TAMPEREEN AMMATTIKORKEAKOULU
Rakennustekniikan koulutusohjelma
Talonrakennustekniikka

Tutkintotyö

Timo Sormunen

STATIIKAN PERUSKURSSIN OPPIMATERIAALI

Työn ohjaaja DI Risto Lilja, kommentaattori RI, DI Aarre Iivonen
Työn teettäjä Tampereen ammattikorkeakoulu, valvojana Olli Saarinen
Tampere 2005

TAMPEREEN AMMATTIKORKEAKOULU
Rakennustekniikka
Talonrakennustekniikka
Sormunen, Timo

Sormunen, Timo — Statiikan peruskurssin oppimateriaali
Tutkintotyö — 6 sivua + 59 liitesivua
Työn ohjaaja — TAMK, valvojana Olli Saarinen
Toukokuu 2005
Hakusanat — statiikka, rakenteiden mekaniikka

TIIVISTELMÄ

Statiikalla on suuri merkitys rakennusalan tehtävissä kuten rakennusten suunnittelussa ja osittain myös työmaan esimiestehtävissä. Valmistuvan rakennusinsinöörin on tärkeää hallita statiikan perusteet ja ymmärtää sen merkitys. Statiikan keskeisestä asemasta johtuen myös sen opetukseen liittyy erilaisia haasteita. Yksi näistä haasteista on sellaisen oppimateriaalin luominen, joka on riittävän laaja, laadukas ja helposti opiskelijoiden saatavilla.

Tämän työn tarkoituksena on ollut laatia oppimateriaali statiikan peruskurssille. Lähtökohtana on pidetty opiskelijakeskeistä ajattelutapaa. Siksi oppimateriaali on pyritty tekemään mahdollisimman havainnolliseksi ja helpoksi ymmärtää. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi siihen on sisällytetty paljon erilaisia kuvia, esimerkkilaskelmia ja harjoitustehtäviä.

Rakennusalaa käsittelevää statiikan kirjallisuutta ja oppimateriaalia on saatavilla melko vähän. Tämän työn tarkoituksena on paikata puutetta laatimalla statiikan peruskurssin oppimateriaali avuksi opiskelijoille ja opettajille, jotka toimivat tekniikan, rakentamisen ja eritoten statiikan parissa.

Oppimateriaali on laadittu sähköiseen muotoon. Tällä pyritään parantamaan materiaalin saatavuutta ja tekemään siitä paperille painettua edullisempaa. Oppimateriaali otetaan käyttöön Tampereen ammattikorkeakoulun rakennusosastolla syksyllä 2005. Varsinaista tutkintotyöraporttia ei ole työstä tätä tiivistelmää lukuun ottamatta laadittu, vaan oppimateriaali on korvaava kokonaisuus. Oppimateriaali on laadittu rakennusosaston toiveiden ja näkemysten mukaisesti. Se eroaa ulkoasultaan tavanomaisesta tutkintotyöraportista eikä siksi sovellu sellaiseksi.

Statiikan oppimateriaalien laatimisessa riittää työsarkaa myös tulevaisuudessa. Jatkossa myös kaikista muista statiikan ja lujuusopin kursseista voisi laatia samanlaiset oppimateriaalit. Uskon kuitenkin, että jo tämä työ auttaa statiikan opiskelijoita pääsemään alkuun ja paneutumaan innolla rakenteiden mekaniikan tutkimiseen.

TAMPERE POLYTECHNIC
Construction engineering
Building construction
Sormunen, Timo The Basic Course on Structural Mechanics
Engineering Thesis 6 pages + 69 appendices
Thesis Supervisor Risto Lilja (graduate engineer)
Commissioning Organization Tampere Polytechnic, Olli Saarinen
May 2005
Keywords statics, structural mechanics

ABSTRACT

The meaning of statics is essential in building construction, engineering and also in the managerial work of a building site. It is important for a construction engineer to know the basics of statics and understand its meaning in building construction. The importance of statics also poses different challenges to the teaching of the subject. One of these challenges is to create educational material, eg. Textbooks that is adequately comprehensive, of a good quality and sufficiently available for students.

The goal for this thesis is to create a textbook for the basic course on static's and structural mechanics. The starting point for this work was to make a material that would take the student's point of view into consideration. Every effort has been made in order to make it as graphic and easy to understand as possible by including various pictures, model calculations and exercises in the material.

There are only a few examples of literature and textbooks in the field of statics. This work is designed to give a basic reference for students and teachers that study and work in the field of statics and building construction. The textbook is published in a digital format only. By publishing it electronically we have been aiming at making it more easily available and cheaper than a printed book.

The textbook will be put in educational use for the first time in the Department of Construction Engineering of the Tampere Polytechnic in autumn 2005. Apart from this abstract, no actual report on this thesis was made. This textbook is made in accordance with the suggestions made by the Department of Construction Engineering and its layout is not similar to that used in the usual reports.

In the future, creating a textbook for all other courses on statics and structural mechanics can continue this project. I surely believe that already this thesis can help the students get a better understanding of the field of statics and structural mechanics and also increase their enthusiasm while studying the subject.

SISÄLLYSLUETTELO

Liitteen 1. Sisällysluettelo

SYMBOLILUETTELO

A, B	jokin piste A tai B
a	momenttivarren etäisyys, tai kiihtyvyys, m tai m/s^2
α	kulma, ^{o}
F	voima, N
F_x, F_y	komponenttivoima, N
G	kappaleen omakuorma, N
g	palkin tai kappaleen omakuorma, N/m
m	massa kg
M	taivutusmomentti, Nm
M_A	momentti pisteen A ympäri, Nm
N	normaalivoima, N
Q	leikkausvoima, N
q	hyötykuorma, N/m
R	resultanttivoima, N
T	vääntömomentti, Nm

LÄHDELUETTELO

Painetut lähteet

1. Outinen, Hannu Statiikka osa 2. Pressus, Klingendahl-paino. Tampere 2000.

2. Outinen, Hannu - Koski, Juhani - Salmi, Tapio. Lujuusopin perusteet. Pressus, Klingendahl-paino. Tampere 2000.

3. Outinen, Hannu, Statiikka osa1. Pressus, Klingendahl-paino. Tampere 1998.

4. Rakentajain kalenteri 2001. Rakennustieto, Karisto. Hämeenlinna 2000.

5. Saarineva, Jarmo, Lujuusoppi peruskussi. Sonator, Gummerus. Jyväskylä 1983

6. Salmi, Tapio, Teknillisen mekaniikan perusteet. Pressus. Tampere 2000.

7. Salonen, Eero-Matti. Statiikka. Otatieto, Hakapaino. Helsinki 1995

Painamattomat lähteet

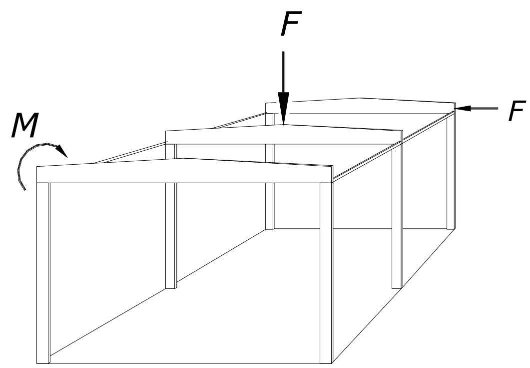
8. Iivonen, Aarre, Staattisesti määrätyt rakenteet, Luentomoniste. TAMK/Rakennusosasto. 2003.

9. Hakkila, Juhani - Saarinen, Olli - Lilja, Risto. Lujuusoppi, luentomoniste. Tampereen ammattikorkeakoulu.

10. Hakkila, Juhani - Saarinen, Olli - Lilja, Risto. Statiikka, luentomoniste. Tampereen ammattikorkeakoulu.

Liite 1.

STATIIKAN PERUSTEET



Timo Sormunen

STATIIKAN PERUSTEET

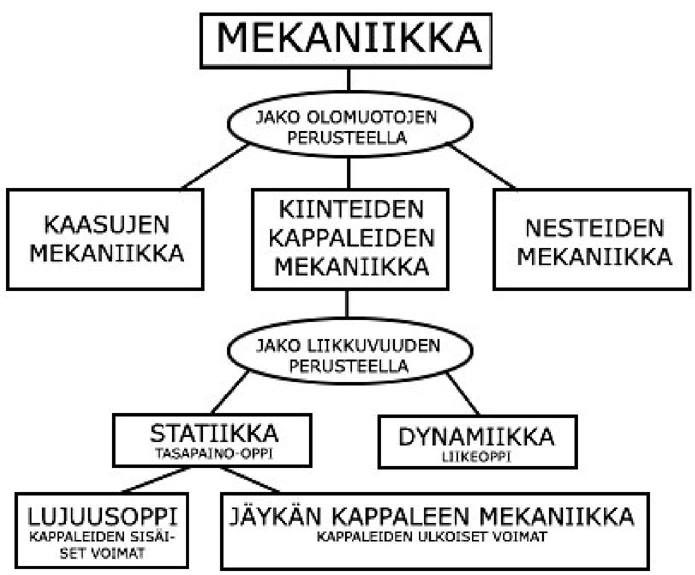
Sisällysluettelo

1. JOHDANTO

1.1 Mekaniikka

Mekaniikka kuuluu osana fysiikan laajaan kokonaisuuteen, joka käsittelee liikkeessä ja levossa olevia kappaleita. Mekaniikka voidaan jakaa kahteen osioon: *statiikkaan* (tasapaino-oppiin) ja *dynamiikkaan* (liikeoppiin). Jako voidaan tehdä myös aineen olomuotojen perusteella. Tällöin eritellään tavanomaisesti kolme pääaihetta: kiinteän kappaleen mekaniikka, nestemekaniikka (hydromekaniikka) ja kaasumekaniikka (aeromekaniikka).

Kiinteiden kappaleiden mekaniikka voidaan jakaa kolmeen osaan: jäykän kappaleen mekaniikkaan, lujuusoppiin ja kimmo-oppiin. Kuvasta 1.1.1 selviää mekaniikan jaottelu, ns. tiekartta. Tässä oppimateriaalissa keskitytään kiinteiden kappaleiden mekaniikkaan, tarkemmin jäykän kappaleen ja partikkelin statiikkaan. Jotta pystyisimme käsittelemään statiikan tasapainoon perustuvia tehtäviä helpommin, on tehtävä olettamus, että kappaleet ovat täysin jäykkiä (taipumaton, kokoonpuristumaton). Näin ei tietenkään todellisuudessa ole, sillä jokainen kappale muuttaa muotoaan, kun sitä kuormitetaan. Kappaleiden muodonmuutokset ovat kuitenkin usein niin pieniä, että niitä ei huomioida staattisia suureita ratkaistaessa. Näitä tehtäviä kutsutaan *isostaattisiksi* (staattisesti määrätyiksi). Jos tehtävä edellyttää muodonmuutoksien huomioonottamisen, kutsutaan niitä *hyperstaattisiksi* (staattisesti määräämättömiksi).



Kuva 1.1.1 Mekaniikan jaottelu.

1.2 Historia

Mekaniikan historia on saanut alkunsa antiikin Kreikasta (500–300 e.Kr.). Tunnetuimpia luonnontieteilijöitä olivat silloin *Aristoteles* (384–322 e.Kr.) ja *Arkhimedes* (287-212 e.Kr.). He tutkivat mekaniikkaa, mutta heidän tietonsa oli vain osittaista. Mekaniikan varsinaista järjestelmää alettiin kehittää vasta keskiajalla. Tuolloin *Simon Stevinus* (1548–1620) esitti muun muassa voimien yhdistämisen ja suunnikaslain. Hän kehitti myös monia muita statiikan teorioita. Dynamiikan puolella vastaavaan aikaan mainittava henkilö oli *Galileo Galilei* (1564–1642). Hänen kuuluisat kokeensa liittyvät putoamisliikkeeseen.

Mekaniikan yhtenäisen järjestelmän loi *Sir Isaac Newton* (1642–1727). Hän esitti klassisen mekaniikan (ns. Newtonin mekaniikka) perusteet teoksessa ”Principia” vuonna 1678. Hän selitti teorioidensa avulla planeettojen liikkeitä ja niiden erityispiirteitä. Newtonin teoriat tunnetaan vielä tänäkin päivänä *jatkuvuuden lakina*, *Dynamiikan peruslakina* sekä *voiman ja vastavoiman lakina*. Matematiikassa hän kehitti differentiaali- ja integraalilaskennan.

1800-luvun loppuun saakka pidettiin Newtonin mekaniikkaa oikeana, Kunnes *Albert Einstein* (1897–1955) esitti suhteellisuusteoriansa vuonna 1905. Hän perusti teoriansa pelkästään päätelmien varaan, ilman käytännön mittauskokeita. Einsteinin teorian mukaan Newtonin mekaniikka on likimääräinen, mutta kuitenkin erittäin tarkka, jos nopeudet ovat paljon pienempiä kuin valon nopeus (≈ 300 000 km/s).

1.3 Peruskäsitteet ja sanastoa

1. On olemassa absoluuttinen *aika (s)* ja *avaruus (m)*. Niiden määrittämiseen tarvitaan kello ja koordinaatisto.

2. *Jäykkä kappale* (rigid body) voi olla esimerkiksi palkki, palkkirakenne, sauva, kehä, tms. se on kuitenkin sellainen kappale, joka ei muuta muotoaan (esim. ei taivu), vaikka sitä kuormitetaan.

3. *Massa (kg)* (mass) on jokaisen kappaleen kyky vastustaa liiketilansa muutosta.

