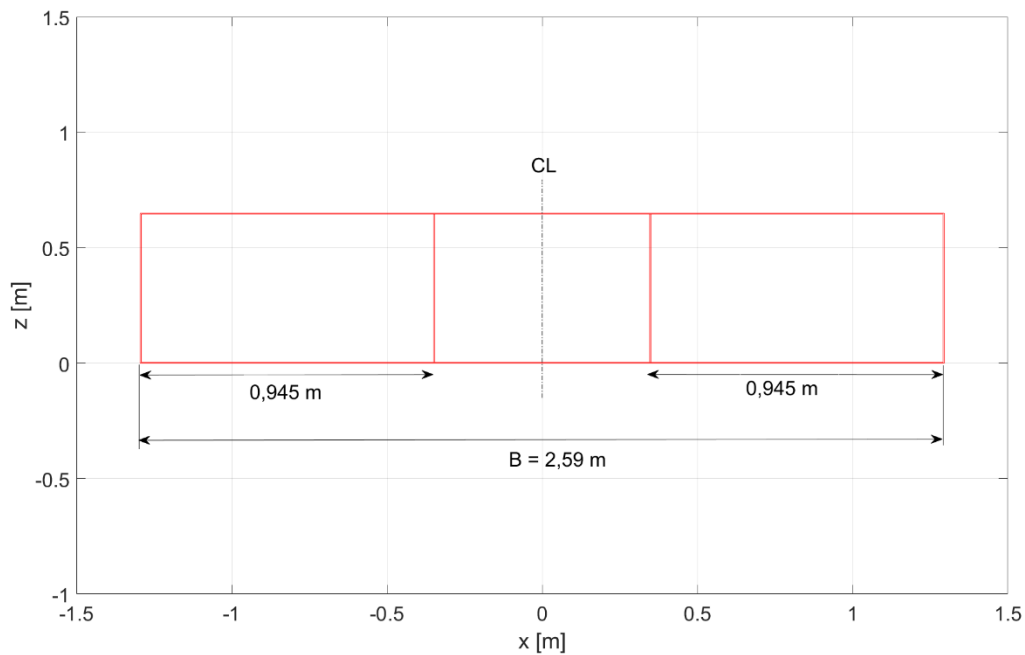
2. TEKNISK BESKRIVNING AV PRÅM



Figur 1. Fotografi av pråmen efter blästring och målning

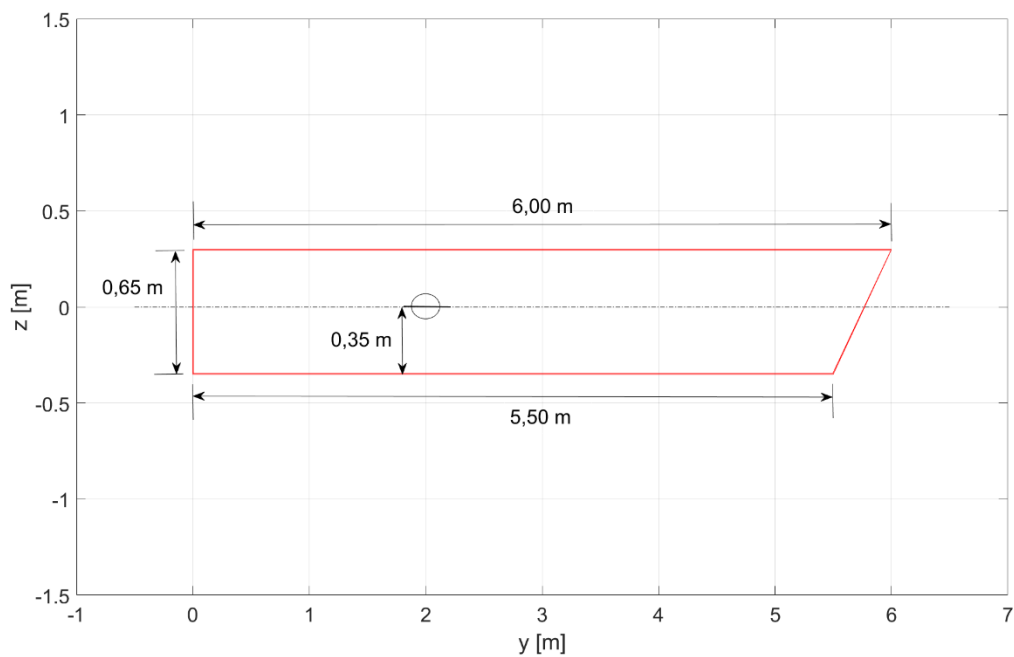
2.1 Skrov

Skrovet är helsvetsat av 4 mm stålplåt och indelat i tre longitudinellt avskilda vattentäta avdelningar (Figur 2). Bredden inklusive bordläggning är 2,59 meter för att pråmen skall vara så bred som möjligt utan att överskrida tillåten bredd för transport på allmän väg (Vägtrafiklag 729/2018). För vardera vattentät avdelning finns en tvåtumsinspektionsplugg längst akterut. Svetsningen är utförd med elektrosvets, både från insidan och utsidan av skrovet. För säkring av last finns öglor svetsade i däckets längs utsidan. För att förstyva däckets är det förstärkt underifrån med järn svetsade tvärskepps. Däckets är även försett med fastsvetsade fyrkantsjärn för att öka friktionen mellan lasten och däckets och därmed minska belastningen på spännbanden. För lastning och lossning finns två i sidled justerbara ramper i fören som manövreras med handkraft.



Figur 2. Tvärskeppsskiss av skrovet

Pråmens botten avslutas med en vinkel i fören (Figur 3) för att delvis minska på vattenmotståndet och delvis för att förenkla förtöjning i naturhamn. Bredden är även något smalare i fören. I aktern finns en vinsch med vilken man kan höja och sänka en ställning för utombordsmotor. Skrovet är blästrat och målat med ändamålsenlig färg. Däcket har sandblandad färg för att det inte skall vara halt.



Figur 3. Longitudinell skiss av skrovet

Skrovets vikt uppmättes ungefärligt till 2000 kg vid krängningsprovet och med last drygt 5000 kg (se kapitel 3). Mått och vikter sammanfattas i Tabell 1.

Tabell 1. Skrovets mått och vikter

L	6,00	m
B	2,59	m
D	0,65	m
d	0,35	m
LW	2000	kg
DW	5000	kg

2.2 Motor

Pråmen är utrustad med en Mercury 4-takts 20 hk utombordsmotor. Motorn manövreras med ratt och fjärreglage monterade på en svängbar ställning. Ett startbatteri är monterat i en batterilåda på däck.

Ifall bogserbåt används, finns kraftiga öglor i fören att förtöja bogserlinan i.

2.3 Vagn

För sjösättning och upptagning finns en tvåaxlad specialbyggd vagn med vilken man lagligt kan transportera pråmen olastad på allmän väg bakom en traktor. Hjulnaven är enligt tillverkarens specifikation konstruerade för 500 kg vardera (vid 80 km/h). Ramen till sjösättningsvagnen består av svetsade balkar i två våningar så att pråmens botten kommer upp högre än vagnens hjul. Pråmen rullar på breda och kraftiga rullar som bärs upp av kullager. Framtill på vagnen finns en vinsch för upptagning av pråmen.

2.4 Last

Förhoppningen är att man vid måttliga vind- och vågförhållanden ska kunna transportera ett traktorekipage som väger upp till 3000 kg. Traktorn som används vid beräkningarna är av märket Zetor och modell 5511 (se Figur 4). Den väger enligt uppgift 2290 kg (Zetor 5511 Instruktionsbok, n.d.). I lyftarmarna kan eventuellt en 240 kg lunningsgrip av märket Hapa tas ombord.



Figur 4. Traktor med redskap som är ämnad att transporteras på pråmen

3. KAJ OCH KRÄNGNINGSPROV

3.1 Syfte

Vid den första sjösättningen och kajprovet av pråmen bekräftas först och främst att skrovet håller tätt. Skrovet hade redan innan sjösättningen konstaterats vara ganska tätt eftersom det bildas tryck inuti skrovet då solen skiner på plåten. Demonteras inspektionspluggarna pyser övertrycket ut. En vägning av pråmen både olastad och lastad görs genom att mäta djupgående i de respektive fallen. Vidare utförs ett krängningsprov för att bestämma begynnelsemetacenterhöjden och tyngdpunktens läge i lättvikt och lastad pråm.

3.2 Vägning av pråmen 0-trim 0-slagsida

Vägningen ägde rum i en skyddad hamn där praktiskt taget vattnet var spegelblankt. Mätningen av djupgåendet gjordes med måttband på fyra olika ställen av skrovet. Ett medeltal beräknas av de fyra mätningarna för olastad och lastad pråm respektive. Resultaten sammanställs i Tabell 2. Mätningarna uppskattas ha en noggrannhet på ± 1 cm.

Tabell 2. Vägningresultat.

	Djupgående olastad (cm)	Djupgående lastad (cm)
Styrbord för	15,5	36,5
Styrbord akter	18,0	34,5
Babord för	14,0	33,0
Babord akter	12,5	36,0
Medeltal	15,0	35,0

Formeln för att beräkna volymdeplacement baserat på djupgående presenterades i tidigare kapitel. Insättning av medeldjupgåendet ger:

$$\begin{aligned} V_{\text{olastad}} &= 0,884d^2 + 14,245d = 0,884 * (0,15 \pm 0,01[m])^2 + 14,245 * (0,15 \pm 0,01[m]) \\ &= (2,15 \pm 0,14)m^3 \end{aligned}$$

För beräkning av viktdeplacement behöver vattendensiteten vara känd. P.g.a. olika salthalt på olika ställen varierar också densiteten, för norra Östersjön gäller $1,005 \text{ t/m}^3$ (Åsgård, 2013).

$$\Delta_{\text{olastad}} = 2,15 \text{ m}^3 * 1,005 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 2,16 \text{ t} = 2160 \text{ kg}$$

Motsvarande för lastad pråm

$$V_{\text{lastad}} = 0,884 * (0,35 \pm 0,01[m])^2 + 14,245 * (0,35 \pm 0,01[m]) = (5,09 \pm 0,15)m^3$$

$$\Delta_{\text{lastad}} = 5,09 \text{ m}^3 * 1,005 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 5,12 \text{ t} = 5120 \text{ kg}$$

Traktorn som lastades har i originalutförande enligt tillverkare (Zetor 5511 Instruktionsbok, n.d.) en vikt på 2290 kg men inklusive utrustning och modifikationer är vikten ett antal 100 kg högre. 3000 kg som resultatet visar är antagligen för högt men att använda det för beräkningar torde då ge en önskvärd säkerhetsmarginal.

3.3 Krängningsprov



Figur 5. Krängningsprov

För att på experimentell väg bestämma tyngdpunktens läge utförs krängningsprov (Åsgård, 2013). Med hjälp av att flytta en känd vikt en viss sträcka och därefter mäta hur stor förändring av slagsidan som uppstår kan man fastställa begynnelsemetacenterhöjden. En vikt upphängd med ett snöre i störtbågen utgjorde pendel och ett måttband fastsatt på däck användes för avläsning (Figur 5), en vikt på 95 kg förflyttades från styrbordssidan till babordssidan. Krängningsprovet utfördes på en plats i lä, därför var inverkan av vind och vågor var obetydligt, djupet var tillräckligt för att pråmen skulle kunna röra sig fritt. Som illustreras i Figur 6 kan begynnelsemetacenterhöjden beräknas med sambandet:

$$GM_0 = \frac{G_0 G_1}{\tan \varphi}$$

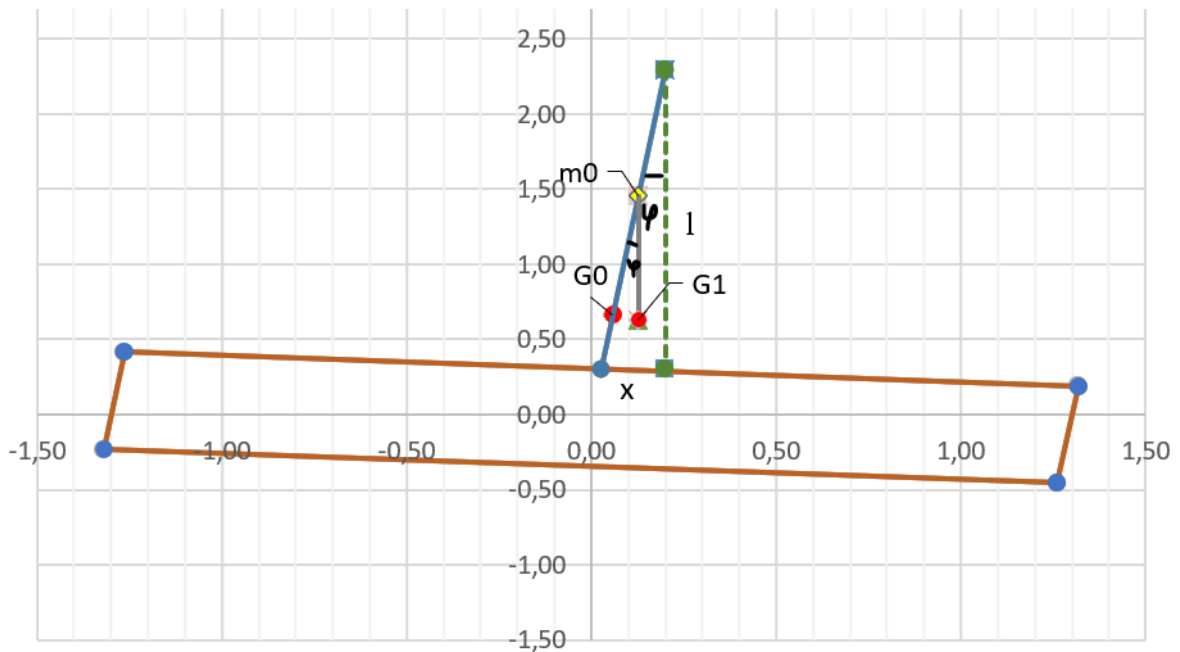
Där GM_0 är begynnelsemetacenterhöjden, $G_0 G_1$ är transversella avståndet som TCG förflyttar sig. $G_0 G_1$ kan beräknas med hjälp av förflyttningssatsen (Åsgård, 2013) d.v.s. den förflyttade viktens massa p , avståndet den flyttas d samt viktdeplacementet Δ ,

$$G_0G_1 = \frac{p * d}{\Delta}$$

Vinkeln φ illustreras i Figur 6 och dess tangent beräknas med pendelns utslag x , dividerat med pendelns längd.

$$\tan \varphi = \frac{x}{l}$$

Krängningsprov



Figur 6. Krängningsprovs-skiss

Efter ett antal mätningar konstaterades att provet ger upphov till ett utslag på 7 cm.

Tabell 3. Resultat av krängningsprovet i lättvikt

Pendelns längd:	2,00	m
Pendelns utslag:	7,00	cm
Massan som förflyttas:	95,0	kg
Längden som massan förflyttas tvärskepps:	2,60	m
Displacement	2000	Kg

Värdena insätts för att beräkna metacenterhöjden.

$$GM_0 = \frac{w * d}{\frac{x}{l} * \Delta} = \frac{95[\text{kg}] * 2,6[\text{m}]}{\frac{0,07[\text{m}]}{2[\text{m}]} * 2000[\text{kg}]} = 3,529\text{m} \approx 3,5\text{m}$$

Samma krängningsprov upprepades med en traktor lastad på däck (Figur 7).



Figur 7. Krängningsprov med last

Pendelns utslag avlästes då till 12 cm och metacenterhöjden följaktligen

$$GM_0 = \frac{w * d}{\frac{x}{l} * \Delta} = \frac{95[kg] * 2,6[m]}{\frac{0,12[m]}{2[m]} * 5000[kg]} = 0,823 m \approx 0,8 m$$

Tyngdpunkten förflyttade sig sträckan

$$G_0G_1 = \frac{p * d}{\Delta} = \frac{95[kg] * 2,6[m]}{5000 [kg]} = 0,05 m$$

3.3.1 Beräkning av KG baserat på krängningsprovet

Då metacenterhöjden är känd kan tyngdpunktens läge beräknas. Sträckan BM_0 beräknas med formeln (Åsgård, 2013):

$$BM_0 = \frac{I_x}{\nabla}$$

Där I_x är yttreghetsmoment och ∇ är volymdeplacement. I Figur 8 illustreras de olika punkternas läge.

För olastad pråm blir alltså:

$$BM_0 = \frac{8,07 [m]}{2,08[m]^3} = 3,88 m$$

På grund av skrovets fyrkantiga form är boyancy centrum ungefär vid halva djupgåendet

$$KB_0 = \frac{0,15[m]}{2} = 0,075 m$$

Sträckan från kölen till m_0 blir följaktligen:

$$KM_0 = 3,88[m] + 0,075[m] = 3,955[m]$$

GM_0 beräknades redan till

$$GM_0 = 3,529 m$$

och genom att subtrahera GM_0 från KM_0 erhålls den eftersökta KG.

$$KG = KM_0 - GM_0 = 0,43 m$$

Det måste beaktas att erhållet värde på KG inkluderar vikten på 95 kg som användes vid krängningsprovet. För att få enbart $KG_{lättevikt}$ kan formel för beräkning av masscentrum av ett system av partiklar användas (Wolfson, 2015)

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Där R är koordinaten för masscentrum, m är massa och r massans koordinat.

Vikten var ungefär 1 meter ovanför vattenytan och således på avståndet 1,2 meter från tyngdpunkten.

$$0 = \frac{2160[kg] * x + 95[kg] * 1,2[m]}{2160[kg] + 95[kg]} \Rightarrow x = -0,05 m$$

KG lättvikt blir alltså

$$KG_{lättevikt} = 0,43 [m] - 0,05[m] = 0,38[m]$$

Motsvarande beräkningar för lastad pråm ger att

$$BM_0 = \frac{8,23 [m]}{5,04[m]^3} = 1,63 m$$

$$KB_0 = \frac{0,35[m]}{2} = 0,175 m$$

$$KM_0 = 1,63[m] + 0,175[m] = 1,805[m]$$

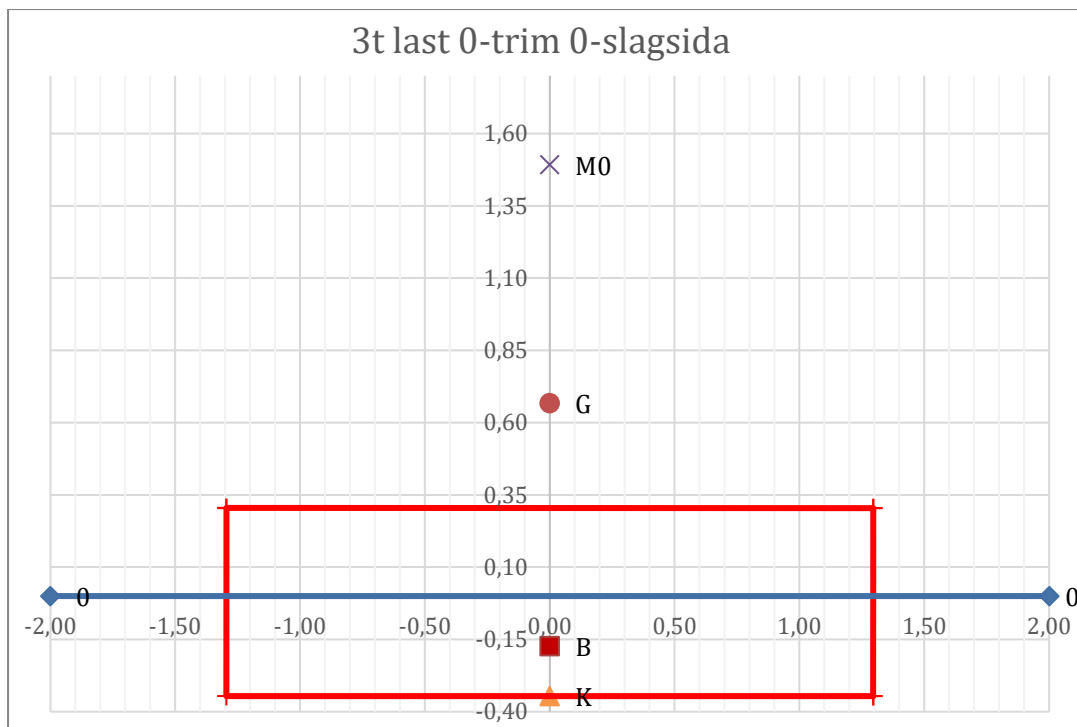
$$GM_0 = 0,835 [m]$$

$$KG = 0,97[m] \text{ inkl massa ombord}$$

$$0 = \frac{5120[kg] * x + 95[kg] * 0,68[m]}{5120[kg] + 95[kg]} \Rightarrow x = -0,02 m$$

$$KG_{lastad} = 0,97 [m] - 0,02[m] = 0,95[m]$$

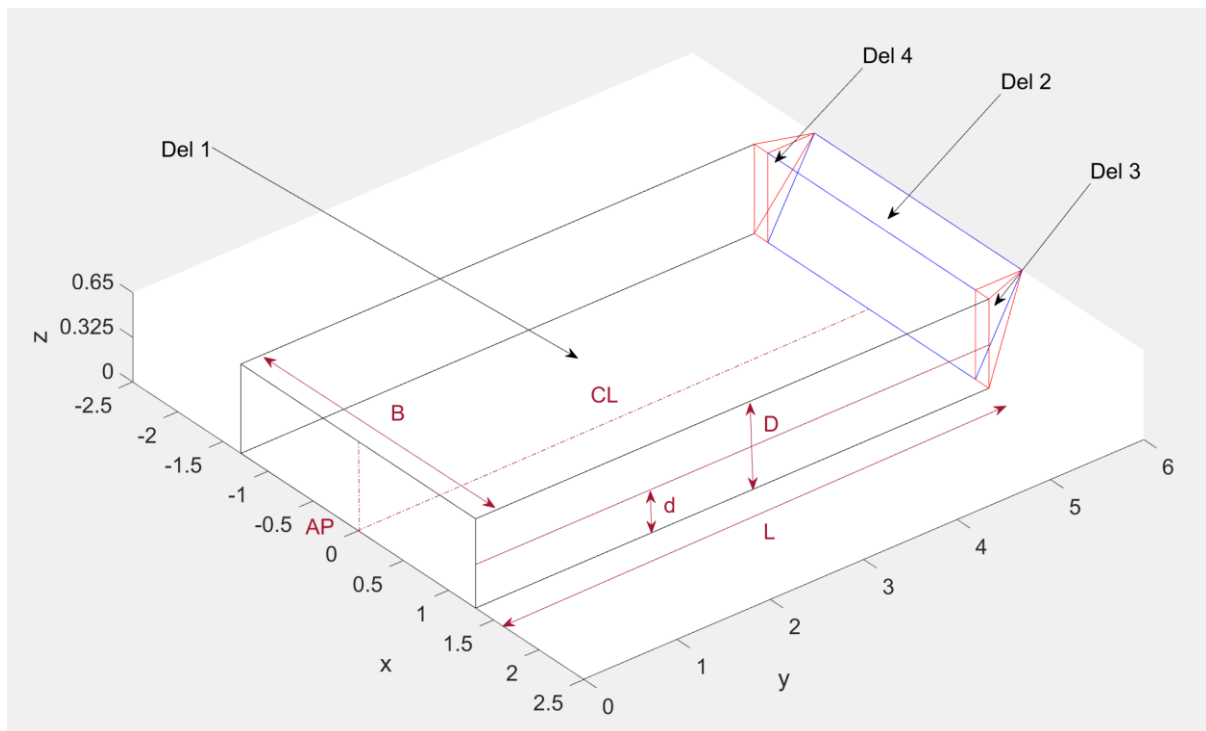
I Figur 8 illustreras punkternas läge.