4. *Partikkeli* (particle) on massapiste. Se vastaa geometrisesti sellaisen pisteen käsitettä, jolla on massa. Kun puhutaan partikkelin statiikasta, tarkoittaa se vain jotain pistettä, johon voimat kohdistuvat. Se ei käsittele kappaleita, joilla on ulottuvuus.

5. *Vapaakappalekuvio, lyhenne vkk* on kuva tai piirros, jossa on tutkittava kappale tai sen osa, joka on ”irroitettu” ulkoisista tuennoista. Kuvioon on merkittävä kaikki ulkoiset voimat näkyviin niiden oikeille paikoille.

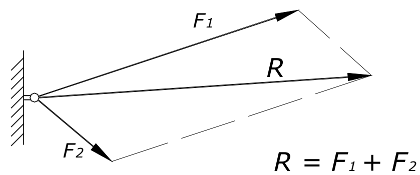
6. *Voima (N)* (force) on vektorisuure, toisin kuin esimerkiksi massa, joka on skalaarisuure. Voima on täysin määrätty vasta kun sen suunta, suuruus ja vaikustuspiste tiedetään.

7. *Resultantti* on kahden tai useamman voiman yhteisvaikutus.

1.4 Statiikan peruslait

1. SUUNNIKASLAKI

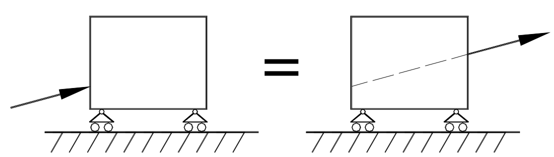
Tätä lakia voidaa havainnoida kahden voiman yhdistämisellä resultantiksi. Jos voimat F_1 ja F_2 yhdistetään, on tiedettävä niiden suunta ja suuruus (kuva 1.4.1). Esimerkkejä suuunikaslain soveltamisesta löytyy kappaleesta 2.2.



Kuva 1.4.1 Suunnikaslaki.

2. VOIMAN SIIRTOLAKI

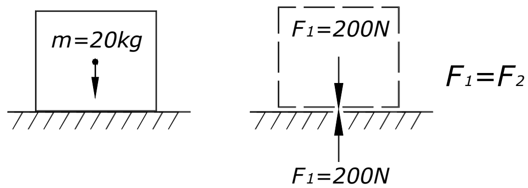
Voimaa saadaan siirtää pitkin vaikutussuoraa kuitenkaan muuttamatta sen suuruutta ja suuntaa (kuva 1.4.2). On yhdentekevää, ”vetääkö” vai ”työntääkö” kyseinen voima kapplaetta. Kappale on ulkoisesti samanarvoinen (kyseessä on jäykkä kappale).



Kuva 1.4.2 Voiman siirtolaki.

3. VOIMAN JA VASTAVOIMAN LAKI

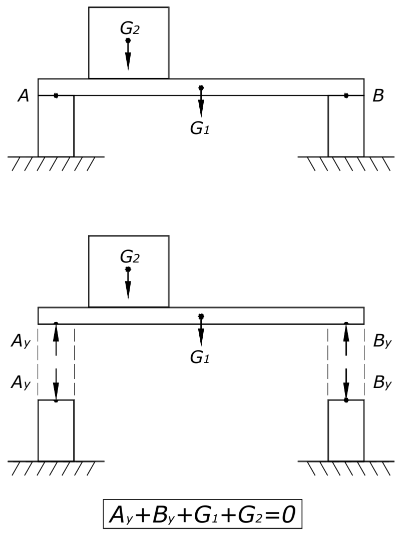
Jos tasolla olevan kappaleen (kuva 1.4.3) massa on 20 kg, vaikuttaa se tasoon voimalla 200 N (20kg x 9,81m/s^2). Myös taso vaikuttaa samalla voimalla kappaleeseen (200 N).



Kuva 1.4.3 Voiman ja vastavoiman laki.

4. HITAUDEN LAKI

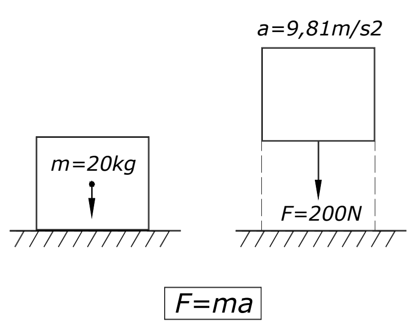
Kun jokin kappale on levossa, siihen vaikuttavien voimien summa on nolla (kuva 1.4.4). Yllä alkutilanne ja alla palkin vapaakappalekuvio esimerkkinä hitauden laista.



Kuva 1.4.4 Hitauden laki.

5. DYNAMIIKAN PERUSLAKI

Dynamiikan peruslaki on F = ma. Siitä saadaan voiman yksikkö (kgm/s^2). Kuvassa 1.4.5. on laatikko, jonka massa m on 20 kg. Jos halutaan tietää millä voimalla laatikko rasittaa tasoa, saadaan voima F = m·a, kun a on maan vetovoiman putoamiskiihtyvyys 9,81 m/s^2.



Kuva 1.4.5 Dynamiikan peruslaki.

2. PARTIKKELIN STATIIKKA

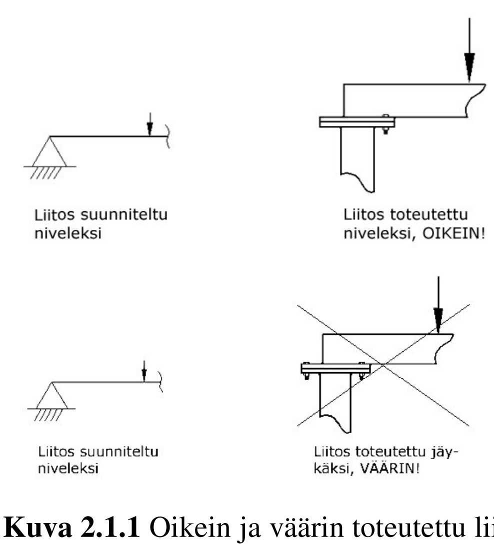
2.1 Rakennemalli ja vapaakappalekuvio (vkk)

Rakennemallin ja vapaakappalekuvion merkitys statiikan tehtävien ratkaisemisessa on erittäin suuri. Jos kuvioita ei pystytä muodostamaan, on tehtävän ratkaiseminen vaikeata tai lähes mahdotonta. Huolellisessa suunnittelussa on tärkeätä, että todellisesta rakenteesta osataan muodostaa oikea rakennetta vastaava rakennemalli ja vapaakappalekuvio. On myös tärkeätä, että suunnitellun rakenteen liitokset tehdään rakennemallia vastaaviksi (ks. kuva 2.1.1).

Vapaakappalekuviolla tarkoitetaan kuvaa rakenteesta, joka on ”irrotettu” ulkoisista tuennoista ja lisätty kyseisten tukien kohdalle oikeat tukireaktiot eli tukivoimat, tukikomponentit. Nämä kiinnitystapausta vastaavat tukikomponentit on esitetty talukossa 2.1.

Taulukko 2.1 Tuentatapaukset ja niiden komponentit. Lisää tuentatapauksia löytyy liitteestä 1.

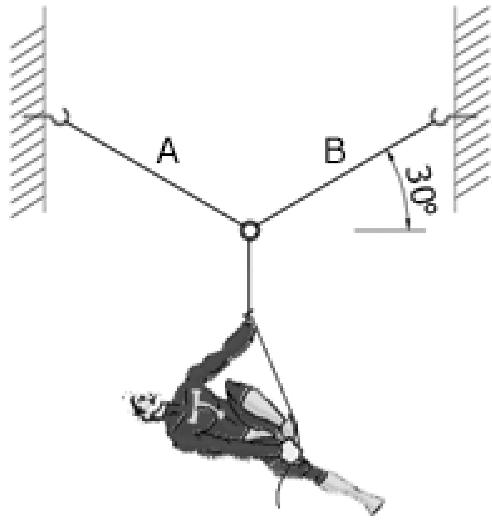
Tuentatapaus (Rakennemalli)	Tukikomponentit (vapaakappalekuva)
Niveltuki A	A_x A_y M_A
Liikkuva nivel A	A_y
Jäykkä tuki A	A_x A_y M_A



Kuva 2.1.1 Oikein ja väärin toteutettu liitos.

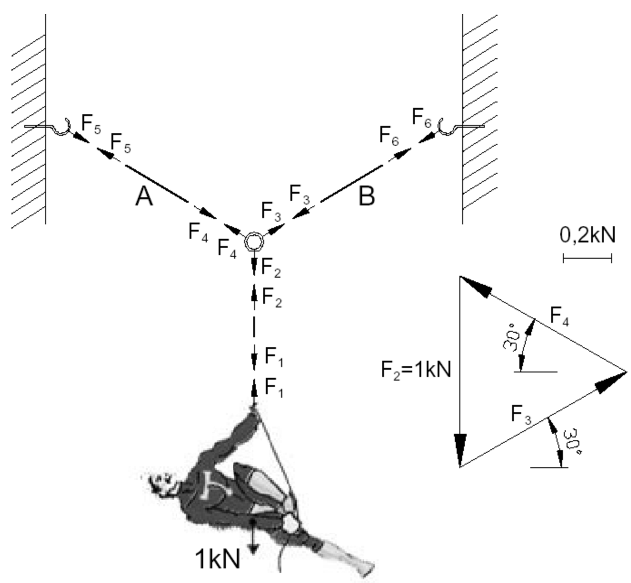
2.2 Esimerkkejä peruslakien soveltamisesta statiikassa

Esimerkki 1. Köysien varassa roikkuvan (kuva 2.2.1) ihmisen massa on 100 kg. Köysien päät on kiinnitetty ankkurikoukuilla seiniin, ja ne muodostavat 30^o kulman vaakatasoon nähden. Määritä köysien A ja B rasitukset, kun köysien omaa painoa ei huomioida ($g = 9{,}81\ m/s^2$).



Kuva 2.2.1 Köysien varassa roikkuva ihminen, jonka massa on 100 kg = 1 kN.

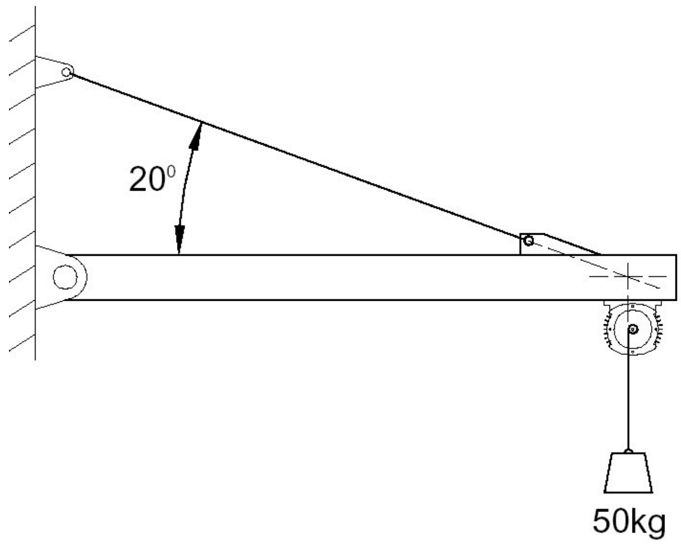
Ratkaisu: Rakenne on ensin jaettu osiin ja irrotettu ulkoisista tuennoista. Sitten on piirretty köysien ja lenkin vapaakappalekuviot (kuva 2.2.2). Esimerkin ratkaisussa sovelletaan suunnikaslakia eli niin sanottua kolmiolakia. Kun kuvio piirretään mittakaavassa, voidaan tuntemattomat voimat F_3 ja F_4 mitata.



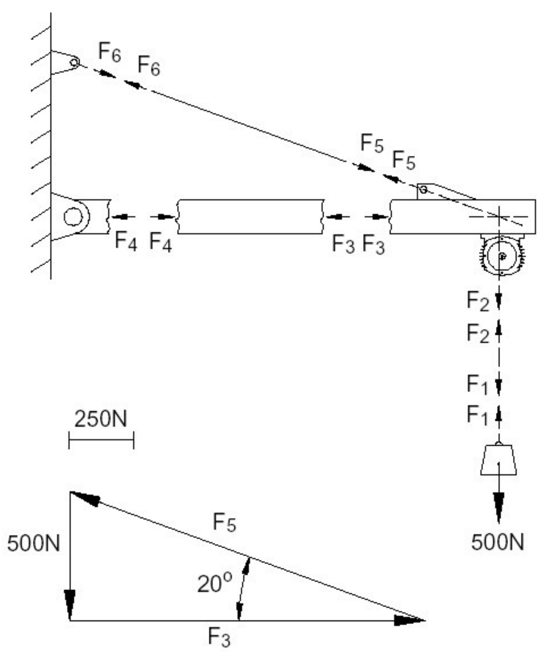
Kuva 2.2.2 Ratkaisu.

Esimerkki 2.

Nostin kannattelee suurinta sallittua taakkaa, joka on 50 kg (kuva 2.2.3). Määritä vinotangon ja palkin voimat, kun kulma on 20°. Moottori on asennettu kiinteästi palkin päähän siten, että tangon, palkin ja punnuksen keskilinjat leikkaavat samassa pisteessä.



Kuva 2.2.3 Nostin



Kuva 2.2.4 Ratkaisu.

Ratkaisu:

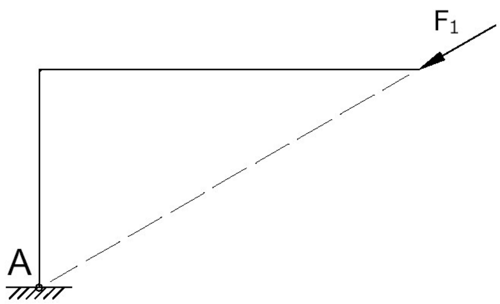
Irrotetaan rakenne ulkoisista tuennoista ja jaetaan kappaleet osiin (piirretään kappaleiden vkk:t).

Huom! Palkin jakaminen osiin edellyttäisi tietenkin kaikkien voimien esilletuomista leikkauskohdassa (lisäksi leikkausvoima ja momentti), koska kyseessä on jäykkä kappale.

$F_1 = F_2 = 500N$
$F_5 = F_6 \approx 1500N = 1,5\ kN$
$F_3 = F_4 \approx 1400N = 1,4\ kN$

Esimerkki 3.

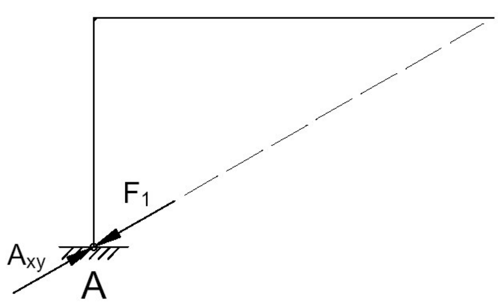
Kuvan 2.2.5 kulmakehään vaikuttaa yksi vinovoima F_1, jonka linja kulkee tukipisteen A kautta. Määritä jäykän tuen A rasitukset (tukivoimat).



Jos voima kulkee tarkasteltavan pisteen kautta, ei siihen synny momenttia, koska sen kohtisuora etäisyys voimaan nähden (a) on nolla.

$a = 0$
$M = F_1 \cdot a = 0$

Momentin määritelmään palataan kappaleessa 3.6.



Kuva 2.2.5 Kulmakehä

Ratkaisu:

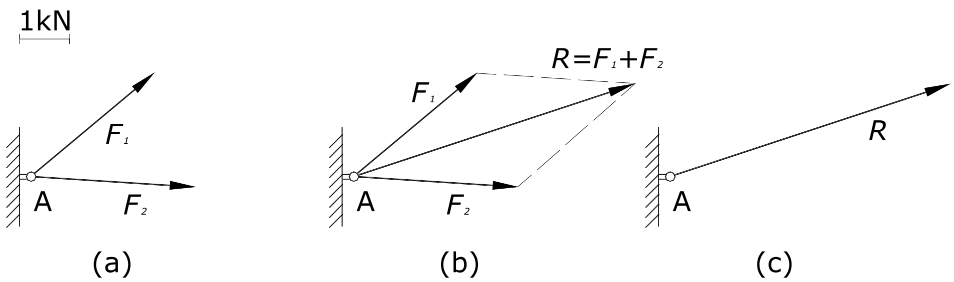
Voiman siirtolakia hyväksikäyttäen voidaan voima siirtää pitkin vaikutussuoraa kuitenkaan muuttamatta sen suuruutta tai suuntaa.

Tukivoima A_{xy} on yhtäsuuri kuin F_1, mutta vastakkaissuuntainen.

2.3 Voimat ja niiden yhdistäminen

Kuten jo aiemmin todettiin, voima on vektorisuure, jotta voima voidaan täydellisesti määrittää, on tiedettävä sen suunta, suuruus ja vaikuspiste. Jos nämä kolme suuretta ovat tiedossa, voidaan voimavektoreita laskea yhteen, vähentää ja jakaa komponentteihin noudattaen vektorien laskusääntöjä.

Kahden voiman yhdistämisessä voidaan käyttää graafista tai matemaattista menetelmää soveltaen siihen kohdassa 1.4 /Statiikan peruslait/ mainittua suunnikaslakia. Kahdesta voimasta yhdistettyä uutta voimavektoria nimitetään *resultantiksi (R)* ja näitä kahta voimaa, joista resultantti syntyy, kutsutaan *komponenteiksi (*F_1 *ja* F_2*)* (kuva 2.3.1).

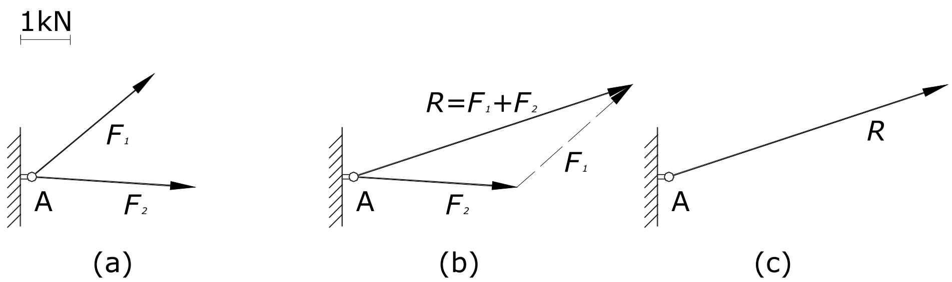


Kuva 2.3.1 Kahden voiman resultantti eli suunnikaslaki.

Kuvassa 2.3.1 on esitetty vaiheittain kahden voiman F_1 ja F_2 yhdistäminen yhdeksi eli resultantiksi R suunnikaslakia apuna käyttäen. Alkutilanne (a), seinässä olevaa ankkuria vetää kaksi köyttä kuvan osoittamalla tavalla. Kuvasta voidaan mitata voimien suunta ja suuruus. (b) Voimat F_1 ja F_2 on yhdistetty suunnikaslakia soveltaen ja piirretty siihen lävistäjä R resultantiksi. (c) Lopputilanteesta voidaan mitata resultantin R suunta ja suuruus.

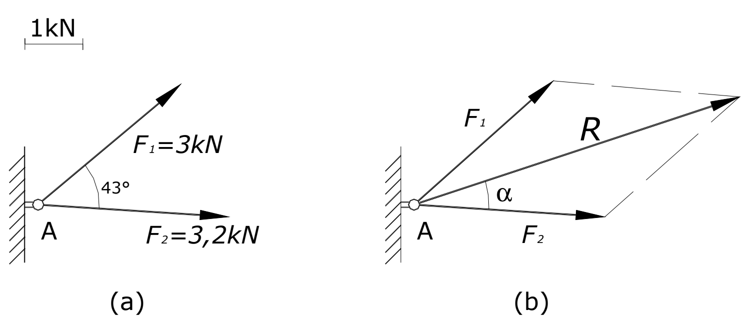
Olettaen että kaikki kuvassa esiintyvät kappaleet ovat jäykkiä, on tilanne kohdassa a ja b ulkoisesti samanarvoinen.

Samaan tulokseen päästään myös, jos jätetään suunnikkaan toinen puolisko pois. Tällöin käytetään niin sanottua *kolmiolakia.* Resultantti muodostuu nyt kolmion hypotenuusasta, ja kateetit ovat komponenttivoimat F_1 ja F_2 (kuva 2.3.2). Alkutilanne (a) on sama kuin kuvassa 2.3.1. (b) Voima F_1 on siirretty voiman F_2 jatkoksi, sen suuntaa tai suuruutta muuttamatta. (c) Lopputulos on sama kuin suunnikaslailla.



Kuva 2.3.2 Kahden voiman resultantti kolmiolakia apuna käyttäen.

Edellisissä tehtävissä ratkaistiin voimien yhdistäminen graafisesti. Seuraavassa tehtävässä (kuva 2.3.3) ratkaisemme saman kahden voiman yhdistämistehtävän analyyttisesti eli matemaattisesti.



Kuva 2.3.3 Kahden voiman resultantti, analyyttisesti.

Ratkaisu:

Kosinilauseella voidaan ratkaista resultantin suuruus:

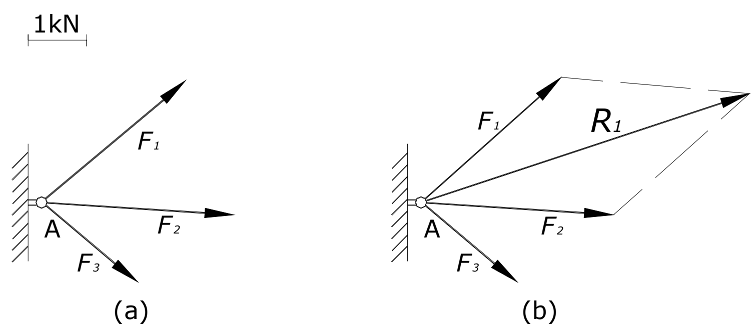
$$R^2 = (3^2 + 3{,}2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3{,}2 \cdot \cos 137°)kN^2$$
$$R = \sqrt{33{,}28kN^2} = 5{,}77kN$$

Sinilauseella voidaan selvittää resultantin kulma α:

$$\frac{5{,}77kN}{\sin 137°} = \frac{3kN}{\sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20{,}8°$$

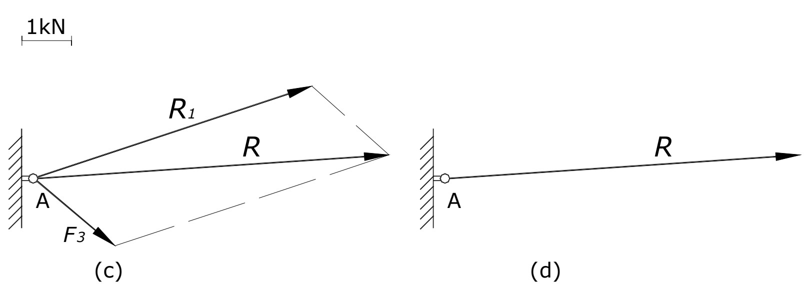
Usean voiman yhdistäminen tapahtuu samalla tavoin kuin yhden voiman yhdistäminen. Ensin valitaan kaksi voimaa ja yhdistetään ne resultantiksi edellä opittujen sääntöjen mukaisesti. Sitten voidaan yhdistää seuraava voima ja edellinen resultantti taas uudeksi resultantiksi. Näin jatketaan, kunnes kaikki voimat on yhdistetty ja lopullinen resultantti on selvitetty. Tehtävä voidaan ratkaista joko graafisesti tai analyyttisesti.

Kuvassa 2.3.4 on esitetty periaate usean voiman yhdistämisestä graafisesti. Esimerkki on sama kuin edellisessä tehtävässä, mutta siihen on lisätty voima F_3. Alkutilanne (a) seinässä olevaa ankkuria vetää kolme voimaa F_1, F_2 ja F_3. (b) Voimat F_1 ja F_2 yhdistetään suunnikaslain avulla resultantiksi R_1.



Kuva 2.3.4 Kolmen voiman resultantti graafisesti.

(c) Nyt voidaan resultantti R_1 ja voima F_3 yhdistää suunnikaslailla, josta saadaan uusi resultantti R. (d) Lopputuloksena kolmen voiman yhdistämisestä saatu resultanttivoima R voidaan mitata kuvasta. Kuvan 2.3.4a tapaus on ulkoisesti samanarvoinen kuin kuvan 2.3.5c.



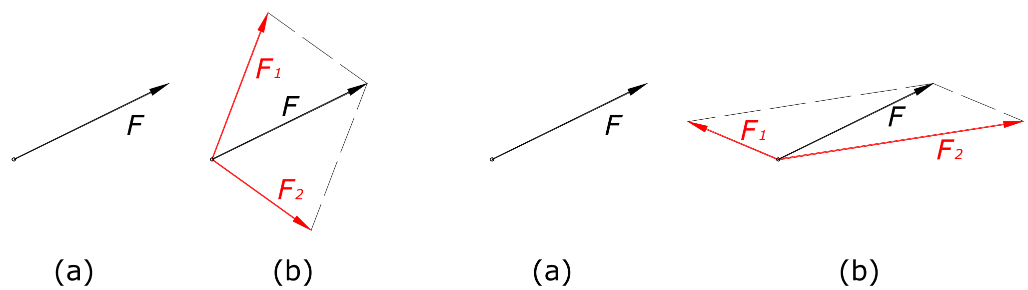
Kuva 2.3.5 Kolmen voiman resultantti graafisesti.

2.4 Voimien jako komponentteihin

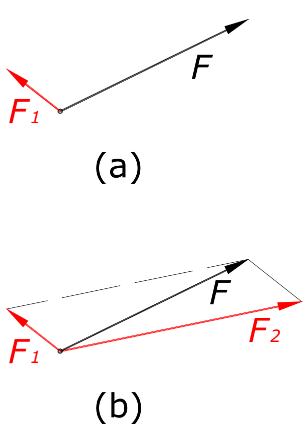
Tämä kappale on syytä opetella huolella. Voimien jakamista komponentteihin tarvitaan myöhemmin statiikassa useasti ja sen avulla voidaan ratkaista monia tehtäviä. <u>Tässä osiossa voiman komponentit ovat punaisella värillä ja niitä vastaava resultantti on musta.</u>

Voima voidaan jakaa lukemattoman moneen komponenttiin. Tasostatiikassa voima jaetaan usein kuitenkin vain kahteen komponenttiin. Komponenttilinjat, joihin voima jaetaan, voivat olla minkä suuntaiset hyvänsä, mutta eivät kuitenkaan samansuuntaiset. Statiikassa käytetään useimmiten kohtisuoria komponentteja. Niistä käytetään nimitystä *voiman suorakulmaiset komponentit.*

Kuvassa 2.4.1 on esimerkkejä siitä, miten voima jaetaan komponentteihin. Voima F jaetaan kahteen komponenttiin F_1 ja F_2. Kuten huomataan, voima F voidaan jakaa monella eri tavalla.



Kuva 2.4.1 Esimerkkejä voimien jakamisesta komponentteihin. (a) Alkutilanne. (b) Voimat jaettu.



Kuva 2.4.2 Komponentit.

Esimerkki 4.

Kuvassa 2.4.2a on voima F ja sen toinen komponentti F_1. Määritä toinen komponentti F_2.