Figur 8. Illustrering av punkternas läge i förhållande till skrovet för lastad pråm

4. HYDROSTATISKA BERÄKNINGAR

För att förenkla beräkningarna kan man betrakta skrovet som bestående av fyra delar (se Figur 9). Den första delen är ett rätblock som börjar ifrån aktern och sträcker sig ända fram till den del av skrovet som börjar smalna av, den här delen är avsevärt större än de andra tre och därmed dominerande för beräkningarnas resultat. Vid avsmalningen finns den näst största delen som är formad som ett triangulärt prisma. På var sida om prismet finns de sista två delarna som är formade som pyramider med rektangulär bas.



Figur 9. Indelning av skrovet i delar för beräkning

4.1 Skrovdel 1

Beräkning av buoyancy centrum för del 1 är trivialt så länge som pråmen ligger med 0-trim och 0-slagsida, vertikala center of buoyancy är helt enkelt halva djupgåendet

$$VCB_{del1} = \frac{Djupgående}{2}$$

Transversella är p.g.a. symmetri = 0,

$$TCB_{del1} = 0 \text{ m från } C_L$$

Longitudinella är halva längden av del 1,

$$LCB_{del1} = \frac{5,5[m]}{2} = 2,25 \text{ m från A.P}$$

Volymen av del 1 som är under vattenytan, d.v.s. volymdeplacement beräknas genom att multiplicera bredd, längd och djupgående. Således blir volym som funktion av djupgående:

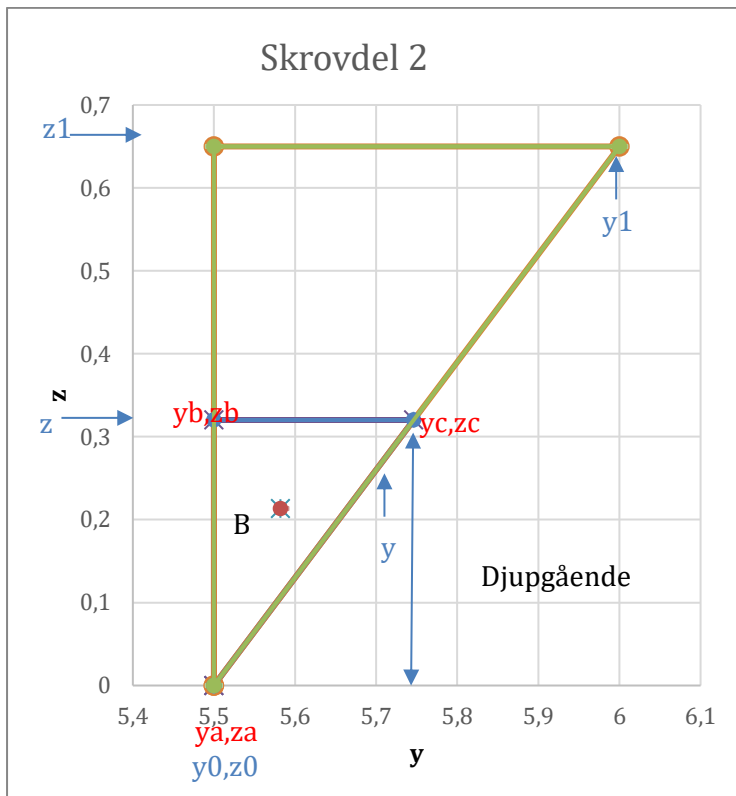
$$\nabla_{del1}(d) = 5,5[m] * 2,59[m] * d = 14,245[m^2] * d$$

Vattenlinjearean av del 1 är en rektangel och oberoende av djupgåendet, så yttroghetsmomentet beräknas med formel

$$I_{xx_{del1}} = \frac{L * B^3}{12} = \frac{5,5[m] * (2,59[m])^3}{12} = 7,96m^4 \quad (1)$$

4.2 Skrovdel 2

För del 2 behöver man först beakta djupgåendet och beräkna koordinaterna av triangeln som ligger under vattenytan (se Figur 10).



Figur 10. Skrovdel 2 sedd från sidan

Koordinaten $z =$ djupgående och y interpoleras fram:

$$y = \frac{y_0 * (z_1 - z) + y_1(z - z_0)}{z_1 - z_0}$$

Där $z_0 = 0$, $y_0 = 5,5m$, $y_1 = 6m$, $z_1 = 0,65m$. D.v.s.

$$\begin{aligned} y &= \frac{5,5[m] * (0,65[m] - d) + 6[m] * d}{0,65[m]} = \frac{3,575[m^2] - 5,5[m] * d + 6[m] * d}{0,65[m]} \\ &= 5,5[m] + 0,769d[m] \end{aligned}$$

Vattenlinjelängden för hela pråmen kan också beräknas med samma formel

$$L_{vl} = 5,5m + 0,769d \quad (2)$$

Då z och y koordinaterna är kända kan LCB och VCB beräknas med formler för beräkning av triangelprismats volymcentrum:

$$LCB_{del2} = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} = \frac{5,5[m] + 5,5[m] + 5,5[m] + 0,769d}{3} = 5,5[m] + 0,256d$$

$$VCB_{del2} = \frac{z_a + z_b + z_c}{3} = \frac{0 + djupgående + djupgående}{3} = \frac{2}{3}d$$

Eftersom del 2 också är symmetrisk kring midskepps blir TCB helt enkelt

$$TCB_{del2} = 0$$

Och volymdeplacementet för del 2 beräknas med triangelns areaformel multiplicerat med bredden.

$$V_{del2}(d) = d * \frac{0,769d}{2} * 2,3[m] = 0,88[m]d^2$$

Vattenlinjearean är en rektangel men yttröghetsmomentet är beroende av djupgåendet och beräknas enligt

$$I_{xx_{del2}}(d) = \frac{0,769d * (2,3[m])^3}{12} = 0,78[m^3] * d \quad (3)$$

4.3 Skrovdel 3 och 4

Beräkningar för del 3 och del 4 är långa och komplicerade, de finns därför i BILAGA 1.

Resultaten sammanställs här i Tabell 4

Tabell 4. Funktionerna för skrovdel nr 3 & nr 4

$VCB(d)_{del3\&4}$	$-0,0768d^2 + 0,6765d$
$LCB(d)_{del3\&4}$	$-0,1182d^2 + 0,2716d + 5,4993$
$TCB(d)_{del3}$	$0,0177d^2 - 0,0407d + 1,2251$
$TCB(d)_{del4}$	$-0,0177d^2 + 0,0407d - 1,2251$
$V(d)_{del3\&4}$	$0,0576923d^2 - 0,0295858d^3$

4.4 Sammanställning

Volymerna av de fyra skrovdelarna sammanställs i Tabell 5

Tabell 5. Volymen av alla skrovdelar

Del Nr	Volym under vatten som funktion av d	Volym hela [m ³]	Andel av hela volymen [%]
1	14,245[m ²]*d	9,25	95,8
2	0,884[m]*d ²	0,373	3,8
	0,884[m]d ² +14,245[m ²]d	9,655	100

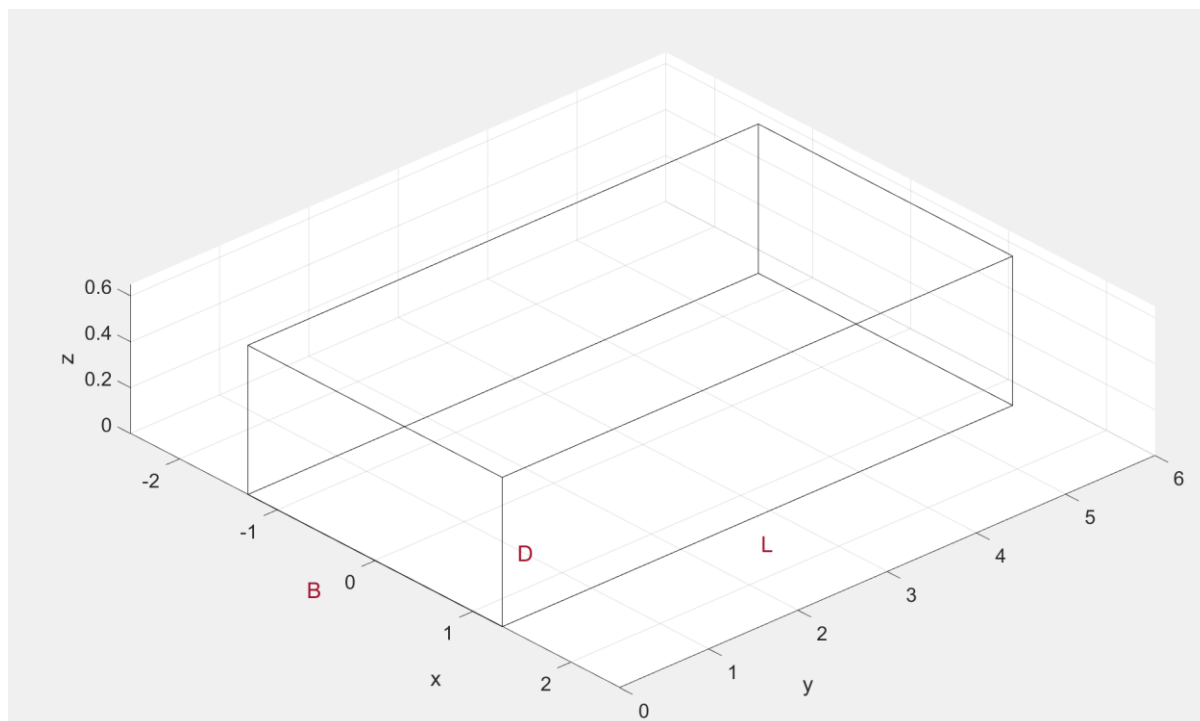
Delarna 3 och 4 står endast för 0,2 % av pråmens volym och för att förenkla beräkningarna har de därför bortsetts ifrån. Ekvation för uträkning av volymdeplacementet är således:

$$\nabla_{tot}(d) = 0,884[m]d^2 + 14,245[m^2]d \quad (4)$$

En ytterligare förenkling är att bortse från att del 2 är ett triangulärt prisma, och i stället slå ihop volymerna av del 1 och del 2 till ett enda rätblock. Längden på ett sådant ekvivalent rätblock beräknas:

$$\begin{aligned} \text{bredd} * \text{höjd} * \text{längd} &= \text{Hela volymen} \\ (2,59[m] * 0,65[m] * l[m]) &= 14,245[m^2] * 0,65[m] + 0,884[m] * (0,65[m])^2 \\ l &= \frac{14,245[m^2] * 0,65[m] + 0,884[m] * (0,65[m])^2}{2,59[m] * 0,65[m]} = 5,72[m] \end{aligned} \quad (5)$$

I Figur 11 illustreras det ekvivalenta rätblocket. Det används främst för stabilitetsberäkningar vid slagsida men även i hållfasthetskapitlet.



Figur 11. Förenklad skrovform för vissa beräkningar

Tabell 6. Skrovdelarnas lokala buoyancy centrum

Del nr	VCB(d)	TCB(d)	LCB(d)
1	d/2	0	5,5[m]/2
2	2/3*d	0	(5,5[m]+0,256d)

Tabell 7. Skrovdelarnas momentarm från köl och aktra perpendikel

Nr	VCB(d)-m = V(d)*VCB(d)	TCB(d)-m	LCB(d)-m
1	d/2*14,245[m ²]*d=7,1225[m ²]*d ²	0	5,5[m]/2*14,245[m ²]*d=39,1738[m ³]*d
2	2/3*d*0,884[m]*d ² =0,589[m]*d ³	0	(5,5[m]+0,256*d) * 0,884[m]*d ²
Totalt	0,589[m]*d ³ +7,1225[m ²]*d ²	0	0,226[m]*d ³ +4,86[m ²]*d ² +39,17[m ³]*d

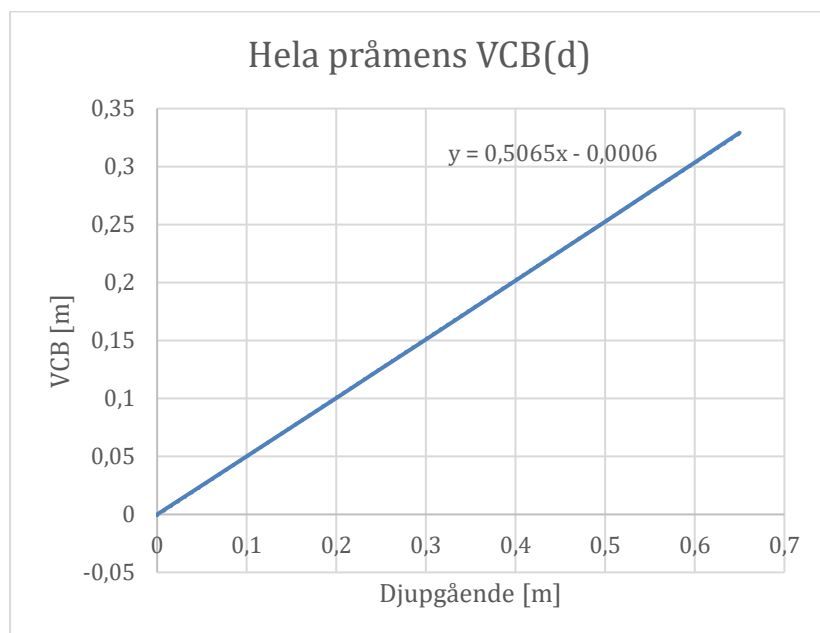
I Tabell 6 sammanställs funktionerna för buoyancy punkten och i Tabell 7 buoyancy funktionerna multiplicerat med funktionen för totala volymen. VCB och LCB beräknas med ekvation (6).

$$x = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i} \quad (6)$$

VCB för hela pråmen

$$VCB_{tot}(d) = \frac{0,589[m]d^3 + 7,1225[m^2]d^2}{0,884[m]d^2 + 14,245[m^2]d}$$

Funktionen illustreras grafiskt i Figur 7.



Figur 12. Funktionen för hela pråmens VCB

Förhållandet mellan djupgående och VCB är nästan linjärt (Figur 12) och därmed kan funktionen förenklas till

$$VCB_{tot}(d) = 0,5065d - 0,0006 \approx 0,5065d \quad (7)$$

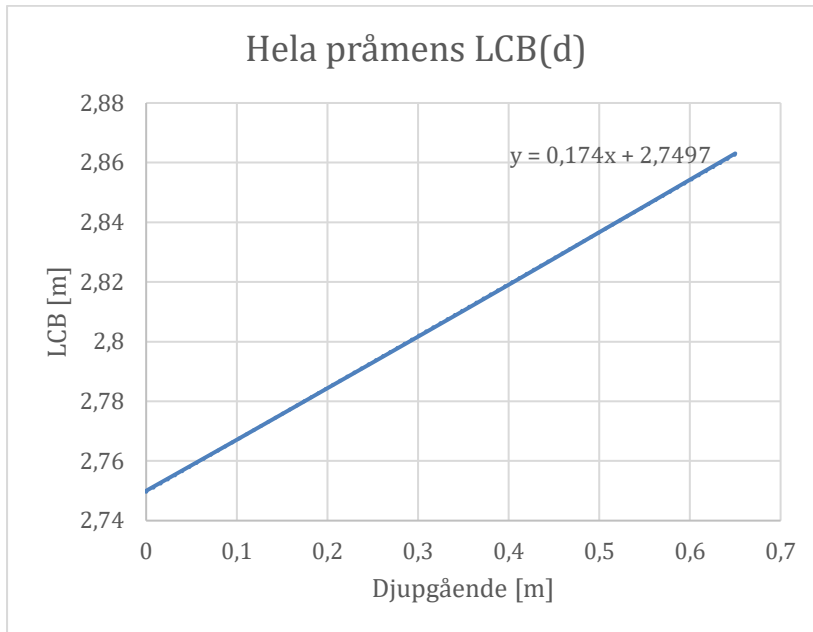
TCB för hela pråmen

$$TCB_{tot} = 0$$

LCB för hela pråmen

$$LCB_{tot} = \frac{0,226304[m]d^3 + 4,862[m^2]d^2 + 39,1738[m^3]d}{0,884[m]d^2 + 14,245[m^2]d}$$

Funktionen illustreras grafiskt i Figur 13



Figur 13. Hela pråmens VCB

Den longitudinella punkten för buoyancy centrum flyttas framåt något vid större djupgående, vilket är en följd av att fören är sluttande och därmed kommer mer volym i fören att deplaceras vartefter djupgåendet ökar.

En enklare funktion med god noggrannhet för LCB fås ur diagrammet i Figur 13.

$$LCB(d) = 0,174d + 2,75[m]$$

4.4.1 Yttröghetsmomentet

Den förenklade yttröghetsmomentfunktionen för hela pråmen är ekvation (1) adderat med ekvation (3)

$$I_{xx_{tot}}(d) = 0,78[m^3]d + 7,96[m^4] \quad (8)$$

4.4.2 Masscentrum för lightship

Skrovet är en praktiskt taget symmetrisk konstruktion tvärskepps och tyngdpunkten sätts därför

$$TCG = 0 \text{ m}$$

Långskepps borde tyngdpunkten vara något akterom mitten, eftersom det finns mera plåt och utrustning i aktern än i fören. Punkten lämnas dock obestämd här eftersom den inte används i beräkningar.

$$LCG < 3 \text{ m}$$

Från krängningsprovet erhöles att den vertikala tyngdpunkten ligger vid

$$VCG = KG = 0,38 \text{ m}$$

Solas 2008 stabilitetsregler anger att tyngdpunkten för pråmar skall placeras i höjd med däckets såvida inte en noggrann redogörelse för ett lägre KG kan visas (DNV, 2008). I det här fallet har både krängningsprov och beräkningar gjorts vilket innebär att KG = 0,38m används.

4.4.3 Masscentrum för lastad pråm

Masscentrum beräknas enligt formeln:

$$KG = \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_j}{\sum_{j=1}^n m_j} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_j}{\Delta}$$

Pråmens KG tas från krängningsprovet och traktorns tyngdpunkt antas vara ungefär vid svänghjulets mitt (0,7 m ovanför marken). Inräknat skrovets höjd blir dess KG = 1,35 m.

I tabellform blir då

Tabell 8. Vikt och moment för last och pråm

	KG [m]	Vikt [kg]		Moment [kgm]	
Traktor	1,35	2960	+	3996	+
Pråm	0,38	2160	=	821	=
		5120		4817	

Den sammanlagda tyngdpunktens läge för lastad pråm beräknas således till:

$$VCG = KG = \frac{4817 \text{ kgm}}{5120 \text{ kg}} = 0,94 \text{ m}$$

I jämförelse med KG som erhöles från krängningsprovet (0,95 m) stämmer det bra överens.

5. STABILITETSBERÄKNING

Främst används ett omfattande Excel kalkylprogram för att beräkna stabiliteten. Programmet, som kan betraktas som ett lastningsprogram eller simulator, tar i beaktande placering och vikt av varenda plåt som skrovet utgör samt däckslast och på basen av det beräknas totalvikt, metacenterhöjd, GZ kurva med mera. Programmet genererar automatiskt de figurer och GZ kurvor som redovisas i det här kapitlet. Med hjälp av mätningar från kajprov, provtur och krängningsprov justeras parametrar i programmet för att stämma överens med verkligheten. Programmet möjliggör även ändring av skrovets egenskaper såsom längd, bredd och plåttjocklek för att man skall kunna utprova och optimera pråmens design, men examensarbetet omfattar mest den befintliga pråmen och dess egenskaper. Som kontrollräkning görs och redovisas beräkningarna delvis här i kapitlet, men också i bilagor.

För farkoster kortare än 15 meter och fart lägre än 50 knop gäller ”DNV’s standard for certification No. 2.21”. Där finns tre regler relaterat till stabiliteten som är tillämpbara här, nämligen:

1. Det rätande momentet skall vara större än 0,2 vid 30 graders slagsida
2. Det största rätande momentet skall inträffa vid 25 graders slagsida eller mer
3. Det rätande momentet skall vara positivt ända upp till 50 graders slagsida

Dessa används som kriterier för att anse pråmen sjöduglig under varierande väderförhållanden. Vid lugnt väder kan man eventuellt på egen risk acceptera att kriterierna förbises något.

Vidare så specificerar DNV att fribordet inte får vara lägre än 200 mm.

5.1 Initialstabilitet tvärskepps

För beräkning av begynnelsemetacenterhöjd används formeln

$$GM_0 = BM_0 + KB - KG \quad (9)$$

där metacenterradien beräknas med

$$BM_0 = \frac{I}{\nabla} \quad (10)$$

5.1.1 Lightship

Kajprovet simuleras i programmet och resultatet jämförs med det verkliga kajprovet i Tabell 9.