Ratkaisu:

Suunnikaslakia hyödyntäen voidaan määrittää toinen komponentti F_2 (kuva 2.4.2b).

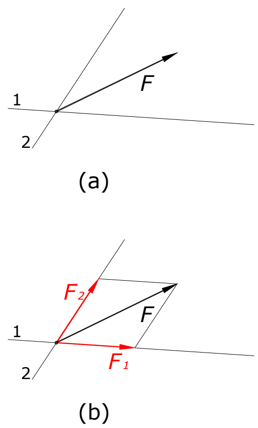
$$F_2 = F - F_1$$

Esimerkki 5.

Kuvassa 2.4.3a on voima F ja komponenttien vaikutussuorat 1 ja 2. Määritä komponenttivoimat.

Ratkaisu:

Suunnikaslakia hyödyntäen voidaan määrittää komponentit F_1 ja F_2 (kuva 2.4.2b).



Kuva 2.4.3 Vaikutussuorat.

SUORAKULMAISET KOMPONENTIT:

Statiikassa riittää usein kun, voima jaetaan suorakulmaisiin komponentteihin. Tämä tuleekin vastaan monessa tehtävässä ja se on syytä opetella tekemään aina samalla tavoin, jotta virhemahdollisuus pienenee.

Kun voima jaetaan suorakulmaisiin komponentteihin, on syytä käyttää koordinaatistoa apuna. Jos voimat täytyy jakaa johonkin muuhun kulmaan kuin vaaka- ja pystytasoon, voidaan koordinaatistoa kääntää haluttuun asentoon. Trigonometriasta seuraa, että x-akselin suuntaiset komponentit ovat aina cosα ja y-suuntaiset ovat sinα (kuva 2.4.4).

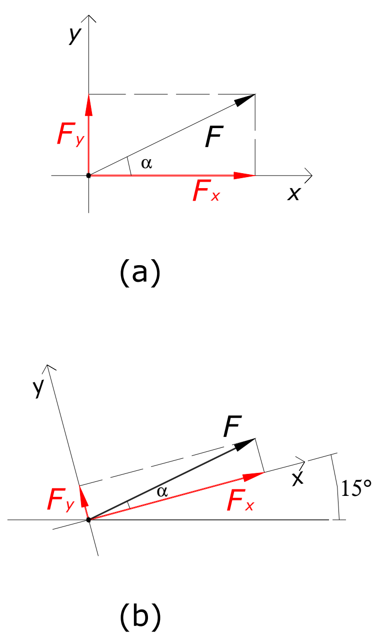
Koordinaatisto, komponentteihin jako:

a) Tavallinen tapaus, koordinaatiston x-akseli on vaakatasossa. Origo on voiman vaikutuspisteessä.

b) Koordinaatistoa on käännetty 15° esimerkiksi siksi, että rakenne ei ole ollut vaakatasossa.

Kun menetellään näin, pätevät molemmissa tapauksissa lauseet:

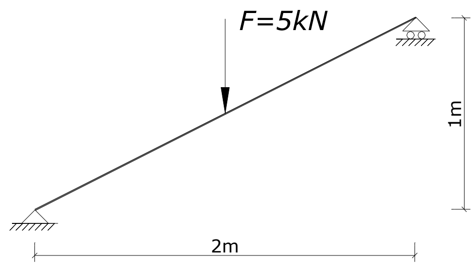
$$\begin{cases} \Sigma F_X = F \cdot \cos\alpha \\ \Sigma F_Y = F \cdot \sin\alpha \end{cases}$$



Kuva 2.4.4 Koordinaatiston sijoittaminen.

Esimerkki 6.

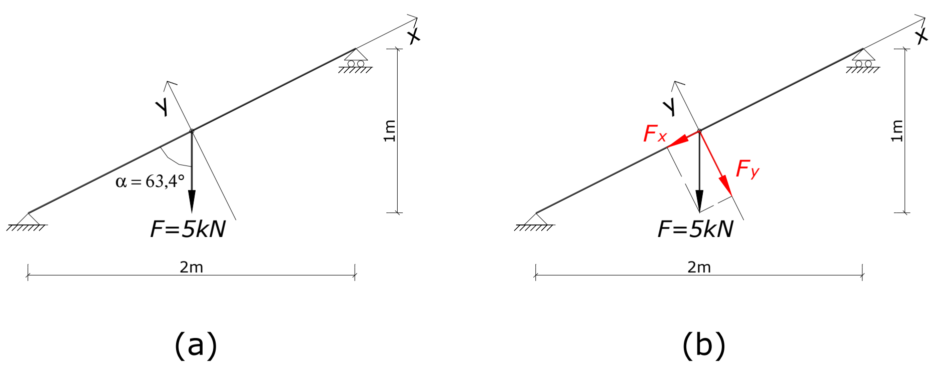
Vinossa olevaan palkkiin vakuttaa voima F (kuva 2.4.5). Jaa voima palkin suuntaiseen ja palkkia vastaan kohtisuoraan komponenttiin.



Kuva 2.4.5 Vino palkki.

Ratkaisu:

Voimaa voidaan aluksi siirtää pitkin vaikutussuoraa siten, että voiman loppupiste on palkissa (2.4.6a). Tämän jälkeen valitaan koordinaatiston origo voiman loppupisteeseen ja osoitetaan x ja y-akselien positiivinen suunta (2.4.6a). Kun kulma α tiedetään, voidaan laskea komponentit F_x ja F_y (2.4.6b).



Kuva 2.4.6 Voiman jakaminen palkin suuntaisiin komponentteihin.

$$\rightarrow \quad F_x = -5kN \cdot \cos 63{,}4° = -2{,}2kN$$
$$\uparrow \quad F_y = -5kN \cdot \sin 63{,}4° = -4{,}5kNkN$$

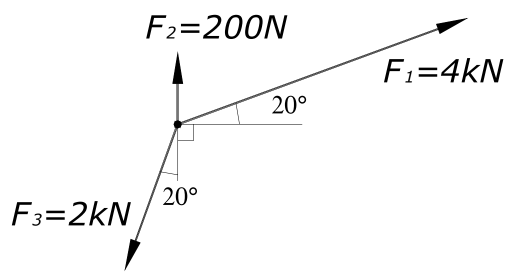
Etumerkkien suhteen on syytä olla tarkkana. Jos tulos osoittaa miinusmerkkisen vastauksen, on voima todellisuudessa koordinaatiston negatiiviseen suuntaan. <u>Suunnat ovat aina sidottuja koordinaatistoon!</u>

USEAN VOIMAN JAKO KOMPONENTTEIHEN

Jos useita voimia vaikuttaa samassa pisteessä, voidaan ne jakaa komponentteihin ja yhdistää edellä manitulla menetelmällä. Seuraavassa esimerkissä on näytetty kolmen voiman jako pysty- ja vaakasuuntaiseen komponenttiin.

Esimerkki 7.

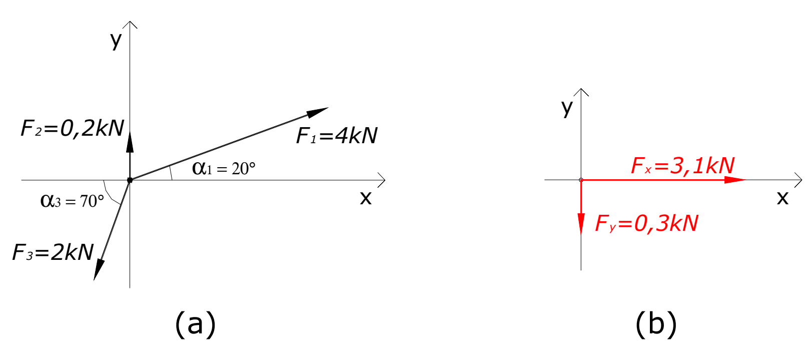
Jaa kuvan 2.4.7 voimat F_1, F_2 ja F_3 pysty- ja vaakakomponentteihin.



Kuva 2.4.7 Voimakuvio.

Ratkaisu:

Sijoitetaan koordinaatisto voimien vaikutuspisteeseen (kuva 2.4.8). Jaetaan kaikki voimat yksi kerrallaan x- ja y-suuntaisiin komponentteihin. (a) Aluksi selvitetään voimien kulmat x-akseliin nähden ja muutetaan yksiköt samoiksi (kN). (b) Lopputulos huomioiden etumerkeissä F_y on alaspäin, koska tulos oli miinusmerkkinen.



Kuva 2.4.8 Voimien jako suorakulmaisiin komponentteihin.

Muunnokset:

$$F_2 = 200N = 0{,}2kN$$
$$\alpha_3 = 90° - 20° = 70°$$

Vaaka- ja pysty-yhtälöt:

$$\rightarrow \quad \Sigma F_x = F_1 \cdot \cos\alpha_1 - F_3 \cdot \cos\alpha_3$$
$$\uparrow \quad \Sigma F_y = F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 - F_3 \cdot \sin\alpha_3$$

$$\rightarrow \quad \Sigma F_x = 4kN \cdot \cos 20° - 2kN \cdot \cos 70° = 3{,}1kN$$
$$\uparrow \quad \Sigma F_y = 4kN \cdot \sin 20° + 0{,}2kN - 2 \cdot \sin 70° = -0{,}3kN$$

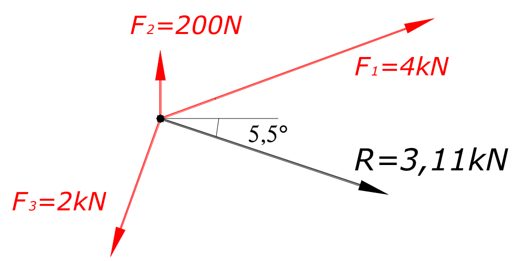
Jos vielä halutaan tietää edellisen tehtävän resultantin suunta ja suuruus, voidaan se laskea helposti neliöjuurilausekkeella. Kuvassa 2.4.9 on näytetty alkuperäiset voimat punaisella ja niitä vastaava resultanttivoima.

Resultantin suuruus:

$$\Sigma R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}$$
$$\Sigma R = \sqrt{3{,}1^2 + 0{,}3^2}\, kN = 3{,}11kN$$

Kulma α x-akseliin nähden:

$$\tan\alpha_x = \frac{F_y}{F_x}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{0{,}3kN}{3{,}1kN} \approx 5{,}5°$$



Kuva 2.4.9 Kolmen voiman resultantti.

<u>SUORAKULMAISIIN KOMPONENTTEIHIN JAON MUISTISÄÄNNÖT:</u>

1. Siirrä voimien vaikutuspisteet (loppupisteet) samaan kohtaan. Muista, että voimia saa siirtää vain vaikutussuoraansa pitkin suuntaa ja suuruutta muuttamatta.

2. Piirrä koordinaatisto ja käännä sitä tarpeen vaatiessa. Laske voimien kulmat x-akseliin nähden.

3. Jaa voimat komponentteihin. Muista huomioida etumerkit:

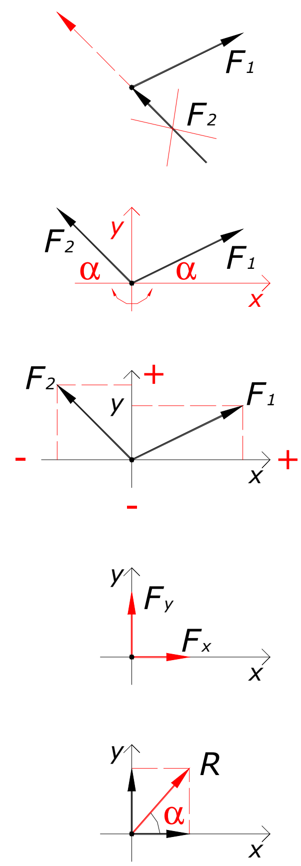
$$\begin{cases} \Sigma F_X = F \cdot \cos\alpha \\ \Sigma F_Y = F \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

4. Piirrä komponentit oikeaan suuntaan huomioiden etumerkit.

5. Laske tarvittaessa koko voimasysteemin resultantti ja sen suunta:

$$\Sigma R = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

$$\tan\alpha_x = \frac{F_y}{F_x}$$



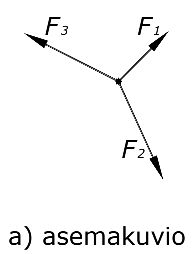
Kuva 2.4.10 Komponenttimenetelmä.

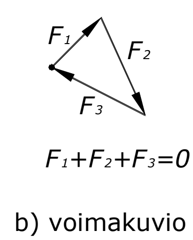
2.5 Tasapaino

Statiikan tehtävien ratkaiseminen perustuu useimmiten tasapainoon. Kappaleessa 1.4 /Statiikan peruslait/ mainitusta hitauden laista seuraa: *kun jokin kappale on levossa, siihen vaikuttavien voimien summa on nolla.* Eli jos partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti on nolla, partikkeli on joko levossa tai liikkuu vakionopeudella suoraa pitkin. Jos partikkeli liikkuu, kuuluu tehtävä dynamiikkaan eli liikeoppiin. Tämä materiaali käsittelee vain tasapainoon perustuvia tehtäviä eli statiikkaa.

Käytännössä rakennusten osat ovat lähes poikkeuksetta tasapainossa. Esimerkiksi jokin rakennuksessa oleva pakki on tasapainossa eikä liikkeessä. Siihen vaikuttavien ulkoisten voimien summa on siis nolla. Kun taas puhutaan mekanismista, voi mukana olla liikettä. Erilaisia mekanismeja voidaan kuitenkin ratkaista statiikan tasapainoehdoilla. Tyypillinen mekanismi voi olla vaikkapa ontelolaatan nostolaite.

Kuvassa 2.5.1 on partikkelipiste, johon vaikuttaa kolme voimaa F_1, F_2 ja F_3. Onko voimasysteemi tasapainossa? Jos voimat F_1, F_2 ja F_3 yhdistetään (summataan), havaitaan, että tulos on nolla. Sama ilmenee graafisesti: kuvan 2.4.1b voimakuviosta nähdään, että se sulkeutuu.





Kuva 2.5.1 Kolmen voiman voimasysteemi.

Tasapainotehtävät voidaan ratkaista kolmella eri tavalla: trigonometrisesti, graafisesti tai projektioyhtälöillä (komponenttimenetelmä). Näistä kaksi viimeistä ratkaisumallia ovat käyttökelpoisimpia menetelmiä.

GRAAFINEN RATKAISU

Tällä menetelmällä ratkaistaan tehtävä piirtämällä voimat mittakaavaan ja oikeassa kulmassa toisiinsa nähden. Voimakuvion on aina sulkeuduttava kuten kuvassa 2.5.1b, jotta partikkeli tai kappale on tasapainossa. Graafinen ratkaisumalli on aina hieman likimääräinen menetelmä. Valitsemalla tarpeeksi suuri mittakaava ja noudattamalla huolellisuutta voidaan kuitenkin päästä riittävän tarkkaan lopputulokseen. Tämä menetelmä on hyvin käyttökelpoinen esimerkiksi tarkastettaessa tehtävää, joka on laskettu jollakin muulla menetelmällä.

PROJEKTIOYHTÄLÖILLÄ RATKAISEMINEN

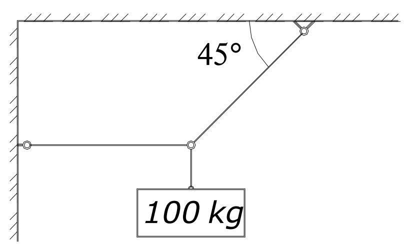
Komponenttimenetelmä, jota jo edellisessä kappaleessa käsiteltiin, on käyttökelpoisin menetelmä tasapainotehtävien ratkaisemiseen. Tehtävässä voi olla ainoastaan kaksi tuntematonta voimaa, koska projektioyhtälöitä on vain kaksi (pysty- ja vaakayhtälö). Jos tuntemattomia voimia on enemmän kuin kaksi, on tehtävä staattisesti määräämätön eli hyperstaattinen. Tämän tehtävän ratkaisu kuuluu kimmo- ja lujuusoppiin.

Kun tiedetään, että jokin kappale tai partikkeli on tasapainossa, voidaan tehtävä ratkaista asettamalla pysty- ja vaakayhtälöiden summaksi nolla. Tästä muodostuu yhtälöpari, joka on ratkaistavissa matematiikan sääntöjen mukaisesti:

$$\rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$$
$$\uparrow \quad \Sigma F_y = 0$$

Esimerkki 8.

Kuvassa 2.5.2 on tankojen varassa roikkuva punnus. Mitkä ovat ripustustankojen rasitukset?



Kuva 2.5.2 Punnus tankojen varassa.

Ratkaisu:

Kun tiedetään, että systeemi on tasapainossa, voidaan tehtävä ratkaista asettamalla pysty- ja vaakayhtälöt nollaksi ($F_x = 0$ ja $F_y = 0$). Muunnetaan ensiksi punnus voimaksi F_1:

$$F_1 = 100kg \cdot 10\frac{m}{s^2} = 1000N = 1kN$$

Tehtävän ratkaisuun riittää, että piirretään vapaakappalekuvio renkaan kohdalta. Nyt voidaan tuntemattomat voimat merkitä näkyviin (F_2 ja F_3) ja kirjoittaa projektioyhtälöt.

Projektioyhtälöt:

$\rightarrow \quad F_2 \cdot \cos 45° - F_3 = 0$

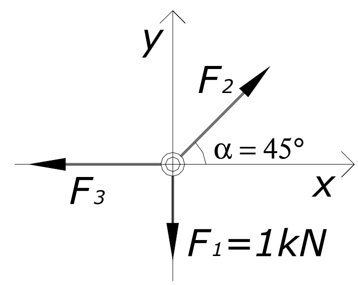
$\uparrow \quad -1kN + F_2 \cdot \sin 45° = 0$

Pysty-yhtälöstä seuraa:

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{1kN}{\sin 45°} = 1{,}4kN$$

$$\Rightarrow \quad F_3 = F_2 \cdot \cos 45°$$

$$F_3 = 1{,}4kN \cdot \cos 45° = 1kN$$



Kuva 2.5.3 Vapaakappalekuvio.

3. Jäykän kappaleen tasostatiikka

3.1 Yleistä

Jäykän kappaleen statiikassa joudutaan tekemään olettamuksia, kuten kappaleessa 1.1 /Mekaniikka/ on kerrottu. Olettaen että kappaleet ovat täysin jäykkiä, voidaan tehtävät ratkaista tasapainoehdoilla. Ehtoja (yhtälöitä) on kolme: vaaka,- pysty- ja momenttiyhtälö. Tukivoimien ratkaiseminen perustuu tasapainoon. Tästä seuraa edelleen, että kunkin yhtälön tulo on oltava nolla samoin kuten partikkelin statiikassa.

Jäykän kappaleen statiikassa on otettava kappaleen muoto (dimensiot) huomioon. Esimerkiksi palkkia on käsiteltävä ikään kuin se koostuisi useasta partikkelista, jotka ovat kiinni toisissaan. Tästä syystä joudutaan momentti huomioimaan tehtävien ratkaisussa. Tässä keskitytään kuitenkin vain tasostatiikkaan, joten kaksiulotteinen koordinaatisto on riittävä.

Kappaleeseen vaikuttavat voimat voidaan jakaa kahteen ryhmään: ulkoisiin ja sisäisiin voimiin. Ulkoisia voimia voivat olla esimerkiksi maan vetovoima, tukivoimat tai kitkavoimat. Ulkoisia voimia kutsutaan usein kuormituksiksi, ja niistä osa voi olla tunnettuja ja osa tuntemattomia. Statiikan tavoite on saada selville kappaleen sisäiset voimat eli rasitukset. Kun rasitukset on saatu selville ja kappaleen rasituskuviot on piirretty, voidaan kappale mitoittaa kyseisiä rasituksia vastaan. Sisäisten voimien tarkastelu ja mitoitus kuuluvat kuitenkin lujuusopin alaan.

Statiikan tavoite on

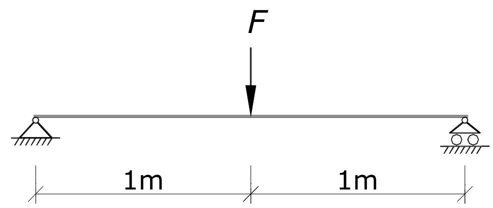
- **tukivoimien ratkaiseminen**
- **kappaleen rasituskuvioiden piirtäminen.**

3.2 Rakennemallit

Rakennemallilla tarkoitetaan todellisesta rakenteesta piirrettyä ”rautalankamallia”, jossa on esitetty kappaleen tukilaitteet, tunnetut ulkoiset voimat (kuormitukset) ja tarvittavat mitat. Rakennemallin tulee vastata todellista rakennetta. Jos esimerkiksi rakenne suunnitellaan jäykällä kiinnityksellä, on se myös toteutettava jäykäksi, sillä muuten palkin mitoitus ja laskenta antavat vääriä tuloksia. Rakennemalleissa käytetään erilaisia merkintöjä, jotka parantavat mallin havainnollisuutta. Kuvassa 3.2.1 on näytetty tyypillisiä rakennemallien merkkiselityksiä.

Kuva 3.2.1 Rakennemallien osia ja merkintöjä.

Tukilaitteita on esitetty jo aiemmin kappaleessa 2.1 /Rakennemalli ja vapaakappalekuvio/. Tuentatapauksia löytyy lisää liitteestä 1. Kuvassa 3.2.2 on esitetty tavallisen palkin rakennemalli tuen-toineen.

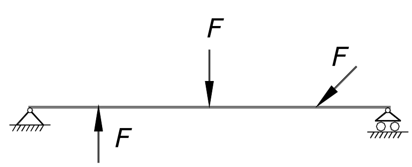


Kuva 3.2.2 Rakennemalli palkista.

3.3 Kuormitustapauksia, niiden jakautumista ja resultantteja

Kuormitustapausten määrittäminen ja käsitteleminen on hallittava statiikan tehtäviä ratkaistaessa ja rakenteita suunniteltaessa. Rakennesuunnittelu alkaa usein kuormitusten selvittämisellä, ja kaikki laskenta siitä eteenpäin perustuu aiemmin määriteltyihin kuormituksiin. On selvää, että kuormitusten laskennassa tulee olla erittäin huolellinen, sillä muuten tehtävän muu laskenta on turhaa ja tulokset voivat olla pahasti pielessä. *Kun lasketaan rakenteiden kuormituksia, on mietittävä aina ovatko tulokset varmasti oikein.*

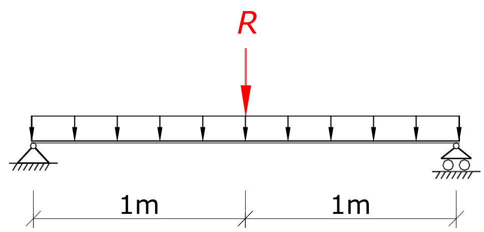
Pistevoimat:
Pistevoimat voivat aiheutua pistemäisistä rakenteista, kuten pilarista tai palkin päästä. Pistevoimia ei oikeastaan voi jakaa muuten kuin komponentteihin. Pistevoiman symboli on [F] ja kuvake on nuoli (kuva 3.3.1a).



Kuva 3.3.1a Pistevoimia palkissa.

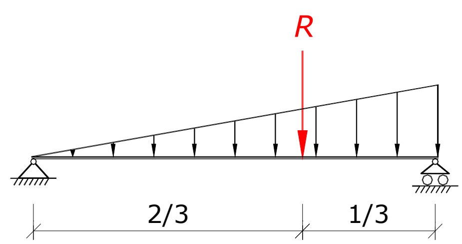
Tasainen kuorma:
Tyypillisesti tasaista kuormitusta aiheuttavat laatastolta palkille tulevat kuormat. Tasaisen kuorman jakautumista on esitetty kuvassa 3.3.1b ja esimerkissä 6. Tasaisen kuorman symboli on usein muuttuvalla kuormituksella [q] ja pysyvällä [g] (joskus myös isoilla kirjaimilla). Kuvake on laatikko, jossa voimanuolia on tasaisesti.

Kuvassa 3.3.1b on rakennemalli palkista, jossa on tasainen kuormitus. Tasan jakautunut kuorma voidaan korvata resultantilla R, kun ratkaistaan tukivoimia. Rasituskuvioita piirrettäessä on kuitenkin käytettävä tasaista kuormitusta eikä resultanttia. <u>Tasainen kuormitus voidaan korvata siis vain tukivoimien laskennan ajaksi resultantilla.</u>



Kuva 3.3.1b Tasaisesti kuormitettu palkki.

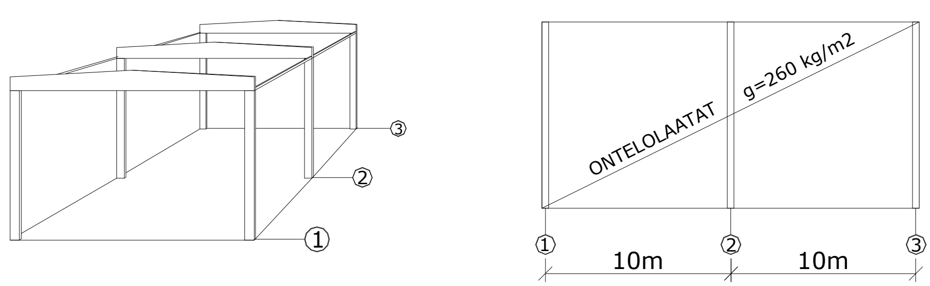
Kolmiokuorma:
Kolmiokuorma on kuten tasainen kuorma, mutta se kasvaa lineaarisesti toiseen suuntaan (kuva3.3.1c). Kolmiokuorman resultantti on kolmasosapisteessä (kolmion painopisteessä). Kolmiokuorma voi aiheutua esimerkiksi lumen epätasaisesta kinostumisesta. Kuorman kuvake on kuten tasaisen kuorman, mutta se on kolmion muotoinen ja symboli on [g] tai [q].



Kuva 3.3.1c Kolmiokuorma.

Esimerkki 9.

Esitä, miten kuvan 3.3.2 teollisuushallin ontelolaattojen kuormat jakautuvat harjapalkeille 1, 2 ja 3. Ontelolaatat asennetaan harjapalkkien päälle. Kehäväli on 10 m ja ontelolaattojen paino on 260 kg/m^2.



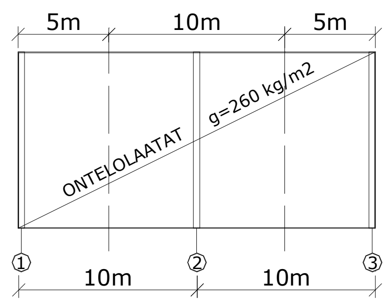
Kuva 3.3.2 Teollisuushalli. Vasemmalla periaatepiirros ja oikealla pohjakuva.

Ratkaisu:

Tasainen neliökuorma jakaantuu aina palkkilinjojen puolivälistä (kuva 3.3.3). Aluksi on kuitenkin muutettava ontelolaattojen massa kuormitukseksi.