Tabell 9. Simulering av initialstabilitet och verkligt mätresultat för olastad pråm

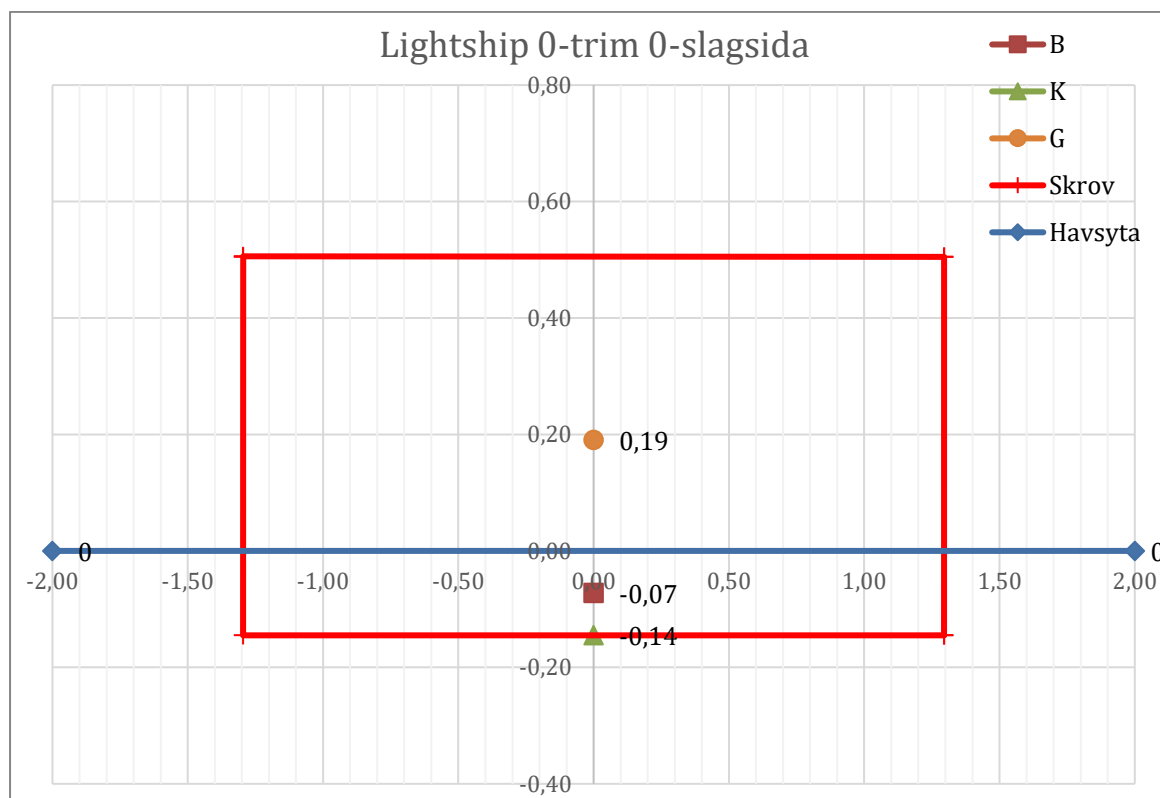
	Simulator	Kaj & krängningsprov
Totalvikt pråm	2150 kg	2160 kg
Volymdeplacement	2,08 m ³	2,15 m ³
Djupgående	0,145 m	0,15 m
Ixx	8,08 m ⁴	-
Gm0	3,59 m	3,53 m
KG	0,34 m	0,38 m

Volymdeplacementet kontrollräknas med ekvation (4)

$$\nabla_{\text{tot}}(d) = 0,884d^2 + 14,245d = 0,884 * (0,145[m])^2 + 14,245 * 0,145[m] = 2,08m^3$$

Yttröghetsmomentet kontrollräknas med ekvation (8)

$$Ixx_{\text{tot}}(d) = 0,78d[m^3] + 7,96[m^4] = 0,78 * 0,145[m] * [m^3] + 7,96[m^4] = 8,07m^4$$



Figur 14. Aktervy (X-Z) olastad pråm

$$VCB(0,145[m]) = K_b = 0,5065d = 0,5065 * 0,145[m] = 0,073 m$$

Först beräknas metacenterradien BM_0

$$BM_o = \frac{I}{\nabla} = \frac{8,07m^4}{2,08m^3} = 3,88 m$$

Och sedan metacenterhöjden

$$GM_o = BM_o + KB - KG = BM_o + KB - VCG = 3,88 m + 0,073 m - 0,35 m = 3,6 m$$

5.1.2 Lastad

Kajprovet simuleras i programmet och resultatet jämförs med det verkliga provet i Tabell 10.

Tabell 10. Simulering av initialstabilitet och verkligt mätresultat för lastad pråm

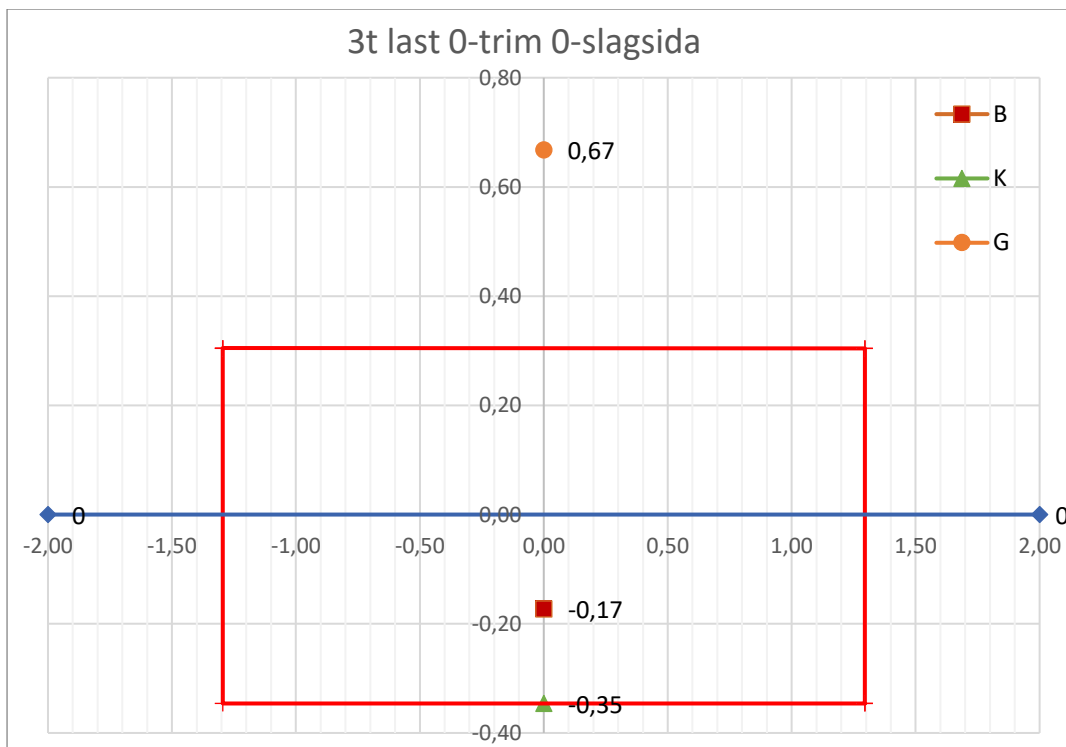
	Simulator	Kaj & krängningsprov
Totalvikt pråm + last	5150 kg	5120 kg
Volymdeplacement	5,05 m ³	5,09 m ³
Djupgående	0,346 m	0,35 m
Ixx	8,23 m ⁴	-
Gm0	0,79 m	0,82 m
KG	1,01 m	0,95 m

Volymdeplacementet kontrollräknas med ekvation (4)

$$\begin{aligned}\nabla_{tot}(d) &= 0,884[m]d^2 + 14,245[m^2]d \\ &= 0,884[m] * (0,3463[m])^2 + 14,245[m^2] * 0,3463[m] = 5,04m^3\end{aligned}$$

Yttröghetsmomentet kontrollräknas med ekvation (8)

$$Ixx_{tot}(d) = 0,78d[m^3] + 7,96[m^4] = 0,78 * 0,346[m] * [m^3] + 7,96[m^4] = 8,23m^4$$



Figur 15 Aktervy (X-Z) lastad pråm

$$VCB(d) = K_b = 0,5065d = 0,5065 * 0,346[m] = 0,175[m]$$

På samma sätt som för olastad pråm beräknas metacenterradien

$$BM_o = \frac{I}{\nabla} = \frac{8,23m^4}{5,04m^3} = 1,63m$$

och metacenterhöjden

$$GM_o = BM_o + KB - KG = BM_o + KB - VCG = 1,63m + 0,175m - 0,97m = 0,835 m$$

5.2 GZ kurvor för olastad och lastad pråm

För beräkning av GZ kurvorna används det ekvivalenta rätblocket från kapitel 4, Figur 11.

Tack vare den förenklade skrovformen kan en tvådimensionell beräkning av skrovets genomskärning i XZ-led användas. Genomskärningen är identisk med akterplåten (rektangulär med måtten skrovbredd*skrovhöjd). Tyngdpunkten G beräknas enligt principen i tidigare kapitel men för bestämning av punkten Z används en omfattande matematisk algoritm.

Akterplåten roteras med hjälp av trigonometri runt origo från 0 till 70 grader och koordinaterna för dess hörn bestäms med 5 graders intervall, även punkterna G och K roteras på samma sätt. Volymdeplacementet för varje intervall beräknas och djupgåendet justeras därefter för att vikt och displacement skall vara samma oberoende av slagsidan. Den del av akterplåten som ligger under vattenytan kommer vid slagsida att bestå av en oregelbunden polygon, och dess geometriska mittpunkt har följaktligen samma XZ-koordinater som punkten B. Hörnen av polygonen där vattenlinjen skär akterplåten beräknas fram genom interpolering. Beräkning av mittpunkten åstadkommes med formlerna (11) och (12). Formulerna är tillämpbara på godtyckliga slutna polygoner som inte har linjer mellan punkter som korsar sig själva. (Bourke, 1988)

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i) \quad (11)$$

C_x avser x-koordinaten för mittpunkten

$$C_z = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + z_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i) \quad (12)$$

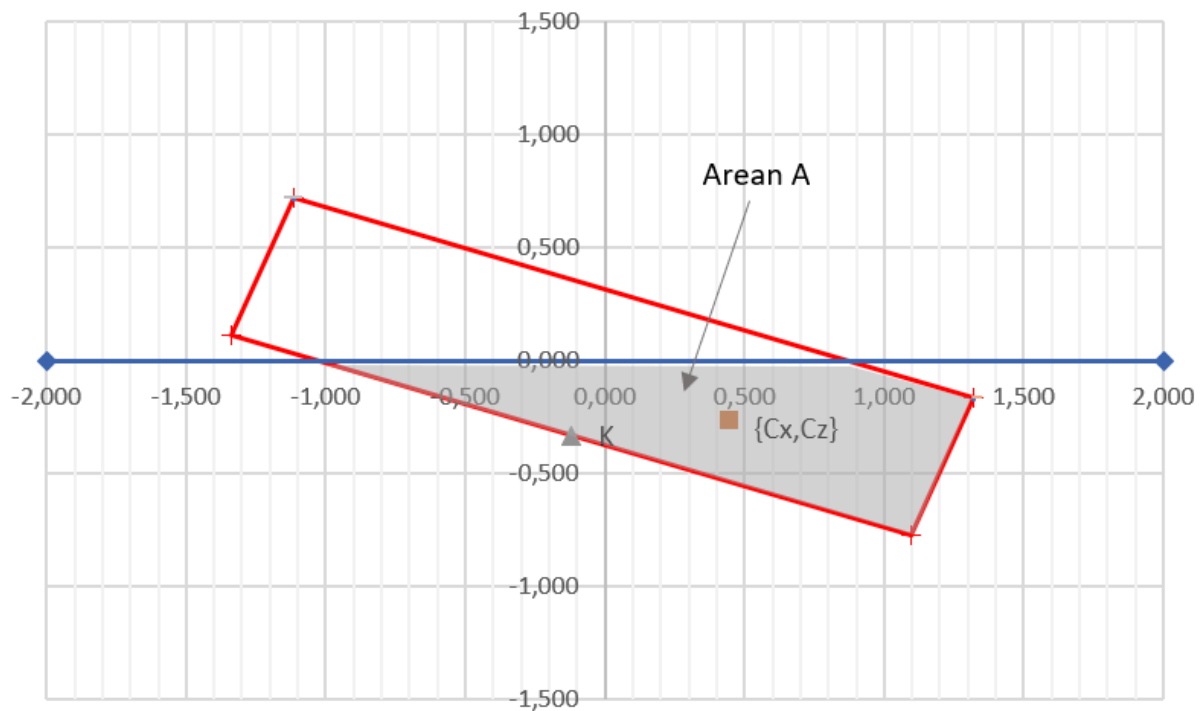
C_z avser z-koordinaten för mittpunkten

Där A är den av polygonen inneslutna arean och beräknas med koordinatareaformeln (13)

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i) \quad (13)$$

I Figur 16 illustreras vad C_x , C_z och A avser, buoyancy punktens koordinater utgörs av C_x och C_z .

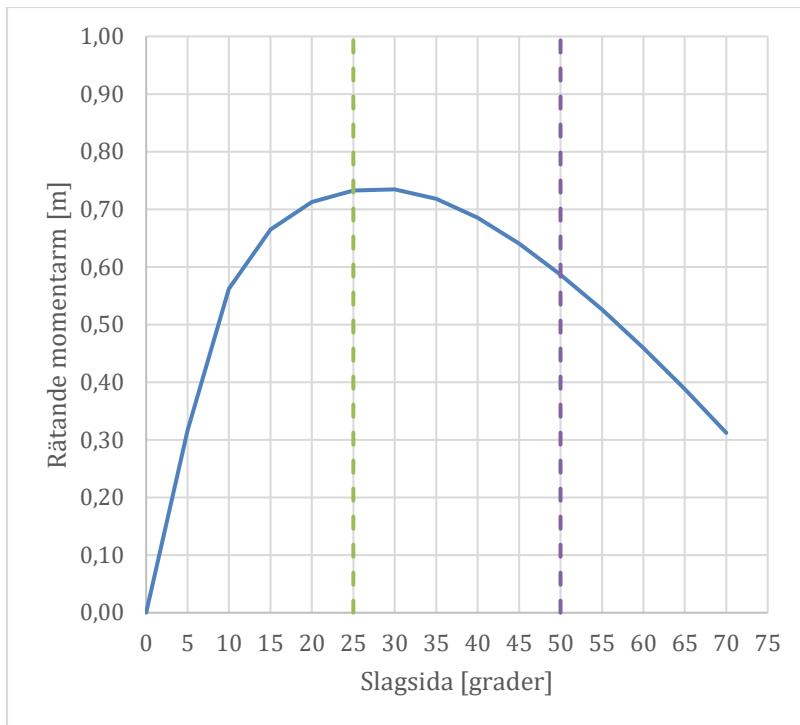
Då mittpunkten av polygonen är bestämd kan punkten Z enkelt beräknas eftersom den har samma z-koordinat som punkten G och samma x-koordinat som punkten B.



Figur 16. Illustrering av variablerna A, Cx och Cz

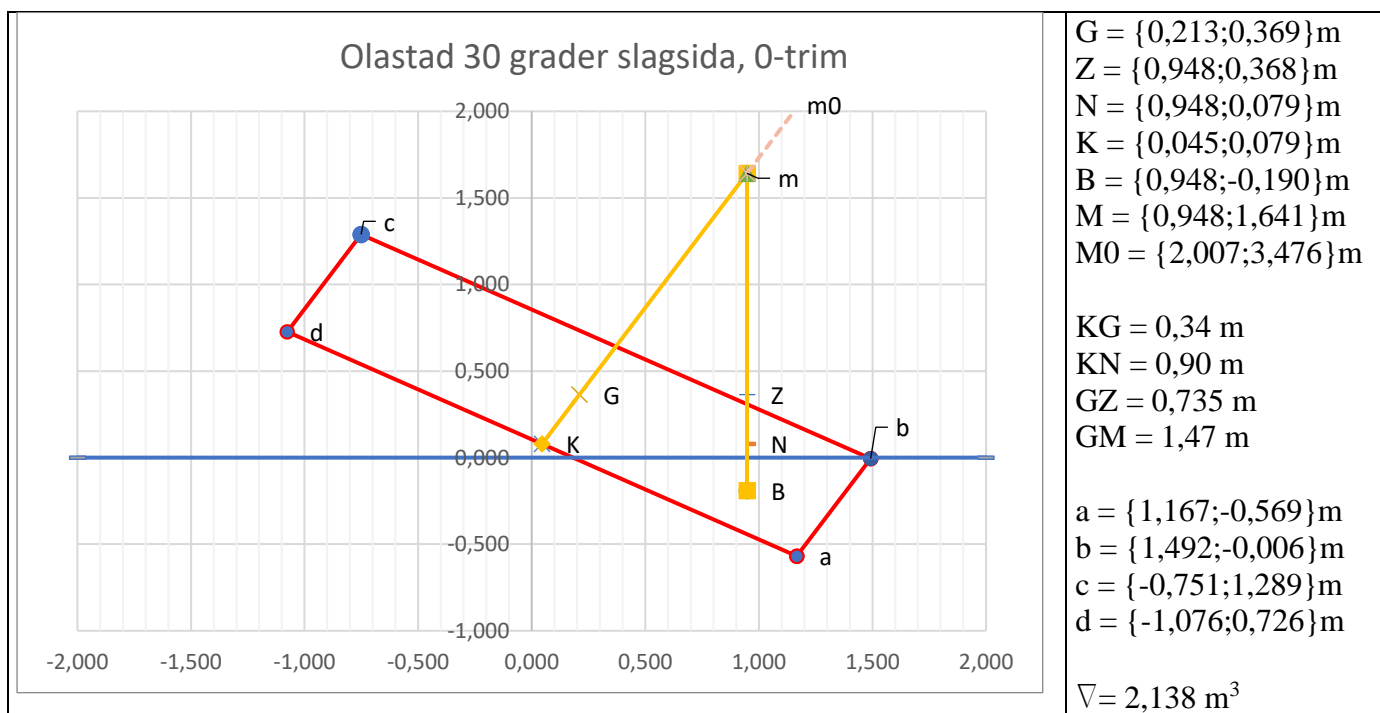
5.2.1 GZ för olastad pråm

GZ kurvan som erhålls för olastad pråm ses i Beräkнад GZ kurva Figur 17 nedan. Den största rätande armen ser ut att inträffa mellan 25 och 35 grader.

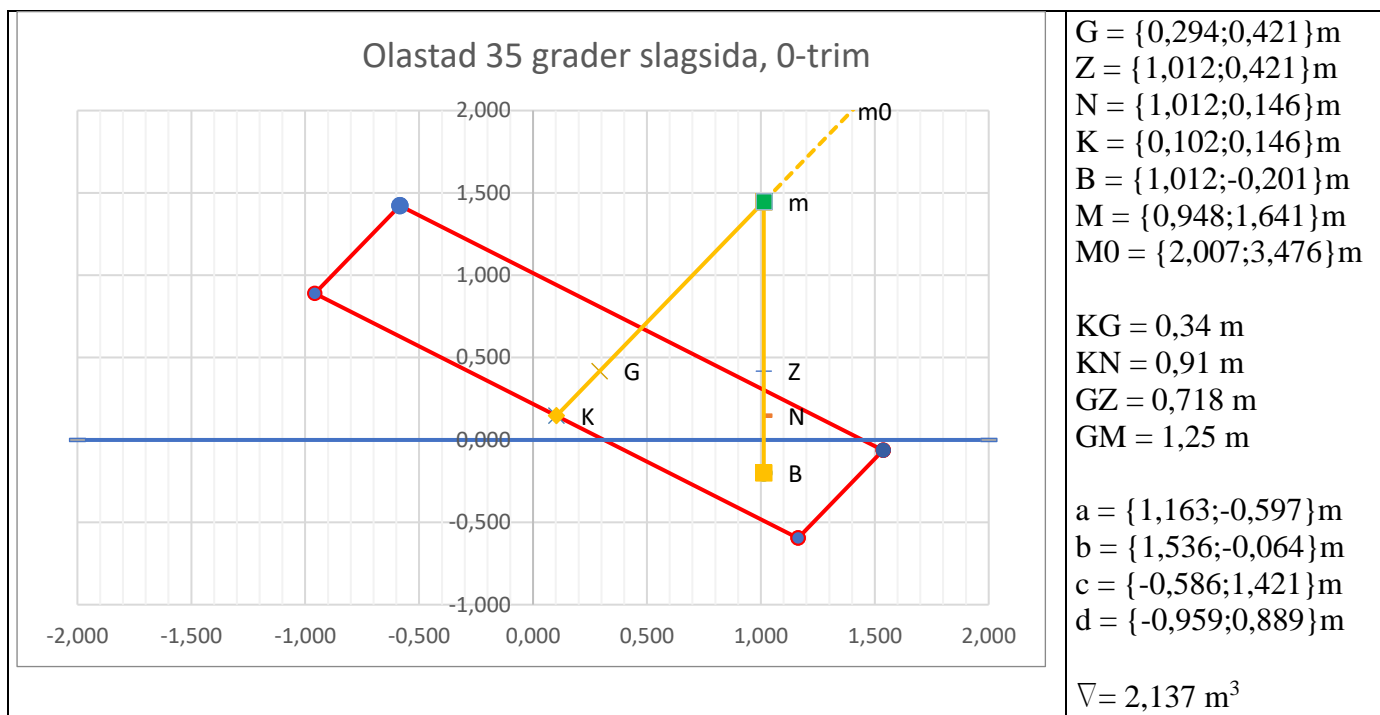


Figur 17. Beräknad GZ kurva för olastad pråm

Vad som sker mellan 30 och 35 graders slagsida kan med hjälp av programmet analyseras i närmare detalj. I Figur 18 ser man att vattenlinjen är vid däcksnivå men i Figur 19 börjar vatten komma över däck. Det är förklaringen till att det rätande momentet börjar avta vid större slagsida. I figurerna kan man avläsa de olika punkternas koordinater som masscentrum, buoyancy centrum med mera.



Figur 18. Aktervy (X-Z) för 30 grader slagsida



Figur 19. Aktervy ($X-Z$) för 35 grader slagsida

5.2.1.1 Kontrollräkning

Koordinaterna som Excel programmet har beräknat (Figur 18 och Figur 19) kontrollräknas för hand och redovisas i Bilaga 3.

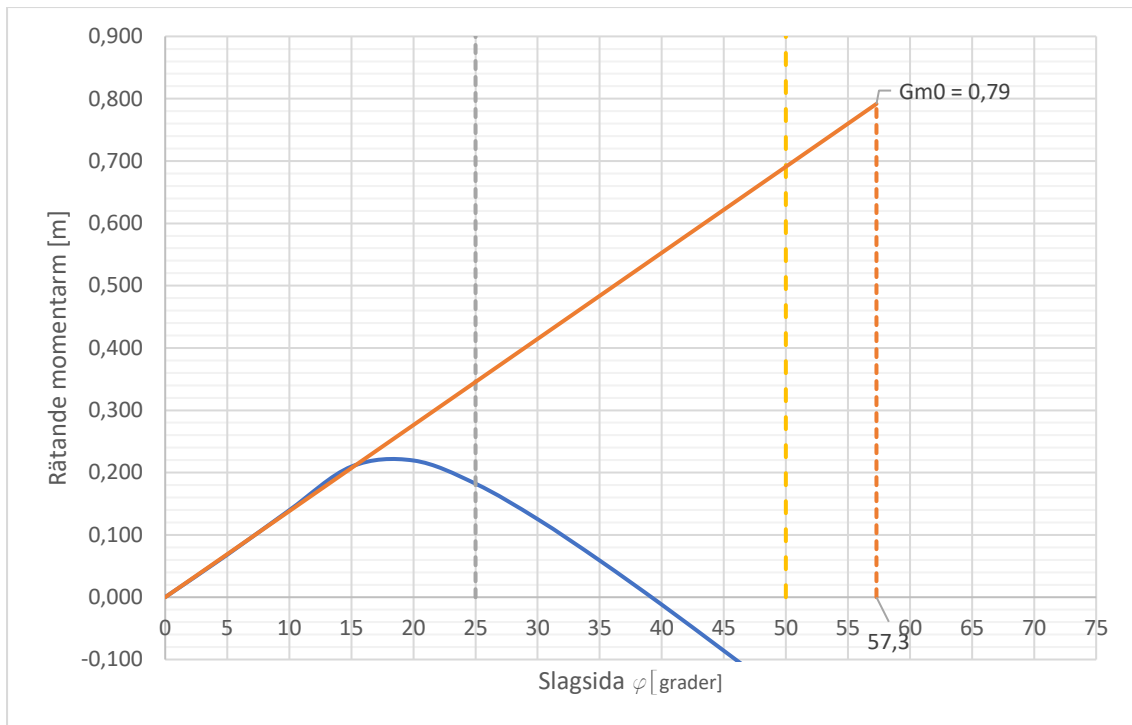
5.3 GZ för lastad pråm

Den GZ kurva som Excel programmet beräknat för lastad pråm illustreras i Figur 20.