Muunnokset:

$$g_{ol} = 260kg / m^2 = 2{,}6kN / m^2$$



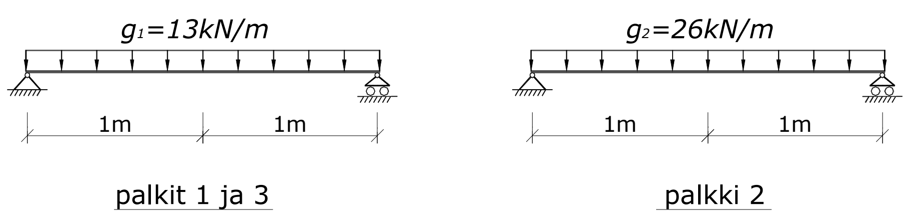
Kuva 3.3.3 Ontelolaattojen kuormituksen jakautuminen.

Palkeille 1 ja 3 tuleva kuormitus:

$$g_1 = 2{,}6kN / m^2 \cdot 5m = 13kN / m$$

Palkille 2 tuleva kuormitus:

$$g_2 = 2{,}6kN / m^2 \cdot 10m = 26kN / m$$



Kuva 3.3.4. Harjapalkkien rakennemallit ja kuormitukset.

3.4 Voiman momentti

Jos voima ei kulje tarkasteltavan partikkelipisteen kautta jäykässä kappaleessa, se aiheuttaa momenttia kyseiseen pisteeseen. Momentin suuruus on suoraan verrannollinen momenttivarren pituuteen. Momentin määritelmä on

$$M = F \cdot a$$

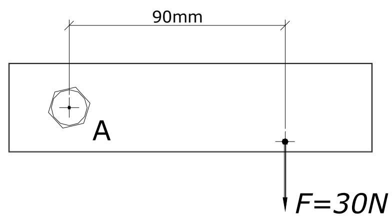
M = momentti pisteen suhteen

F = voima

a = voiman kohtisuora etäisyys pisteeseen

Esimerkki 10.

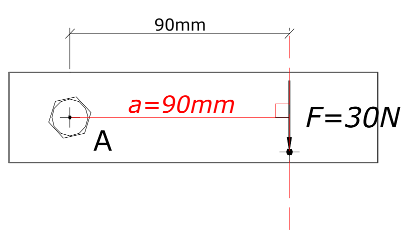
Kuvassa 3.4.1 on levy, jonka oletaan olevan jäykkä. Levy on kiinnitetty pisteestä A pultilla ja sitä vetää voima F, joka vaikuttaa pisteessä B. Mikä on pultin kohdalla pisteessä A vaikuttava momentti?



Kuva 3.4.1 Voiman momentti.

Ratkaisu:

Momentin määritelmän mukaisesti: *momentti on voima kertaa voiman kohtisuora etäisyys*. Voimaa F voidaan siirtää pitkin vaikutussuoraa, jotta saadaan voimalle kohtisuora etäisyys pisteeseen A nähden (kuva 3.4.2).



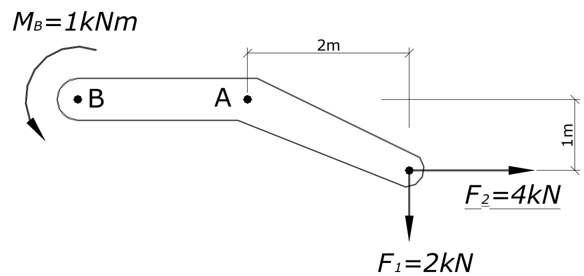
Kuva 3.4.2 Voiman momentti pisteen A suhteen.

Momentin suuruus:

$M = F \cdot a = -30N \cdot 0{,}09m = -2{,}7Nm$ (myötäpäivään)

Esimerkki 11.

Vipu on kiinni akselissa pisteestä A. Vipuun vaikuttaa kaksi voimaa F_1 ja F_2. Lisäksi pisteessä B vaikuttaa momentti M_B. Mikä on pisteen A momentti (kuva 3.4.3)?



Kuva 3.4.3 Vipu.

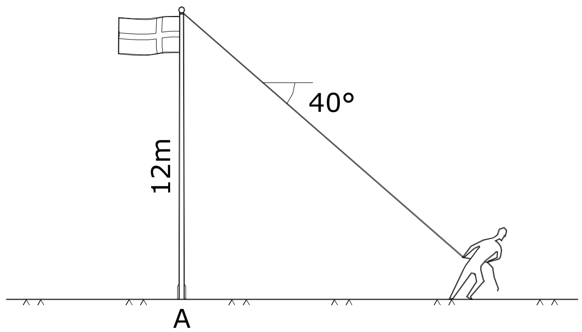
Ratkaisu:

Pisteen A momentti saadaan kertomalla kaikki voimat etäisyyksineen ja summaamalla ne suunnat huomioiden (vastapäivään on positiivinen suunta). Pistemäinen momentti on kappaleen jokaisessa pisteessä sama, eikä sitä tarvitse kertoa etäisyydellä.

$$M_A = -F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + M_B$$
$$M_A = -2kN \cdot 2m + 4kN \cdot 1m + 1kNm = 1kNm$$

Esimerkki 12.

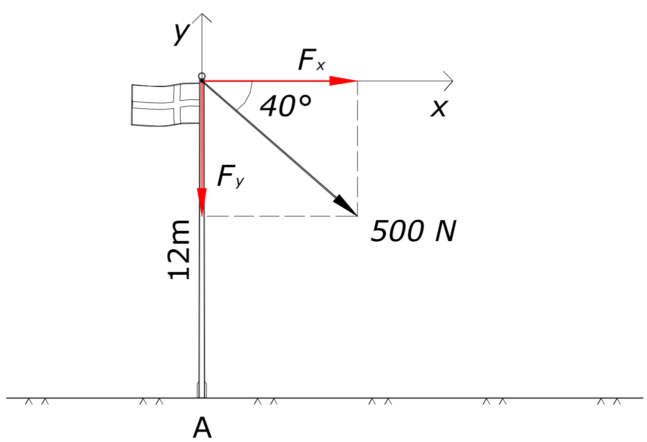
Kuvassa 3.4.4 on lipputanko, jota vedetään köydellä 500 N:in voimalla. Kuinka suuri momentti on lipputangon juuressa pisteessä A, kun lipputangon korkeus on 12 m?



Kuva 3.4.4 Lipputankoa vedetään 500N voimalla.

Ratkaisu:

Koska voiman kohtisuoraa etäisyyttä ei voida heti päätellä, on voima helpoin jakaa komponentteihin. Voima on syytä tässä jakaa lipputangon suuntaiseen ja siihen nähden kohtisuoraan komponenttiin (kuva 3.4.5). F_y-suuntaisesta komponentista ei aiheudu momenttia, koska voiman kohtisuora etäisyys on nolla. Ainoa voima, joka aiheuttaa momettia pisteeseen A, on siis komponentti F_x ja sen kohtisuora etäisyys on nyt helppo todeta.



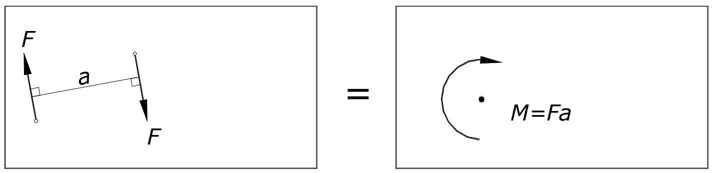
Kuva 3.4.4 Komponentteihin jaettu voima.

$$F_x = 500N \cdot \cos 40° = 383{,}0N$$

$$M_A = -383{,}0N \cdot 12m = 4596{,}3Nm \approx -4{,}6kNm$$

3.5 Voimaparin momentti

Voimaparilla tarkoitetaan kahta yhdensuuntaista voimaa, jotka ovat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset (kuva 3.5.1). Voimapari muodostaa aina momentin. Sitä kutsutaan joskus myös puhtaaksi pyörittäjäksi, koska se ei liikuta kappaletta vaan pyrkii ainoastaan pyörittämään sitä. Voimaparin momentti on minkä tahansa pisteen ympäri laskettuna yhtä suuri.



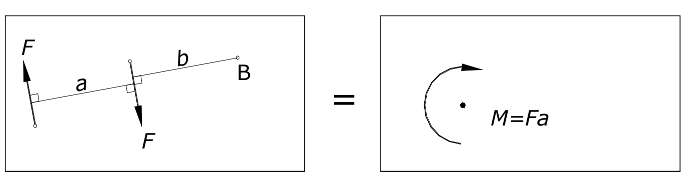
Kuva 3.5.1 Kahden voiman voimapari aiheuttaa momentin M.

Voimaparin momentin suuruus on aina minkä tahansa pisteen suhteen:

$$M = F \cdot a$$

M = momentti
F = voimaparin yhden voiman suuruus
a = voimien välinen etäisyys

Edellinen voidaan todeta kuvan 3.5.1 esimerkillä. Levyyn vaikuttaa kaksi voimaa, joiden suuruus on F. Ne ovat yhdensuuntaisia mutta erimerkkisiä. Voimien etäisyys toisistaan on a. Valitaan nyt mielivaltainen piste B ja lasketaan momentti sen ympäri (kuva 3.5.2).



Kuva 3.5.2 Voimapari minkä tahansa pisteen ympäri on Fa.

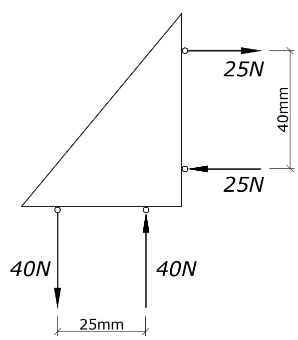
Lasketaan voimaparin momentti pisteen B ympäri:

$$M = -F \cdot (a+b) + F \cdot b$$
$$M = -Fa - Fb + Fb$$
$$M = -Fa$$

Voimaparin momentti on siis aina minkä tahansa pisteen ympäri Fa. Miinusmerkki ilmoittaa momentin pyörimissuunnan, joka on myötäpäivään. Kuvaan 3.5.2 ei ole enää merkitty momentille miinusmerkkiä, koska pyörimissuunta on piirretty myötäpäivään.

Esimerkki 13.

Mikä on kuvan 3.5.3 esittämän voimasysteemin momentti, kun voimaparit yhdistetään?



Kuva 3.5.2 Voimapari minkä tahansa pisteen ympäri on Fa.

Ratkaisu:

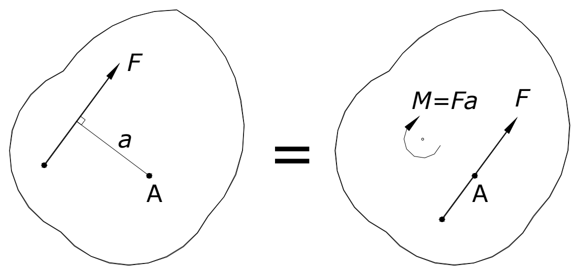
Kuten jo edellä todettiin, voimaparin momentti on sama minkä tahansa pisteen ympäri. Lasketaan siis momenttit ja summataan ne:

$$\sum M = +40N \cdot 25mm - 25N \cdot 40mm = 0Nmm$$

Systeemi on siis tasapainossa!

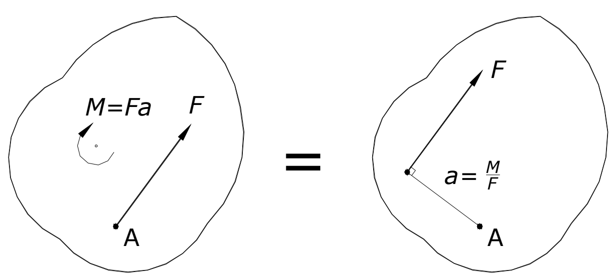
3.6 Voiman yhdensuuntaissiirto

Voiman vaikutuspistettä voidaan siirtää jäykässä kappaleessa, kun siihen lisätään momentti, jonka suuruus yhtä suuri kuin alkuperäisen voiman momentti uuden vaikutuspisteen suhteen. Voiman suuntaa tai suuruutta ei kuitenkaan saa muuttaa. Kuvassa 3.6.1 on esitetty periaatekuva voiman yhdensuuntaissiirrosta. Voimasysteemi on aina ulkoisesti sama, jos näin menetellään.



Kuva 3.6.1 Voiman yhdensuuntaissiirto.

Voiman yhdensuuntaissiirto voidaan tehdä myös päinvastaisesti kuin edellä, jos kappaleessa on jokin voima ja momentti. Kuvassa 3.6.2 on sama tilanne kuin edellisessä kuvassa. Kappaleeseen vaikuttavat voima F pisteessä A ja pistemomentti M. Mihin voimaa F on siirrettävä, jotta momentti saadaan poistetuksi ja voimasysteemi pysyy ulkoisesti samana?



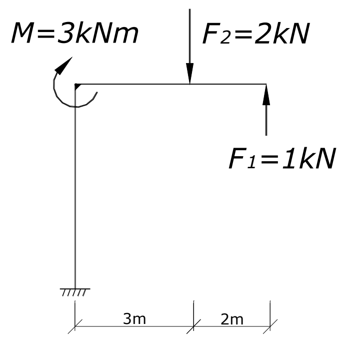
Kuva 3.6.2 Voimasysteemin yhdistäminen.