Samtliga 3 stabilitetsregler uppfylls inte.

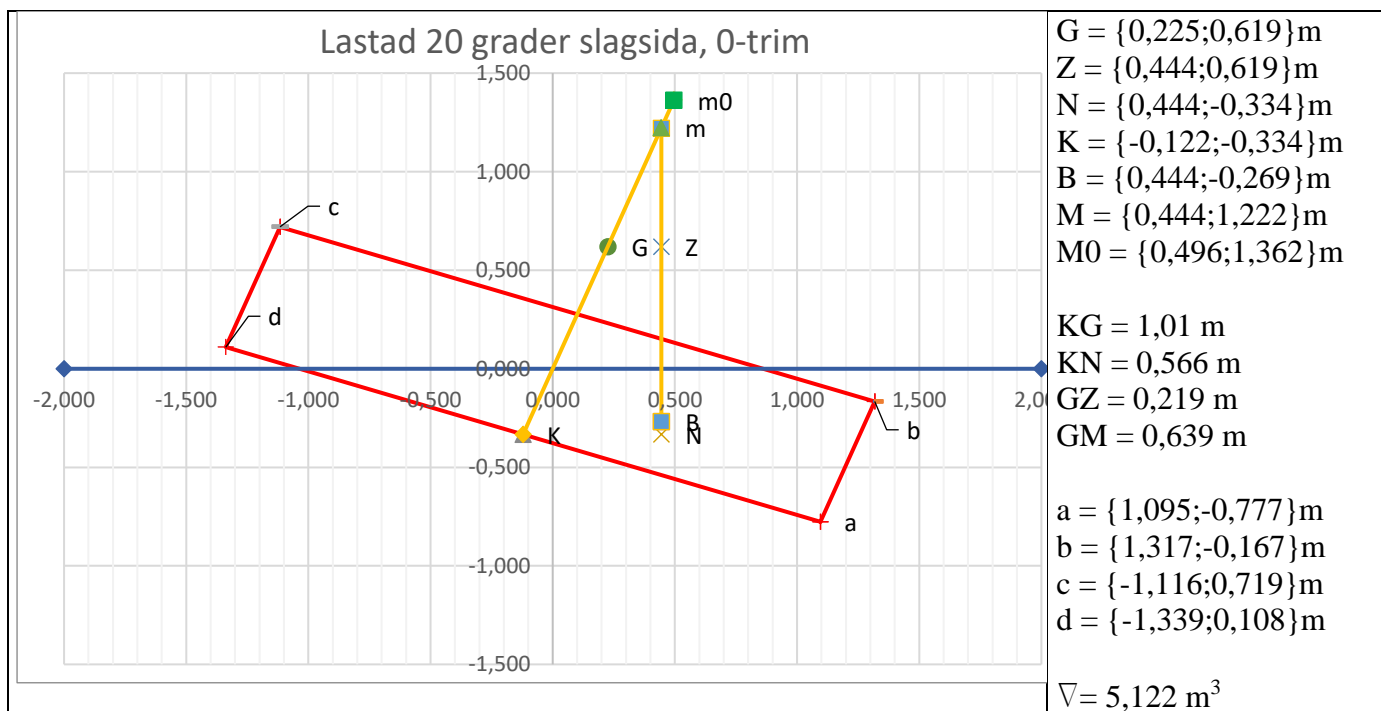
- Toppen av GZ kurvan inträffar ungefär vid 20 grader då den borde vara vid 25 grader eller högre.
- Rätande momentarmen borde vara större än 0,2 vid 30 grader, är ungefär 0,11.
- Rätande momentarmen borde vara positivt upp till 50 grader men blir negativt redan före 40 grader.

Figur 20 illustrerar också hur begynnelsemetacenterhöjden kan avläsas från GZ kurvan. Från linjen som börjar från origo och tangerar GZ kurvan kan GM_0 avläsas vid 57,3 grader.

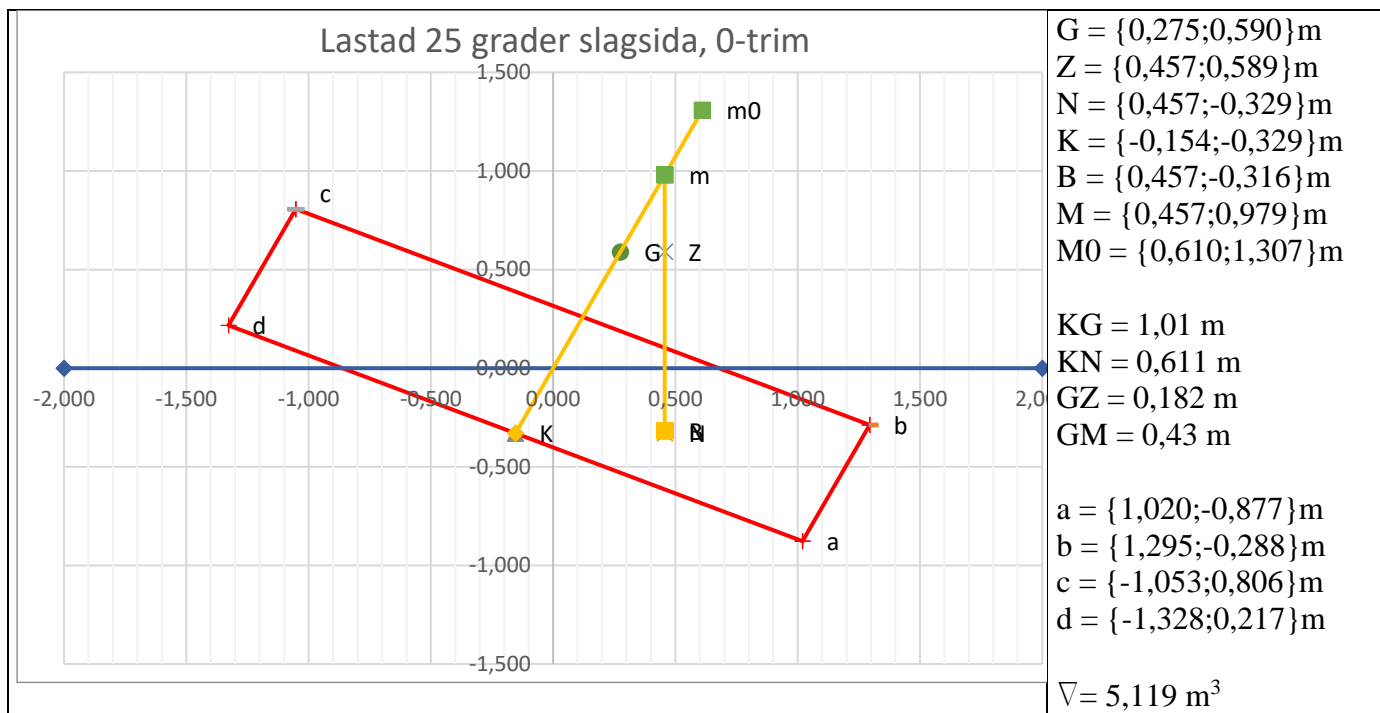


Figur 20. GZ kurva och GM0 för lastad pråm

Kontrollräkningar görs på samma sätt som för det olastade fallet men nu studeras 20 och 25 graders slagsida (Figur 21 och Figur 22). Redan före 20 graders slagsida har vatten börjat komma upp över däckets men GZ är som störst vid 20 graders slagsida ändå, enligt beräkningarna.



Figur 21. Aktervy (X-Z) för 20 grader slagsida



Figur 22. Aktervy (X-Z) för 25 grader slagsida

5.3.1 Kontrollräkning

Kontrollräkning av punkterna finns i bilaga 3.

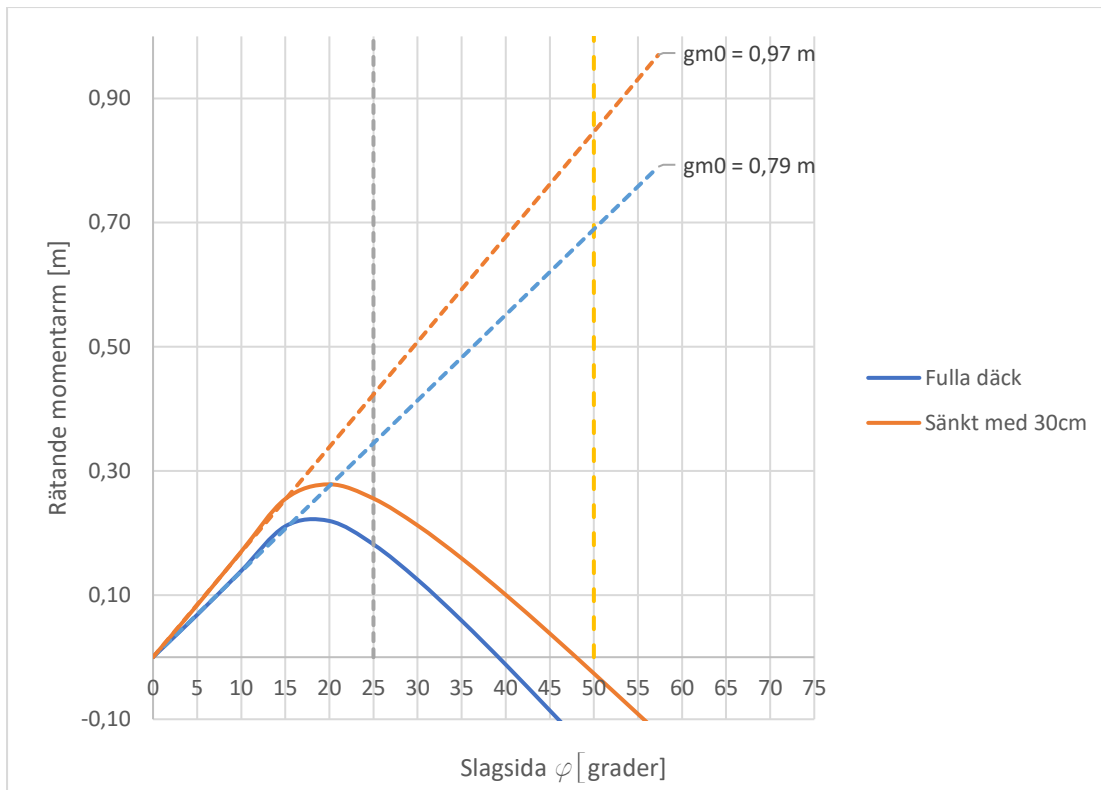
5.4 Konstruktionsförbättringar

Eftersom stabilitetsreglerna inte uppfylldes används programmet för att utreda tre olika konstruktionsförbättringar som skulle kunna förbättra stabiliteten. De konstruktionsförbättringarna som studeras är:

- Sänkning av tyngdpunkten genom att tömma luften ur traktorns däck
- Bygga till 1,5m höga sidor runt däck
- Breddning av pråmen

5.4.1 GZ för lastad pråm med traktorns däck tömda

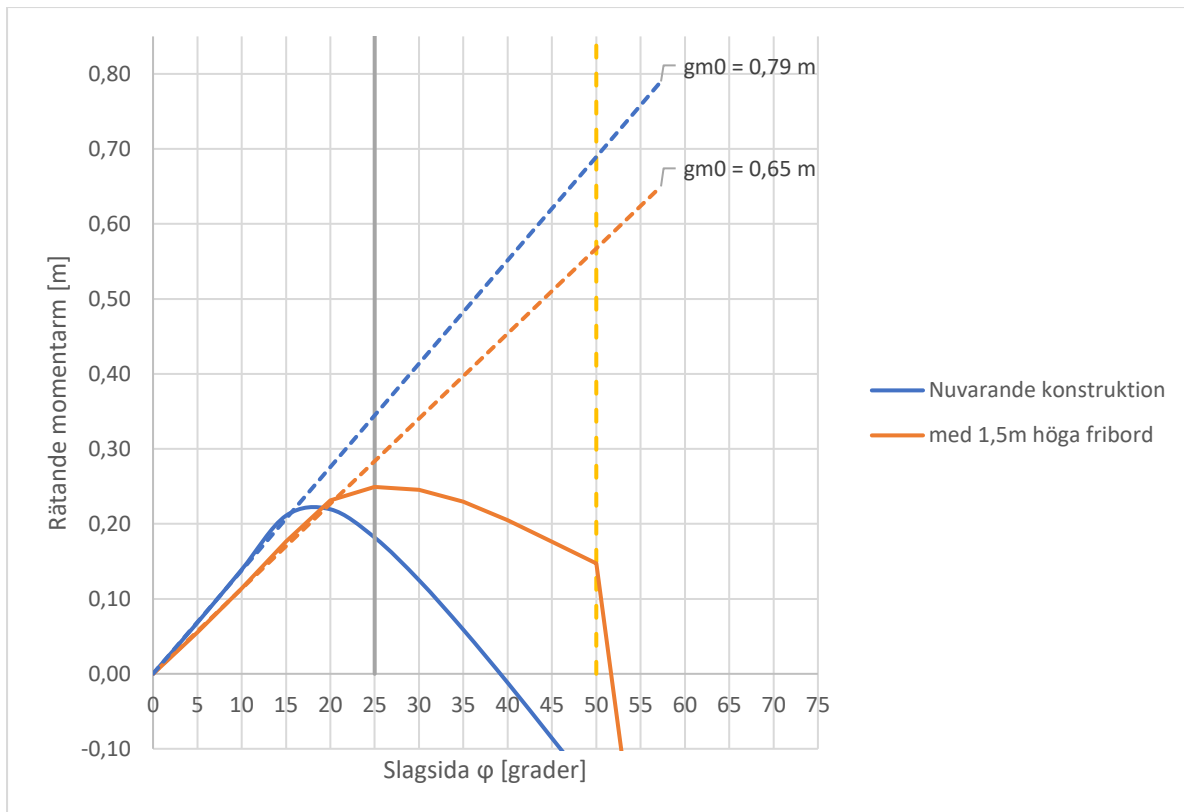
En icke oväsentlig sänkning av tyngdpunkten är möjlig genom att släppa ut luften ur traktorns däck. Bakdäcken har 30 cm under fälgens underkant och framdäcken 15 cm. Ifall man demonterar framdäcken och sänker bakdäcken med 30 cm så sjunker tyngdpunkten följaktligen med nästan 30 cm. I Figur 23 jämförs GZ kurvan för traktor med och utan tömda däck. Man kan konstatera att stabiliteten förbättras avsevärt om tyngdpunkten sänks med 30 cm. DNV regel 2 uppfylls och regel 3 uppfylls nästan. Regel 1 påverkas inte eftersom den slagsida vid vilken vatten börjar komma över däck inte verkar vara beroende av tyngdpunktens höjdläge.



Figur 23. Jämförelse mellan traktor med fulla däck och tömda däck

5.4.2 Förbättring av GZ med höjda sidor

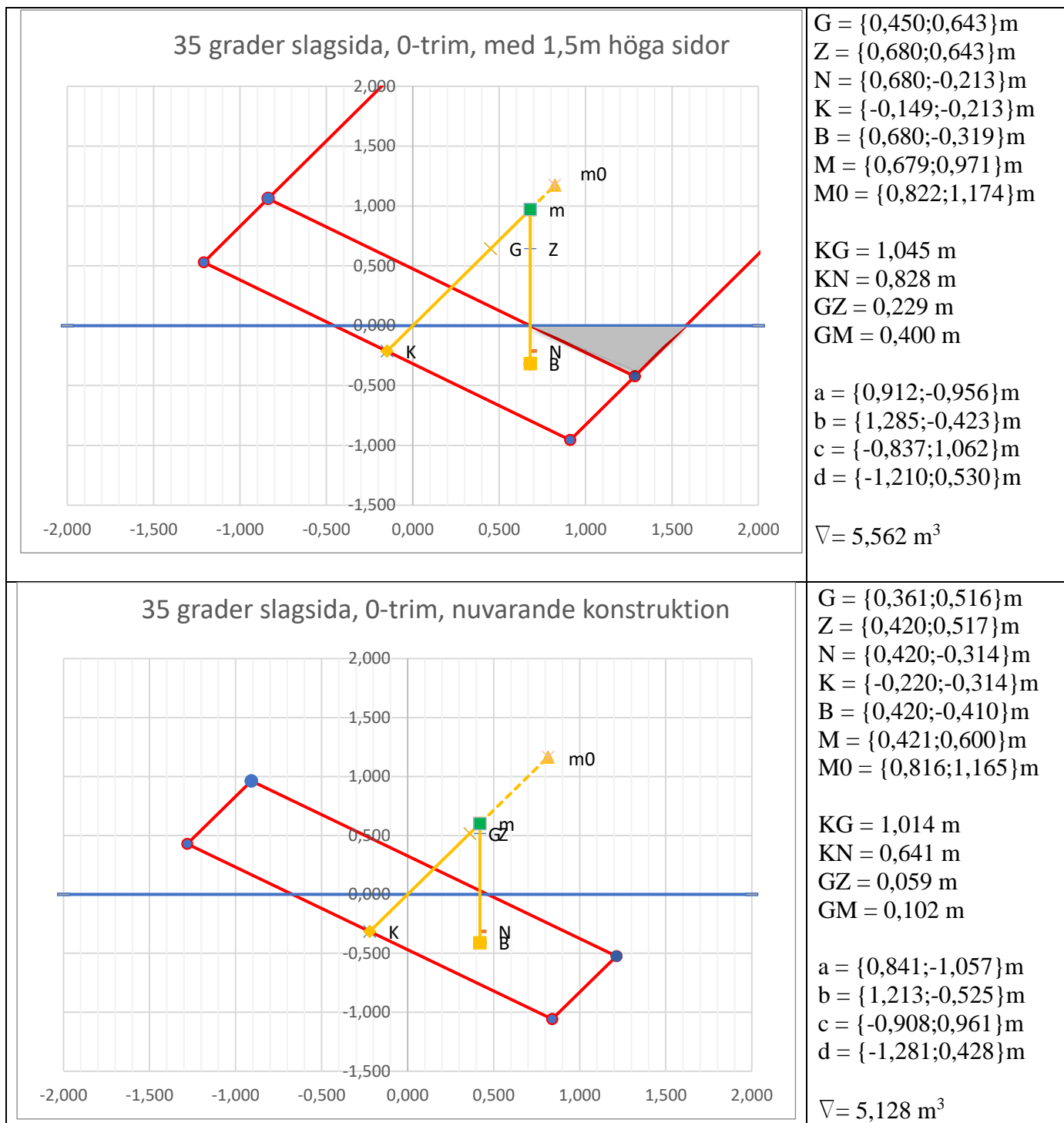
Som konstaterades i tidigare delkapitel kunde DNV's regel nr 1 ej uppnås genom att förflytta tyngdpunkten. Dock genom att tillsätta 1,5 m höga sidor runt hela däckets så kan teoretiskt alla tre regler uppfyllas (se Figur 24). I erhållen GZ kurva är även tagit i beaktande att dessa extra förhöjda sidor skulle väga 500 kg och den ökade tyngdens inverkan på tyngdpunkt och displacement. P.g.a. den ökade vikten innebär tillsättning av sidorna en sänkning av begynnelsemetacenterhöjden från 0,79 m till 0,65 m.



Figur 24. GZ kurva med och utan 1,5m höga sidor

I Figur 25 jämförs konstruktionen med och utan 1,5 m sidorna. Trots det högre displacementet har konstruktionen med sidorna betydligt högre rätande momentarm vid 35 graders slagsida, detta tack vare den extra "triangel" med deplacerande volym (fylld med grå färg i figuren).

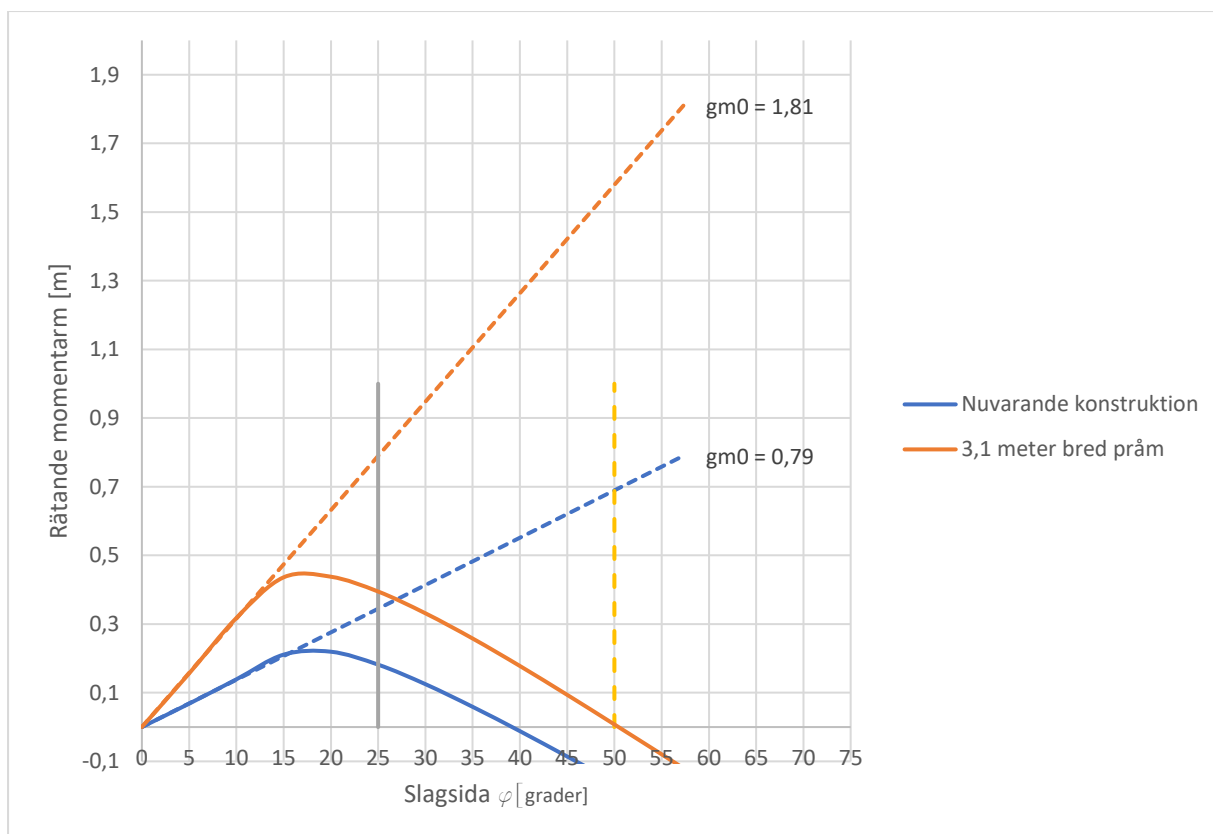
För att idén ska fungera behöver sidorna vara vattentäta runt hela däckets men även möjligheten att lasta och lossa traktorn måste beaktas. Eventuellt skulle det kunna fungera med en nedfällbar port i fören med lämplig tätning runt dess kanter.



Figur 25. Jämförelse mellan konstruktion med och utan 1,5 m höga sidor

5.4.3 Förbättring av GZ med bredare pråm

Ifall pråmens dimensioner i övrigt behålls men bredden utökas till 3,1 m skulle stabiliteten förbättras avsevärt, se Figur 26. Trots detta uppfylls inte stabilitetsregel nr. 1, d.v.s. att toppen på GZ kurvan ska inträffa vid en slagsida högre än 25 grader. Som konstaterades i kapitel 2 skulle också breddning av pråmen försvåra transport på allmän väg.



Figur 26. Jämförelse av GZ kurva för nuvarande konstruktion och 3,1 meter bred

5.5 Sammanfattning av stabilitetsberäkningar

Olastad har pråmen mycket god stabilitet och kan framföras till sjöss vid hårda vind- och vågförhållanden utan att kapsejsa. Skulle den ändå kapsejsa så sjunker den inte, tack vare att den är vattentät (i kantrat läge försvåras dock framkomligheten i grund skärgård p.g.a. störtbågens inverkan på djupgåendet).

I lastat läge, med avsett fordon, har beräkningarna visat att stabilitetskriterier ej uppfylls, inte ens då tyngdpunkten sänks genom att släppa ut luft ur däcken. Det är dock inte långt ifrån att stabilitetskriterierna uppfylls och begynnelsemetacenterhöjden är helt acceptabel. Om man ändå tar risken att framföra ekipaget till sjöss, bör det ske under mycket goda väderförhållanden. Man bör undvika att personer vistas på pråmen så att en eventuell kantring ej orsakar personskador.

6. PROVTUR

6.1 Förberedelse

Sjöprovets syfte är förutom att bedöma allmän sjövärdighet och manöverförmåga att bestämma erforderlig släpeffekt och bränsleförbrukning vid bogsering.



Figur 27. Bogsering av olastad pråm

En 23 fot lång glasfiberbåt med akterhytt och inombordsmotor av märket Botnia Marin och modell Botnia 23 användes som bogserbåt. Den är försedd med en 30 hästkrafters 3-cylindrig förkammardiesel inombordsmotor av märket Perkins och modell Perama M30. Motorn har ett maximalt varvtal på 3600 rpm. Propellern har en diameter på 15 tum och en stigning på 12 ¼ tum. Pråmen bogserades med ett ungefär 7 meter långt rep, se Figur 27 och Figur 28.



Figur 28. Bogsering i 4,3 knop

6.2 Släpprov

Släpprov utfördes i lastat och olastat läge för att bestämma erforderlig dragkraft vid olika farter och därigenom beräkna släpeffekten. För mätning av dragkraften användes en jaktvåg med max vikt på 200 kg. Vågen är graderad i kg, vilket är ett mått på massa och inte kraft, i fortsättningen då benämningen dragkraft används och enheten kg avses den kraft i Newton som tyngdkraften verkar på motsvarande massa i kg, d.v.s.

$$F[N] = m[kg]g \left[\frac{m}{s^2} \right] = m[kg] * 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Provet utfördes inomskärs vid lugnt väder- och vindförhållande. Farten (fart över grund) uppmättes med GPS navigator. Släpeffekten beräknas med formeln

$$P_e = F * v$$

Där P_e är släpeffekten, F är dragkraften och v är hastigheten.

6.2.1 Släpprov med olastad pråm



Figur 29. Släpprov (fotografiet taget vid 5,6 knop)

Tabell 11. Släpprov för olastad pråm

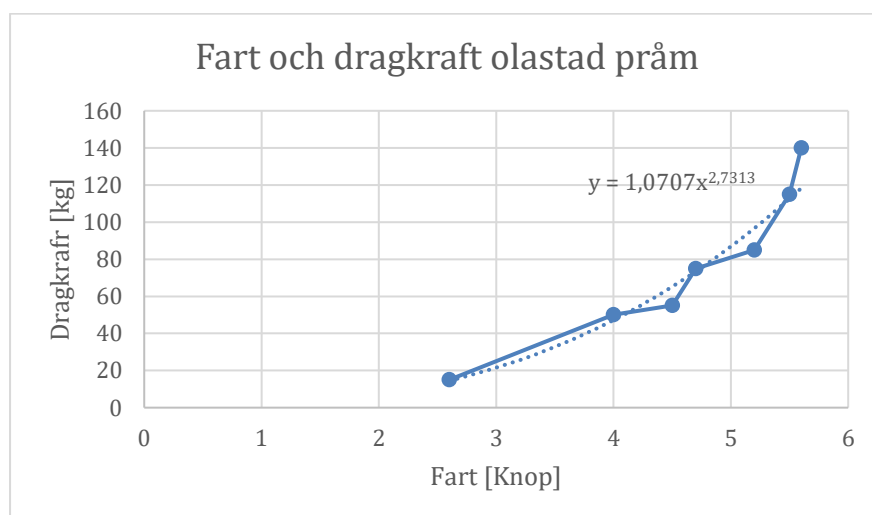
Motorvarvtal (1/min)	fart [knop]	fart [m/s]	dragkraft [kg]	dragkraft[N]	Släpeffekt [kW]
1000	2,6	1,33	15	147	0,20
1800	4,0	2,06	50	490	1,01
2000	4,5	2,32	60	588	1,36
2200	4,7	2,42	80	784	1,90
2400	5,2	2,68	90	882	2,36
2600	5,5	2,83	120	1176	3,33
2800	5,6	2,88	140	1372	3,95
3000	Motorn orkar inte				

Kraften som krävs för att framföra ett deplacerande fartyg med en fart lägre än deplacementfarten är proportionell mot farten i tredje potens.

$$F \sim v^3$$

Då farten närmar sig deplacementfarten ökas potensen till 6 eller 7 (Johnson, 1982).

I Figur 30 illustreras mätpunkterna i ett diagram. Excel föreslår en trendkurva med potensen 2,7, vilket med beaktande av bristen på noggrannheten i mätvärdena kan antas vara tillräckligt nära 3 för att resultatet skall kunna anses överensstämja med teorin.



Figur 30. Fart och dragkraft för olastad pråm med excelgenererad kurvanpassning

6.2.2 Släpprov med lastad pråm

Släpprovet upprepades med traktorn lastad ombord, se Figur 31.



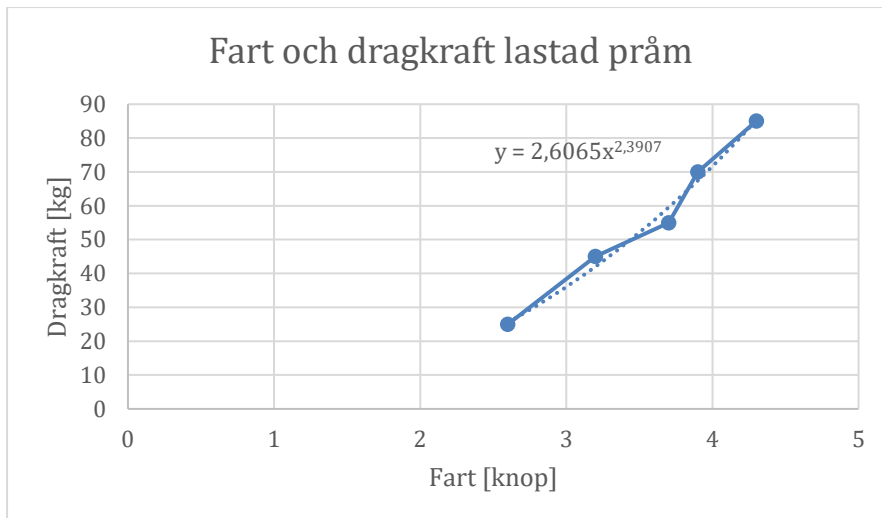
Figur 31. Släpprov (fotografierna tagna vid 3,9 knop)

Vid ungefär 4,3 knops fart började fören dyka under vattenytan och testet avbröts därför. De övriga mätvärdena sammanställs i Tabell 12.

Tabell 12. Släpprov för lastad pråm

Varvtal [1/min]	Fart [knop]	Fart [m/s]	Dragkraft [kg]	Dragkraft [N]	Släpeffekt [kW]
1200	2,6	1,34	25	245	0,33
1600	3,2	1,65	45	441	0,73
1800	3,7	1,90	55	539	1,02
2000	3,9	2,01	70	686	1,38
2200	4,3	2,21	85	833	1,84
2400	Pråmens för börjar dyka				

I Figur 32 illustreras sambandet mellan dragkraft och fart. I det här fallet passar en trendlinje med potensen 2,4.



Figur 32. Fart och dragkraft för lastad pråm med excelgenererad kurvanpassning.

6.2.3 Sammanfattning av släpprov

Från diagrammet i Figur 30 kan konstateras att dragkraften börjar öka kraftigt vid en fart på över 5,5 knop. Detta förklaras med att displacementfarten uppnås (Johnson, 1982).

Displacementfarten är beroende av vattenlinjelängden som beräknas med ekvation (2)

$$L_{vl} = 5,5m + 0,769d = 5,62m$$

Displacementfarten beräknas

$$V_s = 2,427 * \sqrt{5,62} = 5,75 \text{ knop} \quad (14)$$

Den högsta farten som uppmättes var 5,6 knop och displacementfarten är beräknad till 5,75 knop. Eventuellt skulle skillnaden kunna förklaras med att bogserbåtens propellerström gör att displacementfart uppnås redan före 5,75 knop. Oavsett så visar provet att bogserbåten har mer än tillräcklig motorstyrka för att bogsera pråmen då den är olastad.

Resultat av släpprovet med pråmen lastad med traktorn illustreras i Figur 32, dessvärre kunde inte en fart högre än 4,3 knop uppnås p.g.a. att fören började dyka under vattenytan. Flyttning av bogseringspunkten neråt eller körning med pråmens egen utombordare kan eventuellt förbättra problemet. Jämförs resultatet för olastad pråm kan man konstatera att dragkraften som behövs är ungefär 50 % större för lastad pråm.

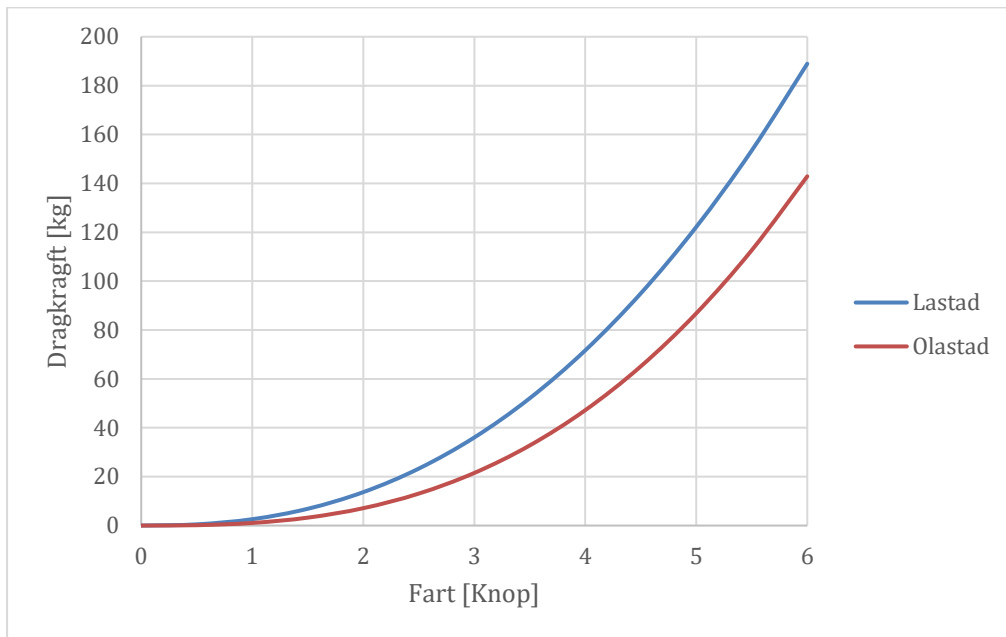
Jämförelse görs vid 4,0 knop. för olastad pråm är dragkraften då 50 kg, för lastad pråm interpoleras kraften fram:

$$\begin{aligned} R_{lastad_4kn} &= \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{70[kg](4,3[kn] - 4[kn]) + 85[kg](4[kn] - 3,9[kn])}{4,3[kn] - 3,9[kn]} \approx 74kg \end{aligned}$$

Och skillnaden i %

$$\frac{74[\text{kg}]}{50[\text{kg}]} \approx 150\%$$

I Figur 33 illustreras skillnaden i dragkraft i ett diagram.



Figur 33. Jämförelse i dragkraft

Skillnaden är märkbar men bogserbåtens motorstyrka är fortfarande alldeles tillräcklig för ändamålet. Hur vind påverkar dragkraften har varken testats eller beräknats men som konstaterades i stabilitetskapitlet bör man av stabilitetsskäl ändå undvika att använda pråmen då det blåser.

6.3 Bränsleförbrukningstest

Bränsleförbrukningstestet ägde rum mellan Kaldnäsbodarna och Klobbskäret i Närpes skärgård. Vid testets inledande var det nästan vindstilla men vid den sista provkörningen tilltog sydlig vind och vågförhållanden en aning.



Figur 34. Karta över teststräcka (från lantmäteriverkets webbsida)

Som Figur 34 illustrerar är sträckan ungefär 6,5 km eller 3,5 sjömil. Sammanlagt fyra testkörningar gjordes varav den andra och fjärde kan jämföras för att beräkna hur farten påverkar bränsleförbrukningen, eftersom båda är i nordlig riktning men den ena görs vid högre motorvarvtal och fart. I Tabell 13 presenteras resultaten av mätningarna.

Tabell 13. Bränsleförbrukningstest

Körning nr och riktning	Avgång [kl]	Ankomst [kl]	Tid [min]	Medelfart [knop]	Motorvarvtal [v/min]	Bränsleförbrukning		
						Total [l]	[l/nm]	[l/h]
1 syd	10:15	11:05	50	4,2	2000	2,0	0,57	2,4
2 nord	11:15	11:54	39	5,4	2500	2,1	0,6	3,23
3 syd	12:48	13:40	52	4,1	2000	2,0	0,57	2,4
4 nord	15:55	16:40	45	4,7	2000	1,7	0,48	2,3

6.3.1 Sammanfattning av bränsleförbrukningstest

Om man beräknar kostnaden för en enkel resa med olastad pråm på 3,5 nm med ett dieselpriis på 2 € så erhålls kostnaden:

$$\begin{aligned} \text{Kostnad}[\text{€}] &= \text{Bränsleförbrukning per sjömil} * \text{sträckan} * \text{bränslepris} \\ &= \frac{0,55 \pm 0,05l}{nm} * 3,5nm * 2\text{€} = 3,85 \pm 0,35\text{€} \end{aligned}$$

Inget bränsleförbrukningstest gjordes för lastad pråm, men eftersom släpprovet visat att skillnaden i dragkraft är 50 % så bör skillnad i bränsleförbrukning för samma fart vara i samma storleksordning.

7. HÅLLFASTHETSBERÄKNINGAR

I DNVs regler för små farkoster finns specificerat regler för maximalt tillåtet böjmoment. Maximalt longitudinellt böjmoment för farkoster som opererar endast i displacementläge beräknas med formeln:

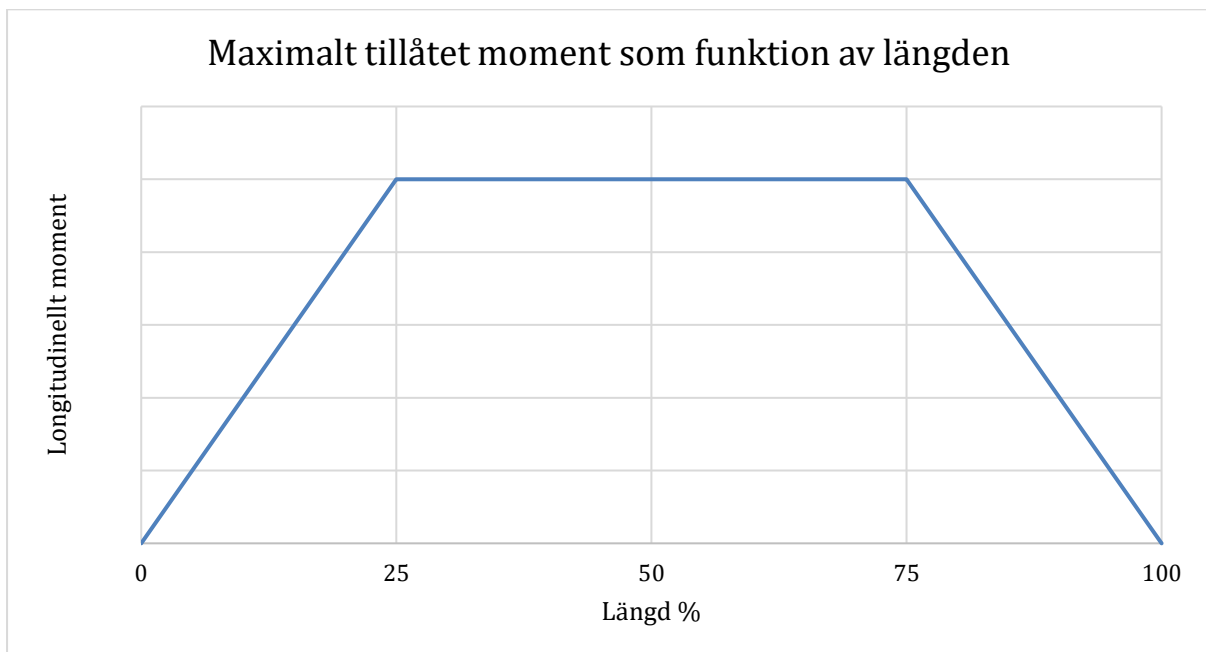
$$M = 0,016 * (L_{WL})^3 * B_{WL} \text{ (kNm)}$$

Med $L_{WL} = 6 \text{ m}$ och $B_{WL} = 2,59 \text{ m}$ blir

$$M = 0,016 * (6\text{m})^3 * (2,59\text{m}) = 8,95 \text{ kNm}$$

Men enligt reglerna skall under inga omständigheter det maximala longitudinella momentet beräknas vara lägre än 100 kNm. Eftersom det beräknade 8,95 kNm är mycket mindre än 100 kNm används 100 kNm som maxvärde.

Det maximala longitudinella momentet skall appliceras på den mittersta sektionen i längskeppsled med linjär avtagning från och med 25 % av längden mot för och akter av farkosten (se Figur 35).



Figur 35. Maximalt tillåtet moment som funktion av längden

Samma last som användes i tidigare kapitel används även för hållfasthetsberäkningarna och för att förenkla beräkningarna används också den förenklade skrovformen från kapitel 4. Djupgåendet är 0,35 m och displacementet 5000 kg. Vattentrycket ger följaktligen upphov till en sammanlagd kraft mot bottenplåten som är lika med pråmen och lastens sammanlagda tyngd, d.v.s. displacementet * tyngdaccelerationen.

$$F_{vatten} = (m_{pråm} + m_{last})g = 5000[\text{kg}] * 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 49,05[\text{kN}]$$

Något förenklat antas skrovets egen tyngd vara jämnt fördelat längs skrovets bottenplåt, den är av storleken

$$F = m_{pr\ddot{a}m} * g = 2000[kg] * 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right] = 19,62[kN]$$

Således blir kraften Q i Figur 36:

$$Q = 49,05[kN] - 19,62[kN] = 29,43[kN]$$

Traktorns vikt ger upphov till en kraft delvis vid bakaxeln och dels vid framaxeln.

Tryckfördelningen är okänd men baserat på erfarenhet från sjöprovet uppskattas att fördelningen procentuellt är 60% bak och 40% fram. Axelavståndet är 2,26 m. Traktorn lastas så att långskeppstyngdpunkten blir i mitten. För att beräkna var traktorn skall lastas används ekvationen:

$$LCG = \frac{m * 40\% * y_{framaxel} + m * 60\% * (y_{framaxel} + 2,26[m])}{m} = \frac{5,72[m]}{2}$$

m är traktorns massa och y är långskeppskoordinat. Löses ekvationen med avseende på y fås att

$$y_{framaxel} = 1,504[m]$$

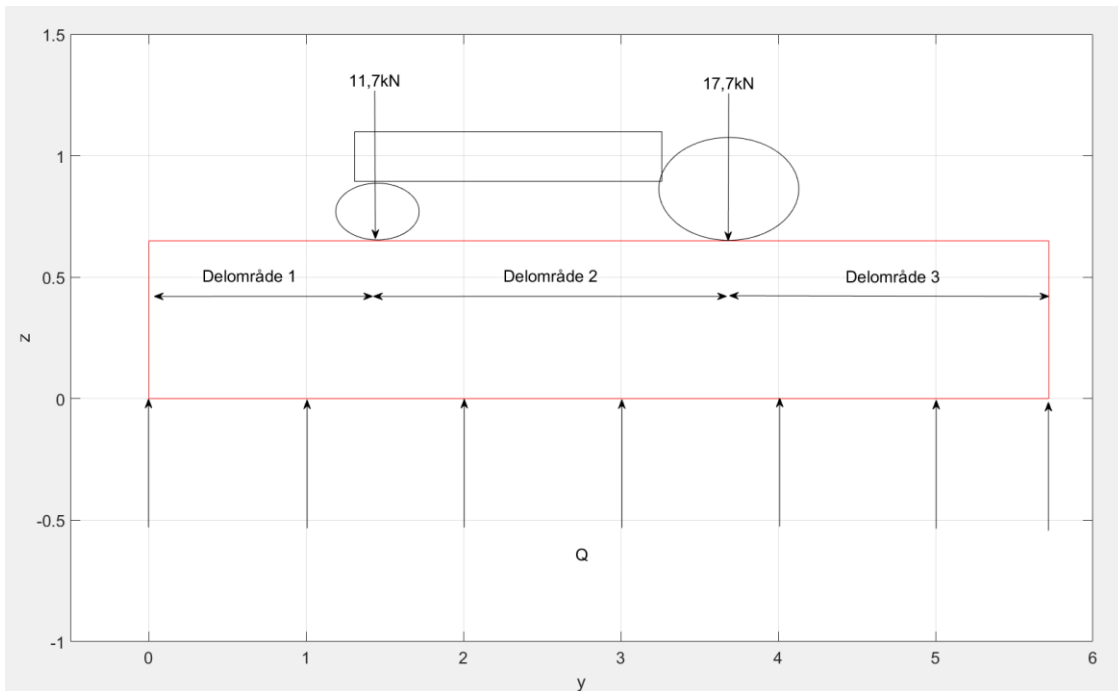
Bakaxeln blir således vid

$$y_{bakaxel} = 1,504[m] + 2,26[m] = 3,764[m]$$

Med en vikt på 3000 kg blir kraften $F(1,504[m]) = 3000 \text{ kg} * 0,4 * 9,81[m/s^2] = 11,772 \text{ kN}$ och vid $F(3,764[m]) = 3000 \text{ kg} * 0,6 * 9,81[m/s^2] = 17,658 \text{ kN}$ (se sammanställning i Tabell 14). I Figur 36 illustreras hur kraften från vattnet verkar underifrån och punktlasterna från traktorns fram och bakaxel.