Voimaa F on siis siirrettävä sellaiseen pisteeseen, josta aiheutuva momentti alkuperäisen pisteen suhteen on sama kuin pistemomentti M. Nyt voimasysteemi on ulkoisesti sama. Etäisyys a on:

$$a = \frac{M}{F}$$

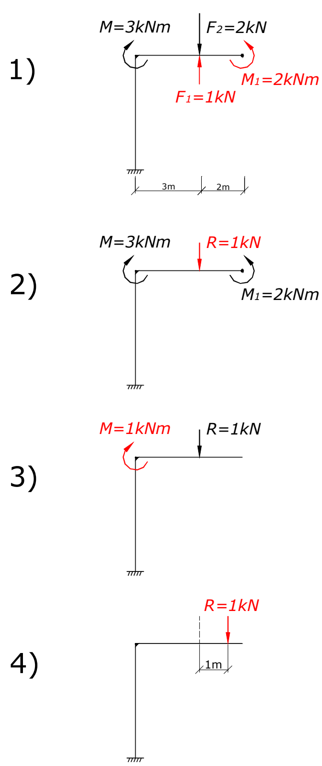
Esimerkki 14.

Yhdistä kuvan 3.6.3 kulmakehän voimasysteemi.



Kuva 3.6.3 Kulmakehä.

Ratkaisu:



1) Siirretään ensin voima F_1 voiman F_2 vaikutuspisteeseen yhdensuuntaissiirtoa apuna käyttäen:

$$M_1 = +1kN \cdot 2m = 2kNm$$

2) Yhdistetään voimat F_1 ja F_2 resultantiksi R:

$$R = F_1 - F_2 = 1kN - 2kN = -1kN$$

3) Yhdistetään momentit M ja M_1:

$$M_1 - M = 2kNm - 3kNm = -1kNm$$

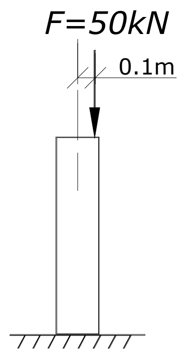
4) Siirretään resultanttivoimaa matkan a verran:

$$a = \frac{M}{R} = \frac{|-1kNm|}{|-1kN|} = 1m$$

Kuva 3.6.4 Voimien yhdistäminen.

Esimerkki 15.

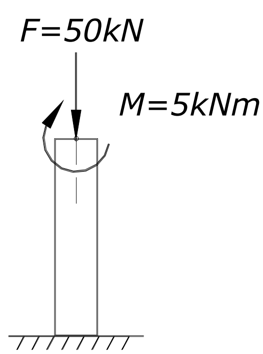
Kuvan 3.6.5 pilariin vaikuttaa epäkeskeinen kuorma F, jonka suuruus on 50 kN. Siirrä kuorma pilarin keskelle voiman yhdensuuntaissiirtona.



Kuva 3.6.5 Pilari.

Ratkaisu:

Siirretään voima yhdensuuntaissiirtona ja lisätään pilarin päähän momentti, joka aiheutuu voiman siirrosta (kuva 3.6.6).



Kuva 3.6.6 Pilari.

Momentin suuruus:

$$M = -50kN \cdot 0.1m = -5kNm$$

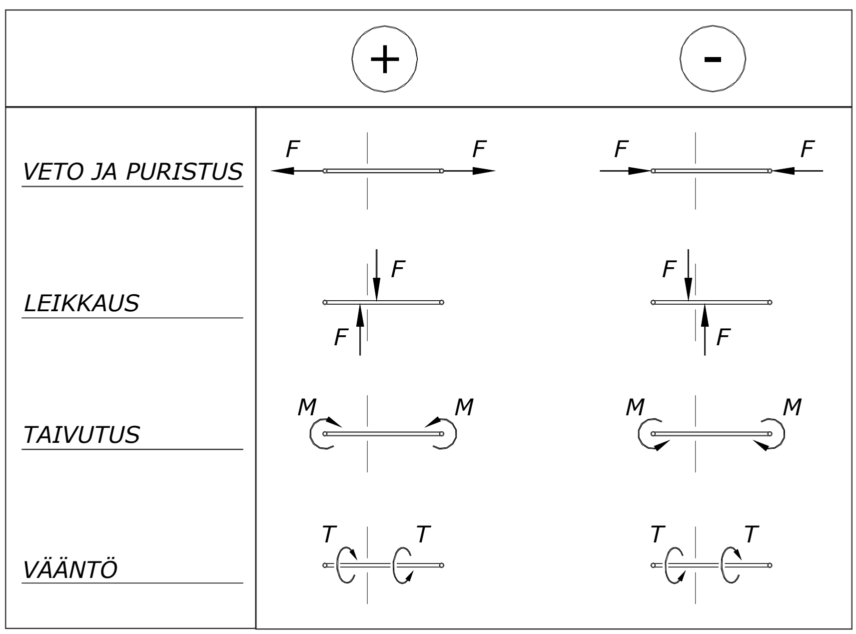
3.7 Rasituslajit

Kuten jo edellä todettiin, statiikka pyrkii selvittämään kappaleen rasitukset eli sisäiset voimat. Kappaleen muodosta ja kuormitustapauksista johtuen syntyy kappaleeseen erilaisia rasituksia. Rasituksista riippuu esimerkiksi se, kestääkö palkki kyseisen kuormituksen. Rasituskuvioiden perusteella voidaan määrätä kappaleen dimensiot siten, että se kestää kuormituksen. Sisäisten jännitysten määrittäminen on taas lujuusoppia.

Rasituslajit:

1) [N] *Veto- ja puristusrasitus (sauvansuuntainen rasitus)*
2) [Q] *Leikkausrasitus (sauvaa vastaan kohtisuora rasitus)*
3) [M] *Taivutusrasitus (sauvansuuntainen taivutus)*
4) [T] *Vääntörasitus (sauvansuuntaisen linjan vääntö)*

Edellä mainitut rasitukset esiintyvät usein samanaikaisesti yhdessä kappaleessa. Seuraavassa on kuitenkin esitetty yksittäiset rasituslajit etumerkkeineen, jotka havainnollistavat, minkälainen rasitus on kyseessä. Rasituslajien etumerkit määräytyvät seuraavan kuvan (3.7.1) perusteella.



Kuva 3.7.1 Rasituslajit ja etumerkin määräytyminen.

Edellä kuvassa 3.7.1 on kappaleena jäykkä palkki, joka kykenee ottamaan vastaan kaikkia rasitusmuotoja. Jotkut rakenneosat eivät kuitenkaan pysty ottamaan vastaa kaikkia edellämainittuja rasituksia, vaan kestävät ainoastaan yhtä tai muutamaa rasitusta. Tälläisiä kappaleita ovat esimerkiksi

Sauva: *kestää vain vetoa ja puristusta*
Köysi: *kestää vain vetoa*
Palkki: *kestää kaikkia rasituksia*
Akseli: *kestää kaikkia rasituksia, mutta vääntö on tyypillisin rasitus.*

3.8 Puristus ja veto

Normaalivoima (purustus tai veto) on aina sauvan suuntainen voima. Se voi olla, joko vetoa (+) tai puristusta (-). Tyypillisesti normaalivoimaa esiintyy sauvamaisissa rakenteissa. Rakenne voi myös olla sellainen, että se ei pysty ottamaan vastaan muuta kuin normaalivoimaa. Esimerkiksi ohut sauva kestää puristusta tai vetoa, mutta ei taivutusta. Erikoistapauksena voidaan pitää köysirakenteita, jotka kestävät vain vetoa.

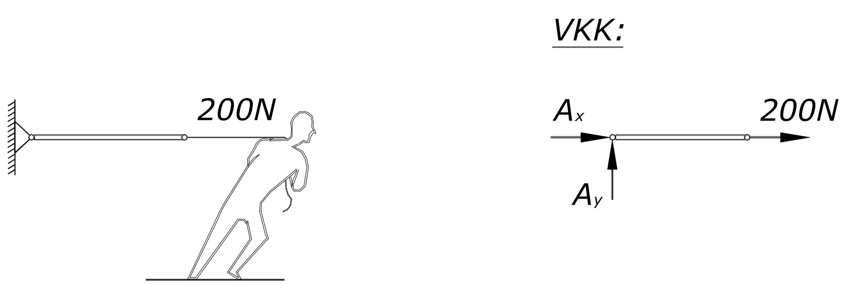
Kuvassa 3.8.1 vedetään sauvaa voimalla 200 N. Sauva on nivelillä kiinnitetty seinään. Jos halutaan tietää kappaleen rasitukset ja tukivoimien suuruus, menetellään seuraavasti:

1) Piirretään rakennemalli, johon kaikki ulkoiset voimat eli kuormitukset ja tukilaitteet on merkitty.

2) Piirretään vapaakappalekuvio, jossa näkyvät tukivoimat (A_x, A_y, jne.) ja kuormitukset.

3) Ratkaistaan tukivoimat.

4) Piirretään rasituskuviot (N, Q, M ja T)



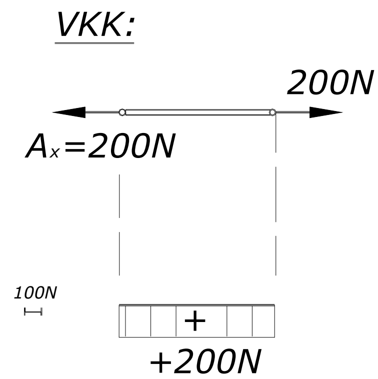
Kuva 3.8.1 Sauvan normaalivoima.

Kuvassa 3.8.1 on piirretty rakennemallista vapaakappalekuva, johon on merkitty niveltukea vastaavat tukireaktiot eli tukivoimat. Tukivoimat A_x ja A_y on piirretty normaalin koordinaatiston mukaisesti positiiviseen suuntaan, koska vielä ei tiedetä tukivoiman suuntaa. Tukivoimat voidaan ratkaista *tasapainoyhtälöillä* asettamalla yhtälöiden tuloksi nolla. Näin voidaan menetellä, koska tiedettään, että kappale on tasapainossa:

$$\rightarrow \quad +A_x + 200N = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A_x} = -200N$$

$$\uparrow \quad +\mathrm{A_y} = 0$$

Kun tukivoima A_x on miinusmerkkinen, nuolen suunta on todellisuudessa päinvastainen (kuva 3.8.2)



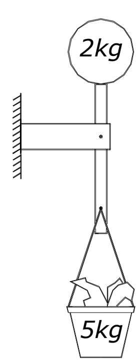
Kuva 3.8.2 Sauvan vkk
ja normaalivoimakuvio.

Kuvassa 3.8.2 on piirretty alapuolelle normaalivoimakuvio. Positiivinen puoli on alapuolella, jota voidaan vielä korostaa merkillä (+). Rasituskuvioiden piirtämisessä kannattaa käyttä niin sanottua peittotekniikkaa, jolloin peitetään osa rakenteesta ja edetään rakenne alusta loppuun samalla piirtäen.

Sauvamaiseen rakenteeseen voi tietenkin vaikuttaa useitakin voimia sauvan eri kohdissa. Tällöin normaalivoimakuvion piirtäminen on ainoa tapa rakenteen rasitusten selvittämiseen.

Esimerkki 16.

Kuvassa 3.8.3 on seinään kiinnitetty valaisin, jonka pystytankoon on ripustettu kukkaruukku. valaisimen lasipallo painaa 2 kg ja kukkaruukku 5 kg. Valaisimen pystyvarren paino jätetään huomioimatta. Piirrä pystyvarren normaalivoimakuvio.



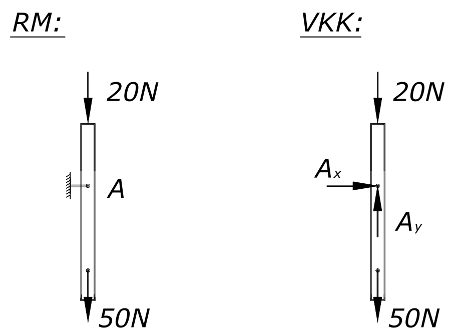
Kuva 3.8.3 Lamppu.

Ratkaisu:

Piirretään ensin rakennemalli ja muutetaan painot kuormiksi. Sitten piirretään vapaakappalekuvio, josta ratkaistaan tukivoimat. Nyt voidaan piirtää normaalivoimakuvio, josta huomataan, että varren suurin rasitus on 50 N. Varren alaosassa normaalivoima on nolla, koska siellä ei ole voimia.

Muunnokset:

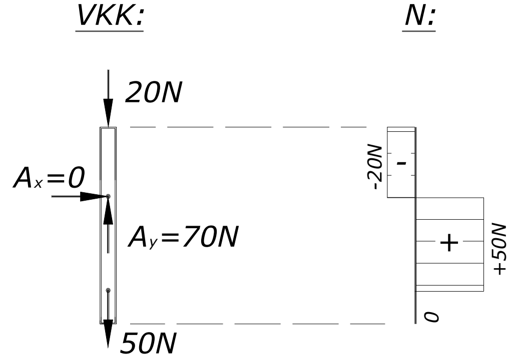
$$2kg = 20N$$
$$5kg = 50N$$



Kuva 3.8.4 Pystyvarren rakennemalli ja vapaakappalekuvio.

Tukivoimien ratkaisu:

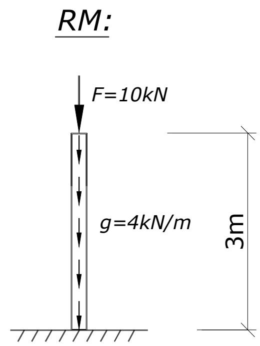
$$\rightarrow \quad A_x = 0$$
$$\uparrow \quad -20N + A_y - 50N = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 70N$$



Kuva 3.8.5 Vapaakappalekuvio ja normaalivoimakuvio.

Esimerkki 17.

Kuvan 3.8.6 betonipilaria kuormittaa keskeinen voima 10 kN. Pilarin omapaino metriä kohden on 4 kN/m. Määritä normaalivoimakuvio.



Kuva 3.8.6 Pilari.

Ratkaisu:

Koska rakennemalli on jo annettu tehtävässä, piirretään vain vapaakappalekuvio, josta ratkaistaan tukivoimat.