Tabell 14. Viktfördelning

	LCG [m]	Vikt [kg]	Kraft [N]
Traktor framaxel	1,504	0,4*3000 kg=1200 kg	1200 kg*9,81 m/s ² =11,772 kN
Traktor bakaxel	3,764	0,6*3000 kg=1800 kg	1800 kg*9,81 m/s ² =17,658 kN



Figur 36. Krafter som verkar på skrovet och indelning för beräkning. Q är kraften som verkar mot bottenplåten minus kraften som skrovets egen tyngd utgör.

kraften per meter

$$\frac{F}{l} = \frac{29,43[kN]}{5,72[m]} = 5145 \left[\frac{N}{m} \right]$$

Elastiska linjens ekvation används för att beräkna böjmomentet.

$$EI * w'' = M(y)$$

där w är utböjningen och $''$ avser andra derivatan. Ekvationen för belastningen på skrovet använder fjärde derivatan av utböjningen, alltså

$$EI * w'''' = q(y)$$

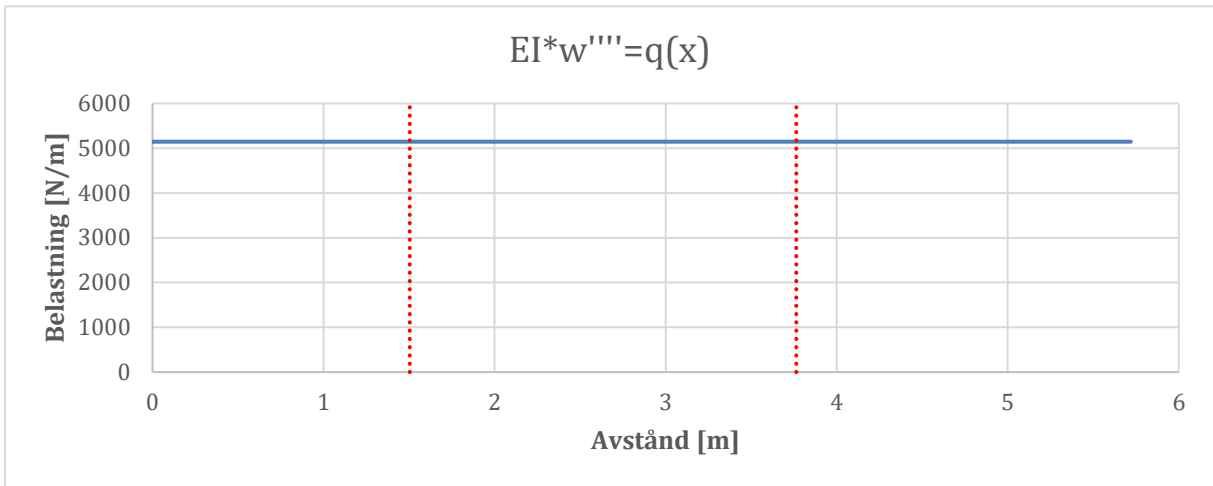
Eftersom belastningen på skrovet är känd och utböjningen w inte är känd används i stället formen

$$M(y) = \int \int q(y) dy dy$$

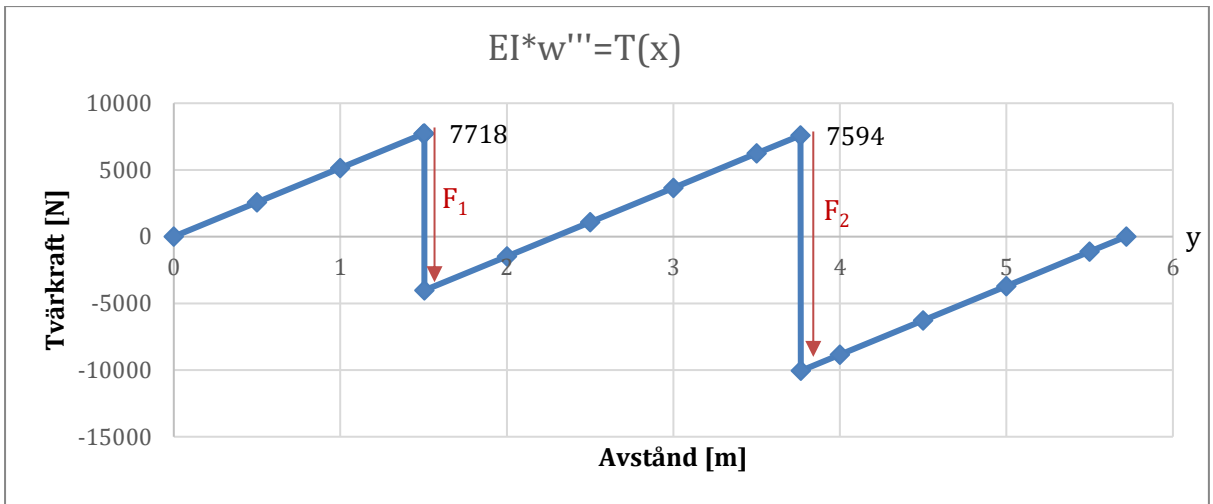
Belastningen på bottenplåten $q(y)$ är jämnt fördelad och därmed

$$EI * w'''' = q(y) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right]$$

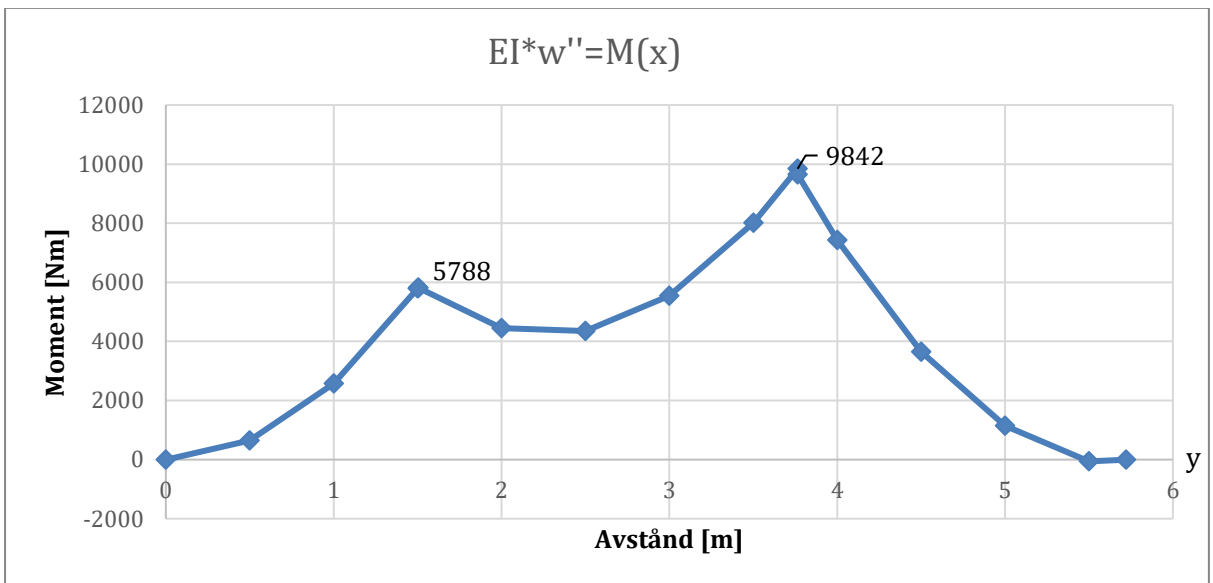
Skrovet indelas i tre delområden för att möjliggöra integrering av elementära funktioner där punktlaster orsakade av traktorn orsakar en icke kontinuerlig tvärkraftskurva, se Figur 36 och Figur 37. Beräkningarna är placerade i Bilaga 4 och resultaten presenteras i Figur 38 och Figur 39 i form av tvärkrafts och böjmomentdiagram.



Figur 37. Belastningsdiagram



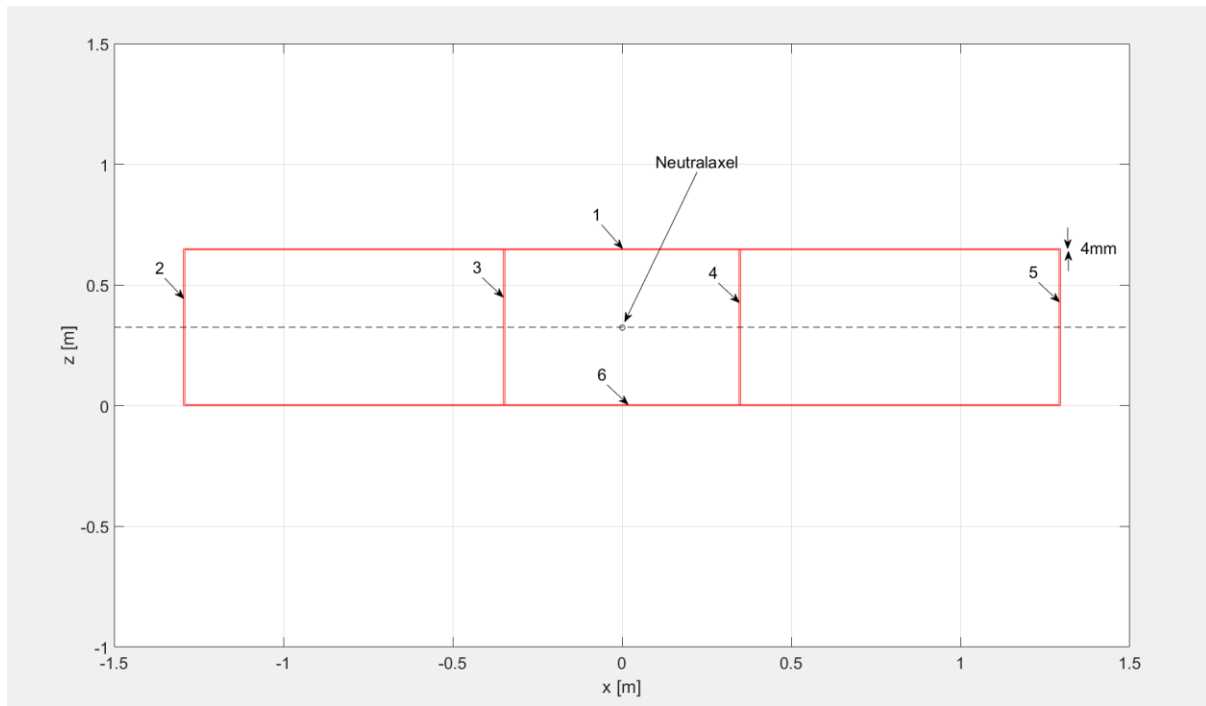
Figur 38. Tvärkraftsdiagram



Figur 39. Böjmomentdiagram

Det maximala böjmomentet inträffar vid traktorns bakaxel och är av storleken $9,842\text{kNm} \approx 10\text{kNm}$.

7.1 Beräkning av yttröghetsmoment, böjmotstånd och dragspänning



Figur 40. Tvärsektionssnitt

I Figur 40 illustreras ett tvärsnitt av skrovet och indelning av tvärsnittet i 6 rektanglar med plåttjocklek 4 mm.

Formel för beräkning av en rektangels yttröghetsmoment är

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Med hjälp av Steiners sats kan det resulterande böjtröghetsmomentet enkelt beräknas (Dahlberg, 2001)

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 + Ad^2$$

Insättning av de 6 rektanglarna ger:

$$I'_x = 2 * \frac{1}{12} * 2,59[m] * (0,004[m])^3 + (2,59[m] * 0,004[m]) * (0,325[m] - 0,002[m])^2 + \frac{1}{12} * 0,004[m] * (0,65[m] - (0,004[m] * 2))^3 * 4 = 0,0014[m^4]$$

Det minsta böjmotståndet och därmed största normalspänningen inträffar längst bort från neutralaxeln i z-led, d.v.s. skrovhöjden/2 = 0,325m

$$\sigma_{max} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{10[kN]}{0,0014[m^4]/0,325[m]} = 2321428 \left[\frac{Nm}{m^3} \right] \approx 2,3 \left[\frac{N}{mm^2} \right] = 2,3[MPa]$$

Vilken stålqualität som plåten är gjord av är okänt men de flesta stål ligger långt över 200[MPa] i sträckgräns så säkerhetsfaktorn ligger enligt beräkningarna nära 100 i det här fallet men eftersom klassreglerna inte tillåter beräkning med mindre än 100 kN blir

$$\sigma_{max} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{100[kN]}{0,0014[m^4]/0,325[m]} = 23214280 \left[\frac{Nm}{m^3} \right] \approx 23 \left[\frac{N}{mm^2} \right] = 23[MPa]$$

Och säkerhetsfaktorn följaktligen 10.

SLUTSATS

Sammanfattningsvis, baserat på beräkningarna och provturen, kan konstateras att pråmen är i stor utsträckning lämplig för de i inledningen specificerade huvudsyftena. Dock måste hänsyn tas till att ifall det fordon som användes i beräkningarna lastas ombord, så uppfylls inte de av DNV utsatta stabilitetskriterierna. Utbyte till ett lättare fordon eller begränsning till användning av pråmen vid god väderlek är nödvändig. Hållfasthetsmässigt har beräkningarna visat att skrovet håller med god marginal för de belastningar som det utsätts för.

Lastning och lossning av traktor visade sig lyckas utan problem, vidare har genom provturen visats att bogsering av pråmen med och utan last både fungerar ekonomiskt och relativt bekymmersfritt. En orsak till oro var dock att vid lastat läge och fart över 4,3 knop började pråmens för dyka under vattenytan. Förflyttning av bogseringspunkt neråt konstaterades vara en tänkbar lösning, men den lösningen har inte testats i praktiken.

För vidare undersökning av pråmens egenskaper, skulle man kunna komplettera beräkningarna med annat än 0-trim för att se dess inverkan på stabiliteten.

Långskeppsstabilitet samt noggrannare undersökning av stabilitet vid lastning och lossning kunde göras.

Hur framdrift av pråmen med dess egen motor fungerar i jämförelse med då bogserbåten drar den är också något som kunde studeras. Även andra sätt att med hjälp av bogserbåten förflytta pråmen kunde utföras, som till exempel att knuffa pråmen bakifrån eller genom att förtöja bogserbåten vid pråmens sida och på så sätt bogsera utan att propellerströmmen träffar pråmen och bromsar dess framfart.

KÄLL- OCH LITTERATURFÖRTECKNING

- Bourke, P. (1988). *Calculating The Area And Centroid Of A Polygon*. Hämtat från https://web.archive.org/web/20120916104133/http://www.seas.upenn.edu/~sys502/extra_materials/Polygon%20Area%20and%20Centroid.pdf
- Dahlberg, T. (2001). *Teknisk Hållfasthetslära*. Studentlitteratur.
- DNV. (2008). Standard for certification No.2.21 of craft.
- Dokkum, K. v. (2010). i *Ship Stability*. DOKMAR.
- Jansson, P.-Å., Grahn, R., & Enelund, M. (2018). *Mekanik*. Studentlitteratur.
- Johnson, T. C. (1982). *Introduction to Naval Architecture*. Naval Institute Press.
- Kuiken, K. (2017). *Diesel Engines*. Target Global Energy Training.
- Vägtrafiklag, 729/2018. Justitieministeriet. (2018). Hämtat från <https://www.finlex.fi/sv/lagstiftning/2018/729>
- Wolfson, R. (2015). *Essential University Physics*. Pearson.
- Zetor 5511 Instruktionsbok. (n.d.). Zetor Tractors A.S.
- Åsgård, M. (2013). Kompendium i fartygsstabilitet för MT.

BILAGA 1 – Beräkningar för skrovdel 3 och 4

I den här bilagan beräknas volym och buoyancycentrum av de två pyramidformade delarna av skrovet på sidorna av fören.

För att beräkna buoyancycentrums tre koordinater används trippelintegral

$$VCB(d) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z}{V(d)} dx dy dz$$

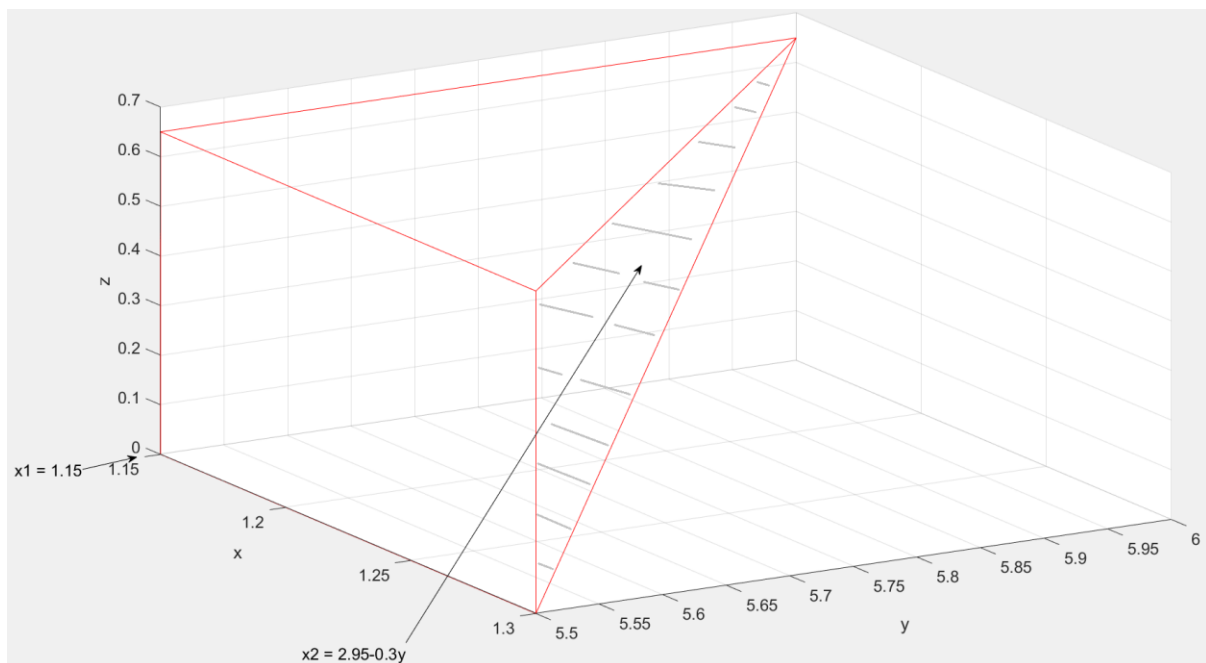
$$TCB(d) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{V(d)} dx dy dz$$

$$LCB(d) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{V(d)} dz dy dx$$

Funktionen för volymen $V(d)$ beräknas först, som i sig är samma integral men av funktionen 1

$$V(d) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} 1 dx dy dz$$

Gränsvärdena x_1 och x_2 hittas genom att i figur 1.1 tänker sig att x_1 och x_2 är planet som avgränsar pyramiderna i x-led. D.v.s.

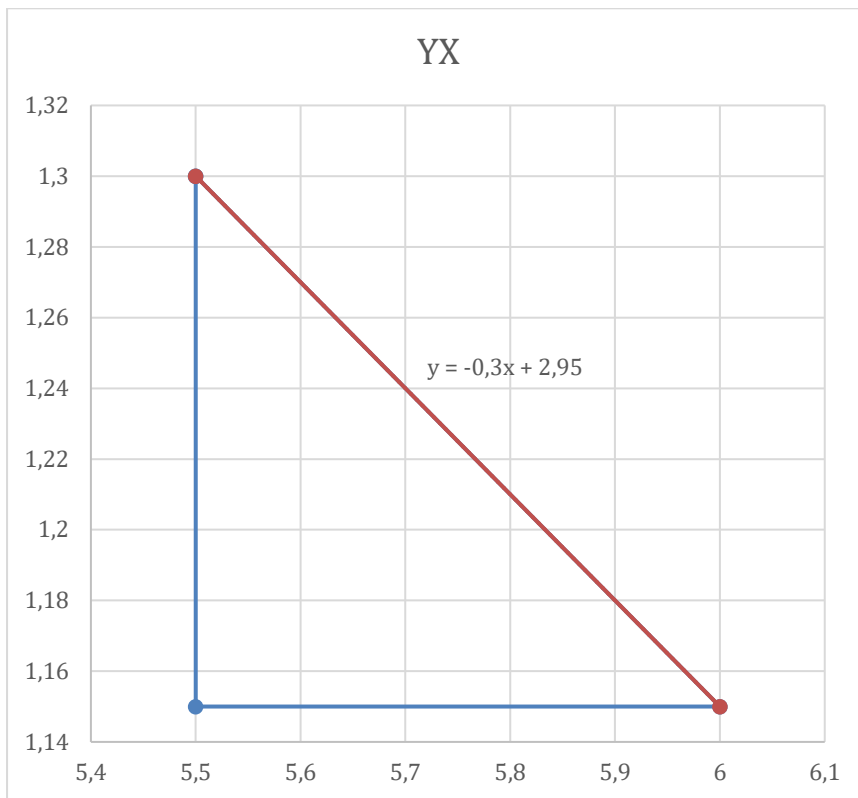


Figur 1.1. Integrering från x_1 till x_2

$$x_1 = 1,15$$

$$x_2 = 2,95 - 0,3y$$

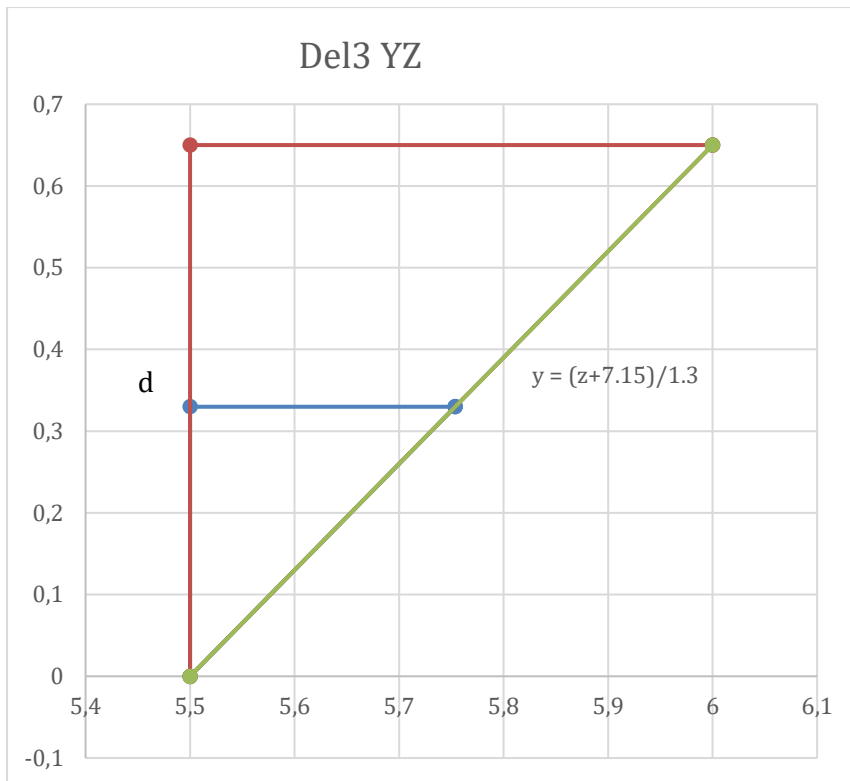
Planet $x = 2,95 - 0,3y$ fås genom att ta fram linjens ekvation i YX planet (Figur 1.2)



Figur 1.2. Skrovdal nr 3 i YX planet

Vidare fås gränsvärdena y_1 och y_2 genom att projicera pyramiden mot y-z planet och konstatera att i y-riktning kommer man in i pyramiden vid 5,5 m och ut vid $y = 1,3x - 7,15$ (se figur 1.2). Alltså

$$y_1 = 5,5 \text{ m}$$
$$y_2 = 1,3z - 7,15$$



Figur 1.3. Skrovdel nr 3 i YZ planet

Projicering mot Z-axeln ger gränsvärdena z_1 och z_2 .

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = d$$

Nu kan volymen som funktion av djupgående beräknas

$$V(d) = \int_{z=0}^{z=d} \int_{y=5,5}^{y=(z+7,15)/1,3} \int_{x=1,15}^{x=2,95-0,3y} dx dy dz = 0,0576923d^2 - 0,0295858d^3$$

Kontroll

$$V(0,65) = 0,0576923(0,65[m])^2 - 0,0295858(0,65[m])^3 = 0,01625 m^3$$

Vilket kontrolleras med formeln för beräkning av volymen för en pyramid

$$V = \frac{B * h}{3}$$

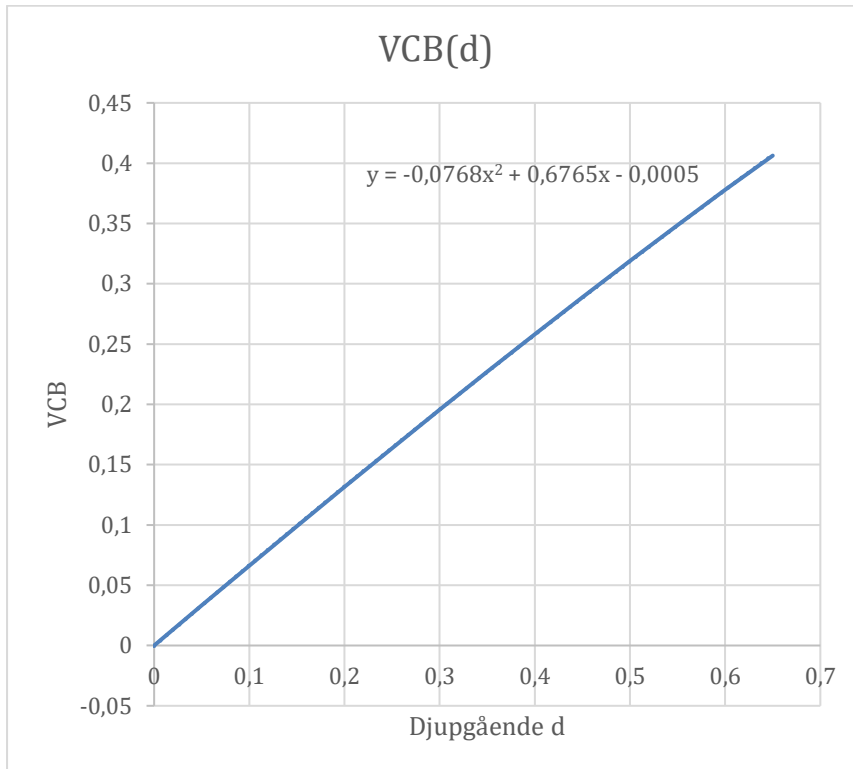
med basen $0,15m * 0,65m$ och höjden $0,5m$ blir den

$$V = \frac{0,15[m] * 0,65[m] * 0,5[m]}{3} = 0,01625 m^3$$

Nu kan center of buoyancy beräknas

$$VCB(d) = \int_0^d \int_{5,5}^{(z+7,15)/1,3} \int_{1,15}^{-0,3y+2,95} \frac{z}{0,0576923d^2 - 0,0295858d^3} dx dy dz$$

$$= \frac{0,75d^2}{d - 1,95} - \frac{1,3d}{d - 1,95} = \frac{(0,75d - 1,3)d}{d - 1,95}$$



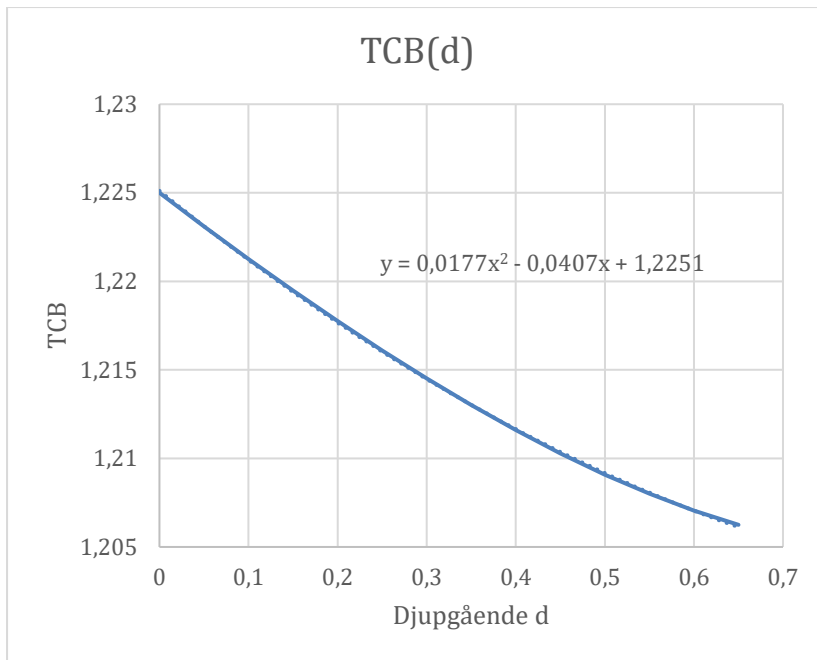
Figur 1.4. VCB(d) för skrovdel 3

I figur 1.4 illustreras hur VCB förflyttas då djupgåendet varierar. En förenkling av VCB funktionen fås ur diagrammet

$$VCB_{förenklad}(d) = -0,0768d^2 + 0,6765d$$

$$TCB(d) = \int_0^d \int_{5,5}^{\frac{z+7,15}{1,3}} \int_{1,15}^{-0,3y+2,95} \frac{x}{0,0576923d^2 - 0,0295858d^3} dz dy dx$$

$$= \frac{0,0576923d^2}{1,95 - d} - \frac{1,3d}{1,95 - d} + \frac{2,38875}{1,95 - d}$$

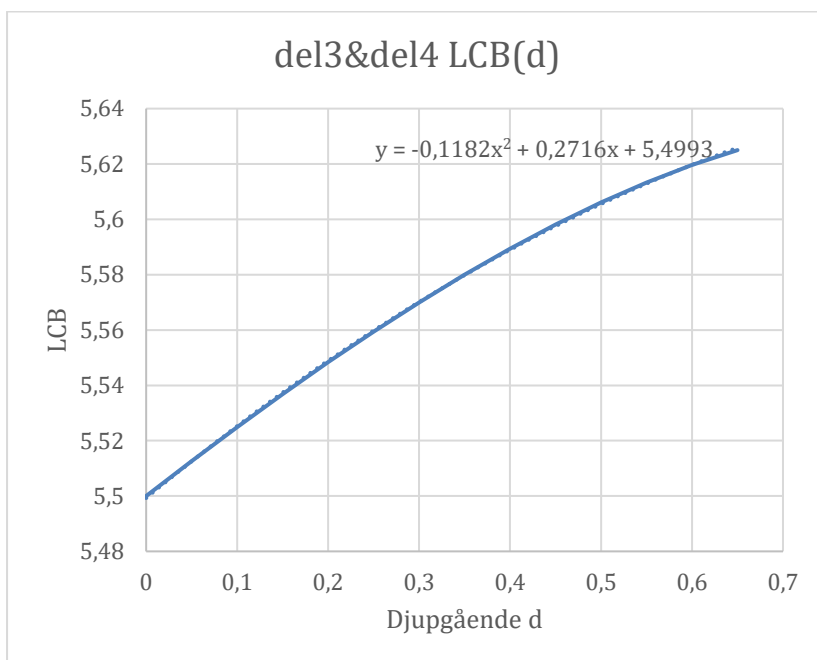


Figur 1.5. TCB(d) för skrovdela nr 3

$$TCB_{förenklad}(d) = 0,0177d^2 - 0,0407d + 1,2251$$

$$LCB(d) = \int_0^d \int_{5,5}^{(z+7,15)/1,3} \int_{1,15}^{-0,3y+2,95} \frac{y}{0576923d^2 - 0,0295858d^3} dzdydx$$

$$= \frac{0,38461d^2}{d - 1,95} + \frac{5d}{d - 1,95} - \frac{10,725}{d - 1,95}$$



Figur 1.6. LCB(d) för skrovdela nr 3 och nr 4

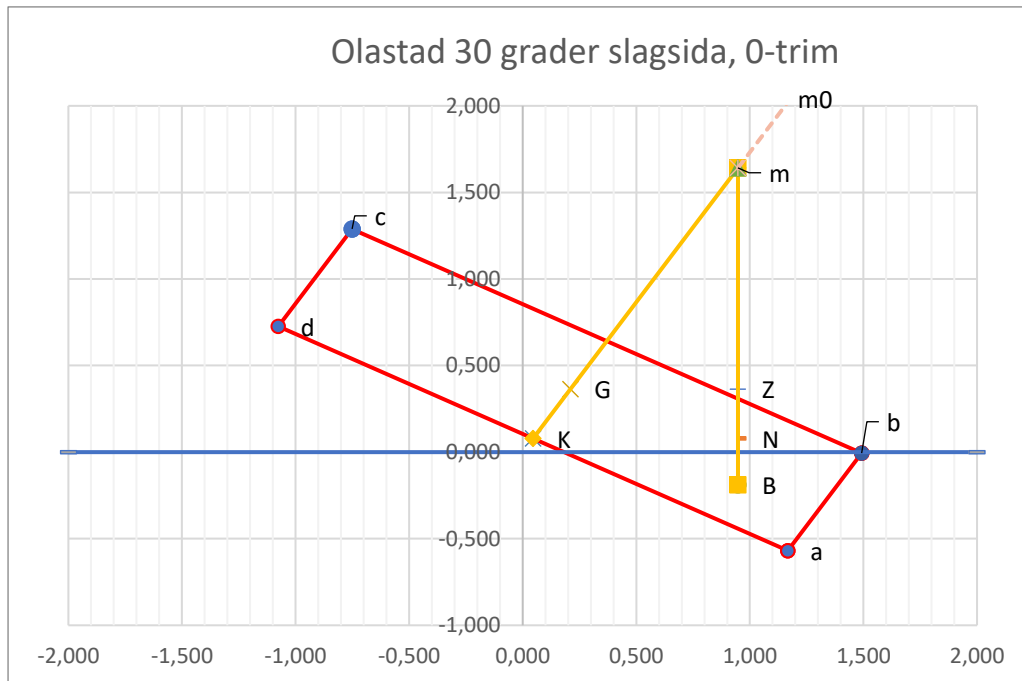
$$LCB_{förenklad}(d) = -0,1182d^2 + 0,2716d + 5,4993$$

BILAGA 2 – Hydrostatisk sammanställningstabell

Del	Volym(d)	VCB(d)	LCB(d)	m*VCB(d)	m*LCB(d)
1	$14,245[m]^2*d$	$d/2$	$5,5[m]/2$	$7,1225[m]^2*d^2$	$39,1738[m^3]*d$
2	$0,884[m]*d^2$	$2/3*d$	$5,5[m]+0,256d$	$0,589[m]*d^3$	$0,226[m]*d^3+4,86[m^2]*d^2$
Totalt	$0,884[m]*d^2+14,245[m]^2*d$	$0,5065d$	$0,174d+2,75[m]$	$0,589[m]*d^3+7,1225[m]^2*d^2$	$0,226[m]*d^3+4,86[m^2]*d^2+39,1738[m^3]*d$

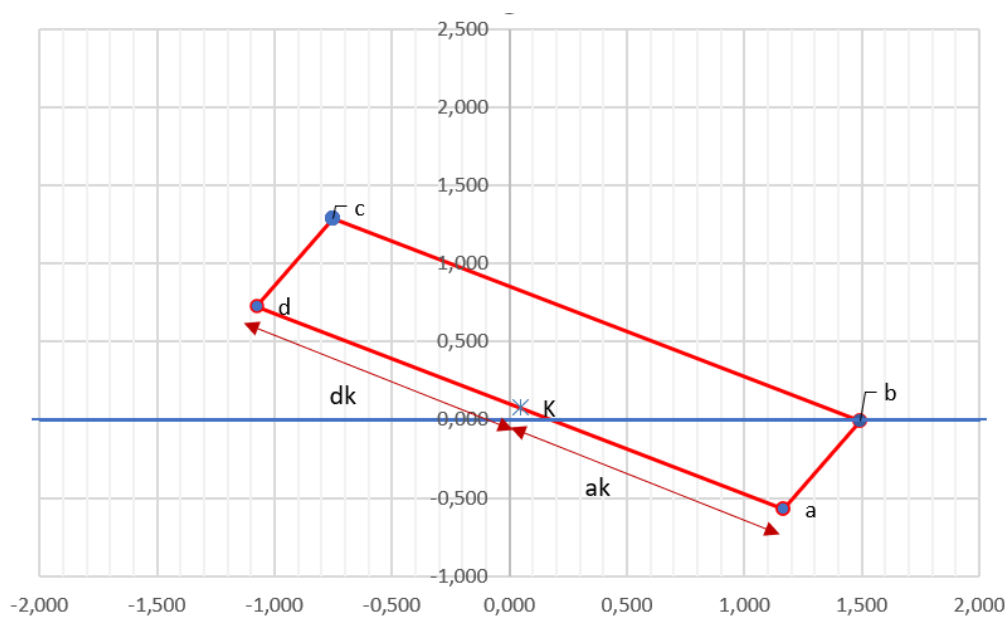
BILAGA 3 – Kontrollberäkningar för GZ kurva

Kontrollräkningar för olastad pråm



Figur 3.1. Olastad pråm 30 graders slagsida

Kölpunkten K



Figur 3.2. Illustrering av kölpunktens kontrollräkning

Kölpunkten K ska finnas mitt emellan punkt a och punkt d, d.v.s. sträckan dK och sträckan aK ska vara lika långa samt skall K finnas på samma linje som a och d.

$$|dK| = |aK|$$

Ekvation för avståndet d mellan två punkter

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (15)$$

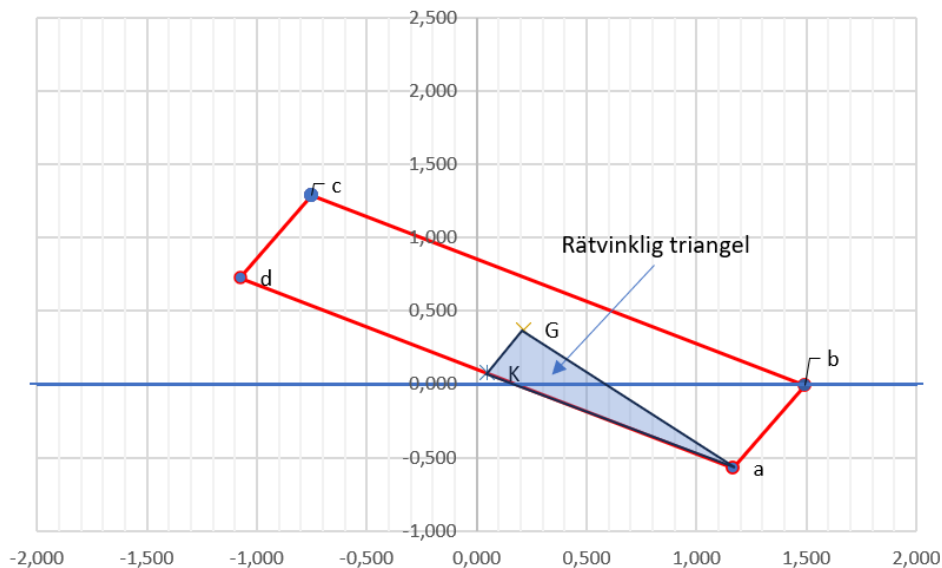
Insättning av punkterna a, d och k ger

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0,045[m] - (-1,076[m]))^2 + (0,079[m] - 0,726[m])^2} \\ &= \sqrt{(0,045[m] - (1,167[m]))^2 + (0,079[m] - (-0,569[m]))^2} \\ & 1,294 \approx 1,296 \end{aligned}$$

Resultatet avviker med 2mm och det antas bero på avrundningsfel. Kontroll att K ligger på samma linje som a och d är att sträckorna tillsammans blir skrovets bredd, alltså

$$1,294[m] + 1,296[m] = 2,59[m]$$

Tyngdpunkten G



Figur 3.3. Illustrering av tyngdpunktens kontrollräkning

Verifiering att tyngdpunkten (G) ligger på rätt plats i förhållande till K beräknas. Den skall vara på ett avstånd 0,34 m vinkelrätt från skrovets bottenplåt. Ekvation (15) används

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(G_x - K_x)^2 + (G_z - K_z)^2} = \sqrt{(0,213[m] - 0,045[m])^2 + (0,369[m] - 0,079[m])^2} \\ &= 0,34 \text{ m} \end{aligned}$$

Kontroll att den ligger midskepps görs med att beräkna avståndet mellan G och a och jämföra med Pythagoras sats.

$$d = \sqrt{(G_x - a_x)^2 + (G_z - a_z)^2}$$

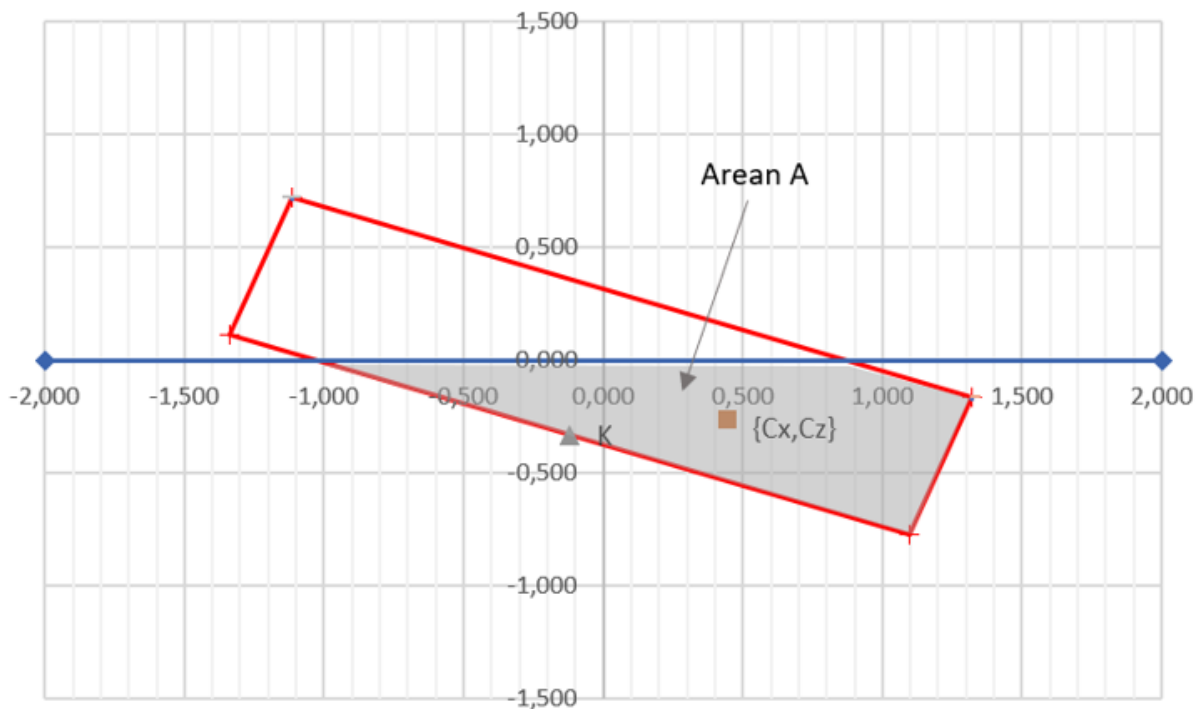
$$= \sqrt{(0,213[m] - 1,167[m])^2 + (0,369[m] - (-0,57)[m])^2} = 1,34 m$$

Pythagoras:

$$d = \sqrt{\left(\frac{2,59[m]}{2}\right)^2 + (0,34[m])^2} = 1,34m$$

$$1,34 m = 1,34 m$$

B, N och Z punkterna



Figur 3.4. Illustrering av undervattenareans kontrollräkning

Beräkningen av hur punkten B förflyttar sig vertikalt och transversalt då pråmen kränger blir komplicerad, punkterna N och Z fås enkelt då de övriga är bestämda eftersom de delar z koordinater med G och K samt x koordinat med B. Buoyancy punkten är således areacentrum för den del som ligger under vattenytan. För att beräkna var B befinner sig används formlerna (11),(12) och (13).

Punkterna b och a är redan kända men punkten där akterplåten korsar x axeln måste beräknas. Den okända punkten döps till d'. För ändamålet används linjens ekvation mellan punkterna a och d

$$z = kx + m$$

k beräknas

$$k = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{a_z - d_z}{a_x - d_x} = \frac{-0,57[m] - 0,725[m]}{1,167[m] - (-1,077[m])} = -0,577$$

m löses ut och koordinaterna för punkten a sätts in

$$m = z - kx$$

$$m = -0,57[m] + 0,577 * 1,167[m] = 0,103[m]$$

för att hitta x-koordinaten för punkten d' sätts z=0

$$0 = -0,577x + 0,103[m]$$

$$d_x = \frac{0,103[m]}{0,577} = 0,18[m]$$

Punkterna sammanställs i tabell 3.1.

Tabell 3.1. Koordinater för del under vattenytan

	x	x-koordinat [m]	z	z
a	1	1,167	1	-0,569
b	2	1,492	2	-0,006
d'	3	0,181	3	0

Punkt b ligger så nära vattenlinjen att ingen interpolering görs

Insättning i ekvation (13)

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$* \left((1,167[m] * 0 - 1,492[m] * (-0,569)) + (1,492[m] * 0 - 0,18 * 0) \right.$$

$$\left. + (0,181[m] * (-0,569) - 1,167[m] * 0) \right) = 0,37m^2$$

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i)$$

$$= \frac{1}{6 * 0,42[m^2]} \left((1,167[m] + 1,492[m]) (1,167[m] * 0 - 1,492[m] \right.$$

$$* (-0,569)) + (1,492[m] + 0,18[m]) (1,492[m] * 0 - 0,18[m] * 0)$$

$$\left. + (0,181[m] + 1,167[m]) (0,181[m] * (-0,569[m]) - 1,167[m] * 0) \right)$$

$$= 0,947[m]$$

$$\begin{aligned}
C_z &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + z_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i) \\
&= \frac{1}{6 * 0,3729[m^2]} \left((-0,569[m] + 0[m])(1,167[m] * 0[m] - 1,492[m] * (-0,569[m])) \right. \\
&\quad + (0[m] + 0[m])(1,492[m] * 0[m] - 0,18[m] * 0[m]) \\
&\quad \left. + (0[m] - 0,569[m])(0,181[m] * (-0,569[m]) - 1,167[m] * 0[m]) \right) \\
&= -0,19m
\end{aligned}$$

Resultaten för punkten B överensstämmer med Excel programmet. Även punkterna Z och N kan nu enkelt konstateras överensstämma.

Volymdeplacement och displacement

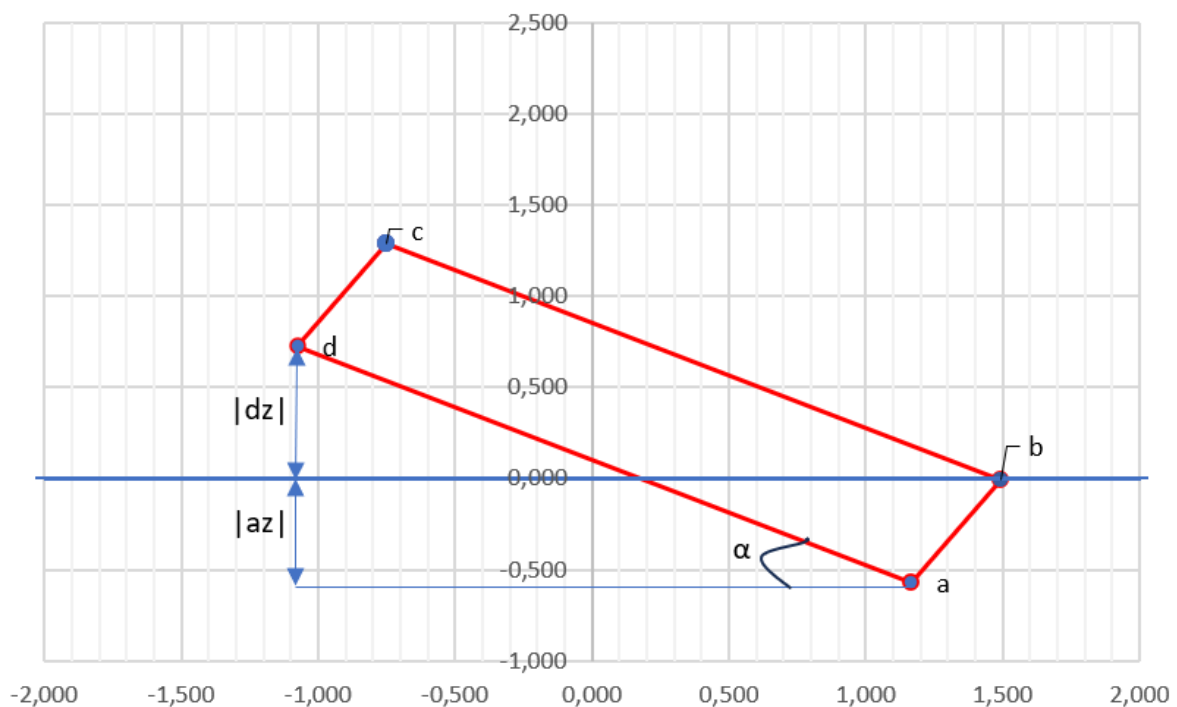
Arean av den del av akterplåten som är under vatten beräknades till $0,895m^2$. Nu används det ekvivalenta rätblocket för att beräkna volymdeplacementet. Således

$$\nabla = A * l = 0,37[m]^2 * 5,72[m] = 2,11m^3$$

och displacementet beräknas

$$\Delta = \nabla * \rho = 2,11m^3 * 1,005 \frac{t}{m^3} = 2,12t$$

Slagsida



Figur 3.5. Illustrering av slagsidans kontrollräkning

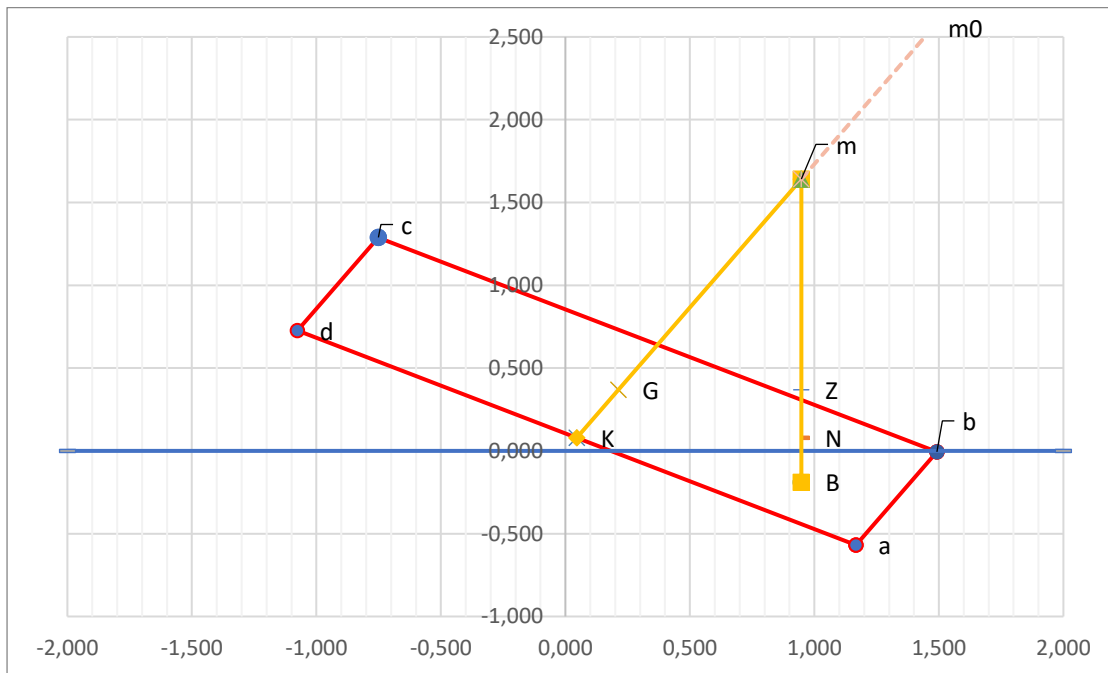
Slagsidans vinkel kontrolleras med ekvation (16)

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{|d_z| + |a_z|}{\text{skrovbredd}} \right)$$

för 30 graders slagsidan

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{|0,726[m]| + |-0,569[m]|}{2,59[m]} \right) = 30^\circ$$

Metacenterhöjd



Figur 3.7. Illustrering av metacenterhöjdens kontrollräkning

Punkterna M, Z, N och B har samma x-koordinater (0,948) men punkt M:s z-koordinat kontrollräknas genom att verifiera att den ligger på samma linje som linjen som går genom punkterna K och G. Linjens ekvation används.

$$z = kx + m$$

Linjen går genom origo så $m = 0$. Koefficienten k beräknas med hjälp av punkterna G och K.

$$k = \frac{d_z}{d_x} = \frac{G_z - K_z}{G_x - K_x} = \frac{0,369 [m] - 0,079 [m]}{0,213 [m] - 0,045 [m]} = 1,73$$

Insättning i linjens ekvation ger att Z koordinaten är 1,64 vilket stämmer överens med koordinaten som programmet ger.

$$z = 1,73 * 0,948[m] = 1,64[m]$$

Kontrollräkningar för lastad pråm

Kölpunkten K

Kölpunkten K ska finnas mitt emellan punkt a och punkt d, d.v.s. sträckan dK och sträckan aK ska vara lika långa samt skall K finnas på samma linje som a och d.

$$|dK| = |dK|$$

Ekvation för avstånd mellan två punkter

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	(17)
--	------

Insättning ger

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-0,122[m] - (-1,339[m]))^2 + (-0,334[m] - 0,108[m])^2} \\ &= \sqrt{(-0,122[m] - (1,095[m]))^2 + (-0,334[m] - (-0,777[m]))^2} \\ & 1,29478 \approx 1,29512 \end{aligned}$$

Kontroll att K ligger på samma linje som a och d är att sträckorna tillsammans blir skrovets bredd, alltså

$$1,29478[m] + 1,29512[m] = 2,59[m]$$

Tyngdpunkten G

Verifiering att tyngdpunkten (G) ligger på rätt plats i förhållande till K beräknas. Den skall vara på ett avstånd 1,01 m vinkelrätt från skrovets bottenplåt. Ekvation (15) används

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(G_x - K_x)^2 + (G_z - K_z)^2} \\ &= \sqrt{(0,225[m] - (-0,112[m]))^2 + (0,619[m] - (-0,334[m]))^2} = 1,01 \text{ m} \end{aligned}$$

Kontroll att den ligger midskepps görs med att beräkna avståndet mellan G och a och jämföra att Pythagoras sats uppfylls (rätvinklig triangel).

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(G_x - a_x)^2 + (G_z - a_z)^2} \\ &= \sqrt{(0,225[m] - 1,095[m])^2 + (0,619[m] - (-0,777[m]))^2} = 1,64 \text{ m} \end{aligned}$$

Pythagoras:

$$d = \sqrt{\left(\frac{2,59[m]}{2}\right)^2 + (1,01[m])^2} = 1,64 \text{ m}$$

Boyancy, N och Z punkterna

Punkterna b och a är redan kända men x-koordinaten där akterplåten och däcksplåten korsar x axeln måste beräknas. De okända punkterna döps till d' och c' respektive. För ändamålet används interpoleringsformeln

$x = \frac{x_0(z_1 - z) + x_1(z - z_0)}{z_1 - z_0}$	(18)
---	------

d.v.s.

$$c'_x = \frac{x_0(z_1 - z) + x_1(z - z_0)}{z_1 - z_0}$$

$$= \frac{1,317[m](0,719[m] - 0) + (-1,116[m](0 - (-0,167[m]))}{0,719[m] - (-0,167[m])} = 0,858[m]$$

$$d'_x = \frac{x_0(z_1 - z) + x_1(z - z_0)}{z_1 - z_0}$$

$$= \frac{1,095[m](0,108[m] - 0) + (-1,339[m](0 - (-0,777[m]))}{0,108[m] - (-0,777[m])} = -1,06[m]$$

Punkterna sammanställs i en tabell

	x	x-koordinat [m]	z	z
a	1	1,095	1	-0,777
b	2	1,317	2	-0,166
c'	3	0,858	3	0
d'	4	-1,06	4	0

Insättning i ekvation (13)

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$* \left((1,095[m] * (-0,167[m]) - 1,317[m] * (-0,777[m])) \right.$$

$$+ (1,317[m] * 0 - 0,858[m] * (-0,167[m]))$$

$$+ (0,858[m] * 0 - 1,06[m] * 0)$$

$$\left. + (-1,06[m] * (-0,777[m]) - 1,095[m] * 0) \right) = 0,904 \text{ m}^2$$

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i)$$

$$= \frac{1}{6 * 0,904[m^2]} \left((1,095[m] + 1,317[m]) (1,095[m] * (-0,166[m]) \right.$$

$$- 1,317[m] * (-0,777[m]))$$

$$+ (1,317[m] + 0,858[m]) (1,317[m] * 0 - 0,858[m] * (-0,166[m]))$$

$$+ (0,858[m] - 1,06[m]) (0,858[m] * 0 - (-1,06[m]) * 0)$$

$$+ (-1,06[m] + 1,095[m]) (-1,06[m] * (-0,777[m]) - 1,095[m] * 0) \left. \right)$$

$$= 0,443 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
C_z &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + z_{i+1}) (x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i) \\
&= \frac{1}{6 * 0,904[m^2]} \left((-0,777[m] - 0,166[m])(1,095[m] * (-0,166[m]) \right. \\
&\quad \left. - 1,317[m] * (-0,777[m])) \right. \\
&\quad \left. + (-0,166[m] + 0[m])(1,317[m] * 0 - 0,858[m] * (-0,166[m]) \right. \\
&\quad \left. + (0[m] - 0[m])(0,858[m] * 0 - (-1,06[m]) * 0) \right. \\
&\quad \left. + (0[m] - 0,777[m])(-1,06[m] * (-0,777[m]) - 1,095[m] * 0) \right) \\
&= -0.269 \text{ m}
\end{aligned}$$

Resultaten för punkten B överensstämmer med Excel programmet. Även punkterna Z och N kan nu enkelt konstateras överensstämma genom att de har samma x-koordinat som B och samma z-koordinat som K och G respektive.

Volymdeplacement och displacement

Arean av den del av akterplåten som är under vatten beräknades till $0,895\text{m}^2$. Nu används det ekvivalenta rätblocket för att beräkna volymdeplacementen. Således

$$\nabla = A * l = 0,904[m]^2 * 5,72[m] = 5,17 \text{ m}^3$$

och displacementen beräknas

$$\Delta = \nabla * \rho = 5,17\text{m}^3 * 1,005 \frac{\text{ton}}{\text{m}^3} = 5,19 \text{ ton}$$

1. Slagsida

Slagsidans vinkel kontrolleras med ekvation (16)

$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{ d_z + a_z }{\text{skrovbredd}} \right)$	(19)
---	------

insättning

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{|0,108[m]| + |-0,777[m]|}{2,59[m]} \right) = 20^\circ$$

Metacenterhöjd

Punkterna M, Z, N och B har samma x-koordinater (0,445) men punkt M:s z-koordinat kontrollräknas genom att verifiera att den ligger på samma linje som linjen som går genom punkterna K och G. Linjens ekvation används.

$$z = kx + m$$

Linjen går genom origo så $m = 0$. Koefficienten k beräknas med hjälp av punkterna G och K.

$$k = \frac{d_z}{d_x} = \frac{G_z - K_z}{G_x - K_x} = \frac{0,619 [m] - (-0,334 [m])}{0,225 [m] - (-0,122 [m])} = 2,75$$

Insättning i linjens ekvation ger att Z koordinaten för punkten m är 1,22 vilket stämmer överens med koordinaten som programmet ger.

$$z = 2,75 * 0,445 [m] = 1,22[m]$$

BILAGA 4 – Kontrollberäkningar för hållfasthet

7.1.1 För delområde 1 är den obestämda integralen

Integrering av $q(y)$ ger tvärkraften $T(y)$

$$EI * w''' = T_1(0) = \int q(y) dy = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y + C_1$$

Vi vet att tvärkraften måste vara noll vid $y=0$

d.v.s.

$$T_1(0) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 0 + C_1 = 0$$

C_1 är följaktligen = 0

$$T_1(y) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y, \{ y < 1,504 \}$$

Vid $y=1,504$ är

$$T_1(1,504) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 1,504[m] = 7738[N]$$

7.1.2 För delområde 2

$$EI * w''' = T_2(y) = \int q(y) dy = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y + C_2$$

Vi vet att vid $y = 1,504$ m är tvärkraften 7738 N och att punktlasten orsakar en minskning på 11,772 kN. Alltså:

$$T(1,504[m]) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 1,504[m] + C_2 = 7738[N] - 11772[N] = -4034[N]$$

ger C_2

$$C_2 = -4034[N] - 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 1,504[m] = -11772[N]$$

$$EI * w''' = T_2(y) = \int q(y) dy = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y - 11772[N], \\ \{ 1,504[m] < y < 3,764[m] \}$$

Tvärkraften vid 3,764m beräknas

$$EI * w''' = T_2(3,764[m]) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 3,764[m] - 11772[N] = 7593,8 [N]$$

7.1.3 Och det tredje delområdet

$$EI * w''' = T_3(y) = \int q(y) dy = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y + C_3$$

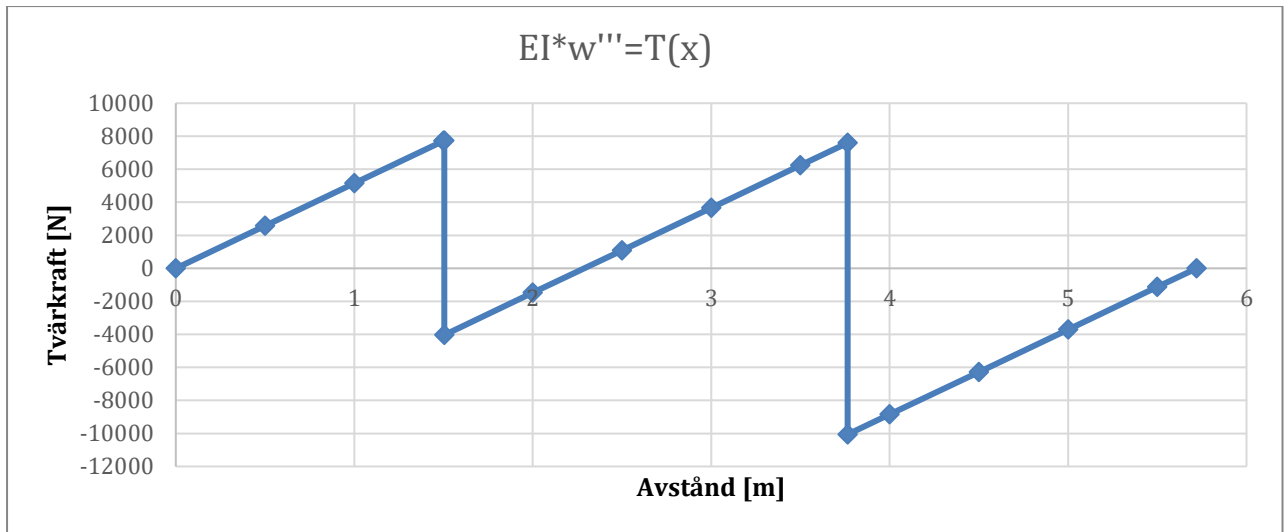
Vid $y=3,764$ m är tvärkraften $7593,8$ N och bakaxeln orsakar en punktkraft på 17658 N, således

$$T(3,764[m]) = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * 3,764[m] + C_3 = 7593,8[N] - 17658[N] = -10064,2[N]$$

ger att C_3 är

$$C_3 = -10064,2[N] - 5145 * 3,764[m] = -29430[N]$$

$$EI * w''' = T_3(y) = \int q(y) dy = 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y - 29430[N], \quad 3,764[m] < y < 5,72[m]$$



Figur 4.1. Diagram över tvärkraften

Integrering av $T(y)$ ger böjmomentet $M(y)$

7.1.4 För delområde 1

$$EI * w'' = M_1(y) = \int T_1(y) dx = \int 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y = \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 + D_1$$

Eftersom momentet måste vara 0 vid $y = 0$ blir

$$M_1(0) = \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * 0^2 + D_1 = 0$$

ger att D_1

$$D_1 = 0$$

$$M_1(y) = 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * y^2$$

Momentet vid $y = 1,504$ m

$$M_1(1,504[m]) = 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * (1,504[m])^2 = 5819[Nm]$$

7.1.5 För delområde 2

$$\begin{aligned}EI * w'' = M_2(y) &= \int T_2(y) dx = \int 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y - 11772[N] \\ &= \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 - 11772[N] * y + D_2\end{aligned}$$

Då momentet är 5819 Nm vid $y = 1,504$ m blir D_2

$$M_2(1,504[m]) = \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 - 11772[N]y + D_2 = 5819[Nm]$$

$$D_2 = 5819[Nm] - \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * (1,504[m])^2 + 11772[N] * 1,504[m] = 17705[Nm]$$

$$M_2(y[m]) = 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 - 11772[N]y + 17705[Nm]$$

för $y = 3,764$ m

$$M_2(3,764[m]) = 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * 3,764[m]^2 - 11772[N] * 3,764[m] + 17705[Nm] = 9841[Nm]$$

7.1.6 Delområde 3

$$\begin{aligned}EI * w'' = M_3(y) &= \int T_3(y) dx = \int 5145 \left[\frac{N}{m} \right] * y - 29430[N] \\ &= \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 - 29430y + D_3\end{aligned}$$

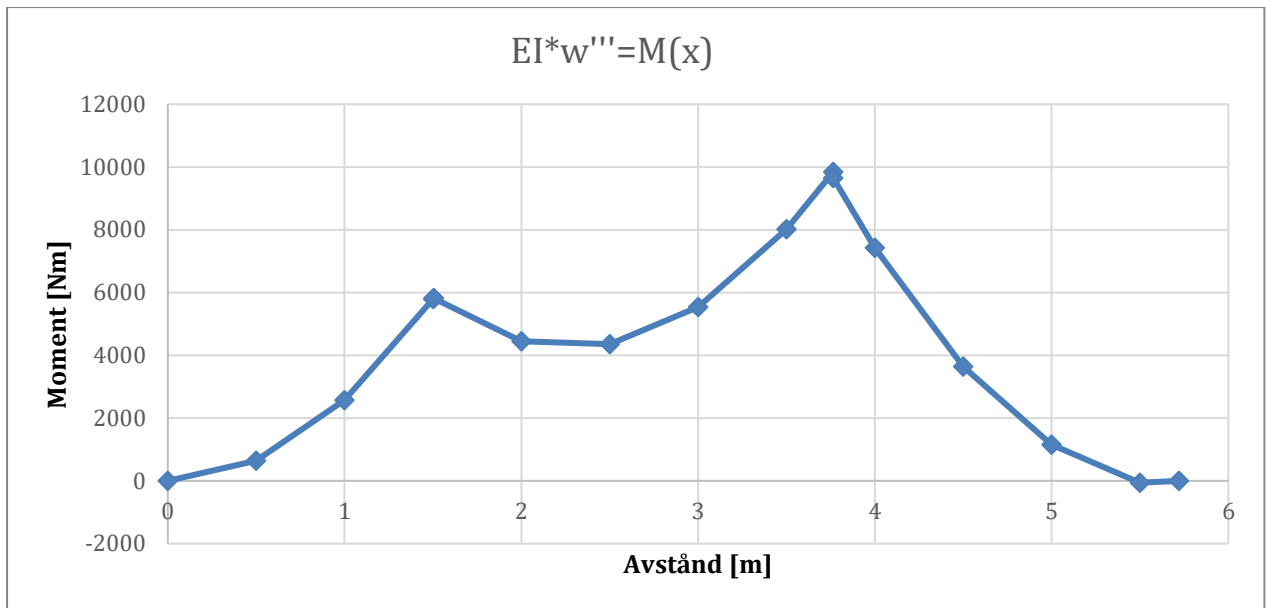
Eftersom momentet är 9841N vid $y = 3,764$ m så

$$M_3(3,764[m]) = \frac{5145}{2} \left[\frac{N}{m} \right] * (3,764[m])^2 - 29430[N] * 3,746[m] + D_3 = 9841[Nm]$$

D_3 blir

$$D_3 = 9841[Nm] - 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * (3,746[m])^2 + 29430[N] * 3,746[m] = 83987[Nm]$$

$$M_2(y[m]) = 2572,5 \left[\frac{N}{m} \right] * y^2 - 29430[N] * y + 83987[Nm]$$



Figur 4.2. Diagram över böjmomentet

Maximalt böjmoment avläses till 9842Nm \approx 10kNm