Pilarin omapainon resultantti:

$$R_g = 4kN/m \cdot 3m = 12kN$$

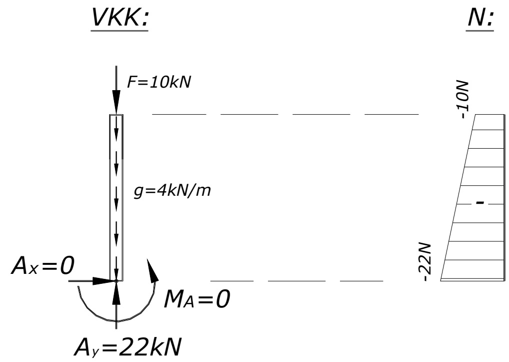
Tasapainoyhtälöt:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\uparrow \quad -10kN - 12kN + A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = +22kN$$

$$\curvearrowleft \quad M_A = 0$$

Huomataan, että ei tule muuta kuin pystysuuntaista tukivoimaa (A_y). Normaalivoimakuvio on nyt lineaarisesti alaspäin kasvava, koska pilarin omapaino aiheuttaa alas mentäessä koko ajan suuremman normaalivoiman.



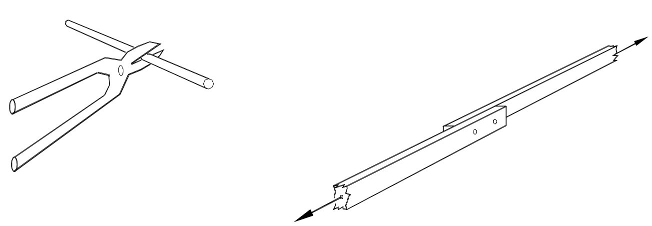
Kuva 3.8.7 Pilarin normaalivoimakuvio.

Huom! Jos rasituskuvioita piirrettäessä kuvio ei sulkeudu rakenteen alusta loppuun mentäessä, on kappale epätasapainossa tai tehtävä väärin ratkaistu.

3.9 Puhdas leikkaus

Leikkausvoimaa käsitellään tässä kappaleessa vain osittain. Lisää aiheesta löytyy kappaleesta 3.10. Koska leikkausvoima esiintyy usein taivutuksen yhteydessä ja vain harvoin yksin, on käsittelyn pääpaino kappaleessa 3.10.

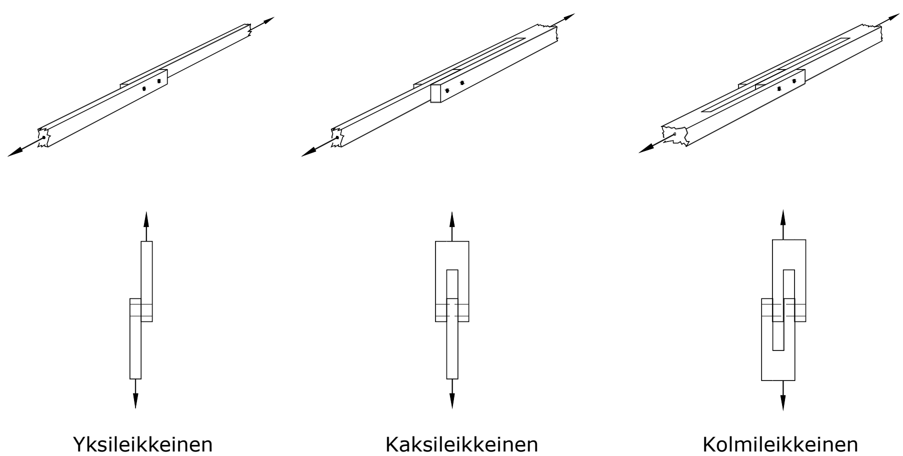
Leikkausvoima on aina sauvan suuntaan poikittain kohtisuorassa. Puhdas leikkaus tarkoittaa leikkausta, jossa ei ole taivutusta mukana. Esimerkiksi saksilla tai pihdeillä leikattaessa esiintyy puhdas leikkaus. Usein myös rakenneosien liitokset välittävät voimat sauvalta toiselle puhtaan leikkauksen avulla. Kuvassa 3.9.1 on esitetty sauvan ja liitoksen puhdas leikkaus.



Kuva 3.9.1 Puhdas leikkaus, pihdit ja tappiliitos.

LIITOSTEN LEIKKEISYYS

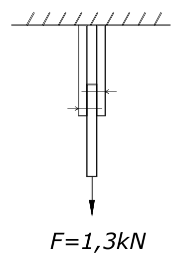
Kuten jo edellä mainittiin, puhdas leikkaus esiintyy usein liitosten yhteydessä. Siksi käsittelemme tässsä kohdassa liitoksia ja niiden toimitapaa. Liitoksen leikkeisyydellä tarkoitetaan sitä, montako leikkautuvaa pintaa liitoksessa on. Esimerkiksi kuvassa 3.9.1 (oikealla oleva) kahden puun tappiliitos on yksileikkeinen, siinä on vain yksi leikkautuva ”sauma”. kuvan 3.9.3 liitos Taas on kaksileikkeinen, eli siinä on selkeästi kaksi leikkautuvaa saumaa. Liitinten määrällä ei ole leikkeisyyden kanssa mitään tekemistä. On yhdentekevää, onko kuvan 3.9.3 liitoksessa yksi tai useampi naula, liitos on siitä huolimatta kaksileikkeinen. Sen sijaan liitoksen kestävyyden kannalta on oleellista, kuinka monileikkeinen se on ja montako liitintä liitoksessa on. Kuvassa 3.9.2 on esitetty yksi- ja useampileikkeisiä liitoksia.



Kuva 3.9.2 Yksi- ja useampileikkeiset liitokset.

Esimerkki 18.

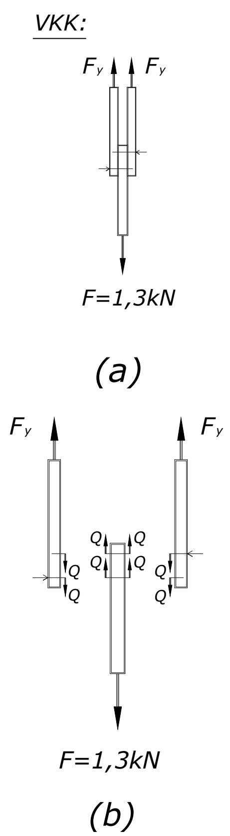
Liitos on kasattu naulaamalla kahdella naulalla liitoksen molemmin puolin (kuva 3.9.2). Piirrä systeemin vapaakappalekuvio. Kestääkö liitos, jos liitosta rasittaa voima 1,3 kN ja naulan sallittu leikkausvoima on 340 N/leike (3,4x100mm naula)?



Kuva 3.9.3 Liitos.

Ratkaisu:

Liitos on siis *kaksileikkeinen,* koska yksi naula leikkautuu kahdesta kohdasta poikki. Piirretään vapaakappalekuva, naulan leikkausvoimakuvio ja lasketaan koko liitoksen kapasiteetti.



Kuva 3.9.4 Leikkausliitos.

a) Tukivoimien ratkaisu:

$$\rightarrow \quad F_y + F_y - F = 0$$

$$2F_y - F = 0$$

$$2F_y = F \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{F}{2}$$

$$F_y = \frac{1{,}3kN}{2} = 0{,}65kN$$

b) Sauvojen erilliset vapaakappalekuviot ja yhden naulan yhden leikkeen leikkausvoima Q:

$$Q = \frac{F_y}{2} = \frac{0{,}65kN}{2} = 0{,}325kN$$

tai

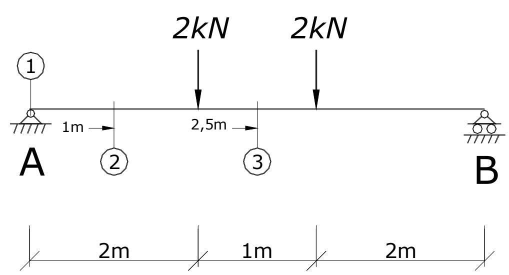
$$Q = \frac{F}{4} = \frac{1{,}3kN}{4} = 0{,}325kN$$

3.10 Leikkaus ja taivutus

Leikkaus ja taivutus esiintyvät usein yhdessä eli samanaikaisesti samassa poikkileikkauksessa. Leikkausta esiteltiin jo hieman edellisessä kappaleessa ja tässä siihen keskitytään syvemmin. Taivutus on aina jonkin pisteen momentti kaikkien siihen vaikuttavien voimien summana. Tyypillisesti palkeilla esiintyy leikkaus- ja taivutusrasitus yhdessä. Tämän kappaleen ohella on syytä kerrata kappale 3.7 /Rasituslajit/ ja kuva 3.7.1 /Etumerkin määräytyminen/.

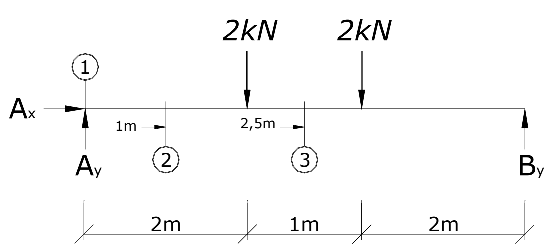
Mitoituksen kannalta on tärkeätä muistaa, että jos rakenteessa on eri rasituksia ja jos niiden rasitushuiput ovat samalla kohtaa poikkileikkauksessa, on aina tarkastettava rasitusten *yhteisvaikutus*. Tällainen tyypillinen tapaus ovat ulokepalkit, joissa on sekä leikkaus- että taivutusrasitus yhtä aikaa suurimmillaan ulokkeen kiinnityskohdassa.

Tarkastellaan kuvan 3.10.1 palkkia kolmessa pisteessä 1, 2 ja 3. Määritetään momentin ja leikkausvoiman suuruus pisteiden kohdalla.



Kuva 3.10.1 Palkki, jossa on kaksi voimaa.

Ensin on tietenkin ratkaistava tukivoimat A ja B. Piirretään palkista vapaakappalekuva, johon merkitään kaikki tukivoimat ja ulkoiset voimat esille (kuva 3.10.2).



Kuva 3.10.2 Palkin vapaakappalekuva.

Tukivoimien ratkaisu:

$$\rightarrow \quad A_y = 0$$

$$\curvearrowleft A \quad -2kN \cdot 2 - 2kN \cdot 3m + B_y \cdot 5m = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = +2kN$$

$$\uparrow \quad +A_y - 2kN - 2kN + 2kN = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = +2kN$$

Nyt voidaan laskea leikkausvoima ja momentti kussakin pisteessä niiden määritelmien mukaisesti. On samantekevää, miltä puolelta leikkauskohtaa momentti tai leikkausvoima lasketaan. Lopputulos on aina sama, jos tukivoimat on ratkaistu oikein.

Pisteessä 1:

Leikkausvoima on helppo todeta, se on suoraan tukivoima A.
$Q_1 = A_y = +2\ kN$

Momentti on myös helppo todeta, koska tarkasteltava piste on niveltuki, eikä nivel pysty ottamaan momenttia vastaan. Momentin on oltava siis nolla.
$M_1 = 0\ kNm$

Pisteessä 2, metrin etäisyydellä tuelta A:

Leikkausvoima on helpoin laskea leikkauksen vasemmalta puolelta, koska voimia – ja näin ollen myös laskutyötä –on vähemmän tällä puolella, myös monesti kannattaa laskennan minimoimiseksi laskea vastakkaiselta puolelta.
$Q_2 = +2\ kN$

Momentti on helpointa laskea vasemmalta puolelta laskennan minimoimiseksi.
$M_2 = A_y \cdot$ *kohtisuora etäisyys pisteeseen 2* $= 2kN \cdot 1m = 2\ kNm$

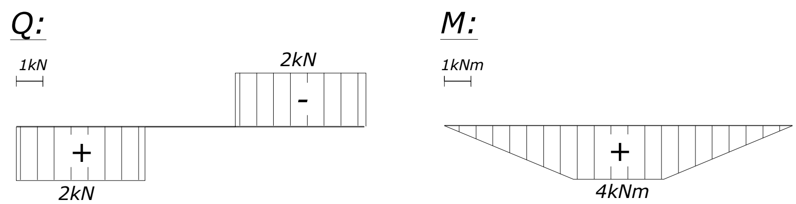
Pisteessä 3, keskellä palkkia:

Nyt on yhdentekevää, miltä puolen leikkausvoima ja momentti lasketaan.
$Q_3 = +A_y\ -2kN = +2kN - 2kN = 0\ kN$

$M_3 = A_y \cdot 2{,}5m - 2kN \cdot 0{,}5m = +2kN \cdot 2{,}5m - 2kN \cdot 0{,}5m = 4\ kNm$

Rasituksia selvitettäessä on yleensä hyvä piirtää kappaleesta rasituskuviot, joista nähdään heti, missä kohtaan mikäkin rasitus vaikuttaa. Usein rakenteessa rasitukset muuttuvat koko ajan eri pisteissä. On myös työlästä laskea rakenteen jokainen kohta erikseen. Sääntönä voidaan pitää, että lasketaan vain ne pisteet, joissa jokin ulkoinenvoima tai tukivoima vaikuttaa, ja yhdistetään pisteiden väli kuormitusta vastaavalla viivalla. Näin voidaan menetellä, koska mitoituksessa tarvitaan usein ainoastaan rasitusten ääriarvoja. Jos mitoituksen kannalta on välttämätöntä selvittää jonkin pisteen rasitukset, onnistuu se aina, kuten esimerkissä edellä todettiin.

Kuvan 3.10.1 palkista voidaan nyt piirtää helposti rasituskuviot, koska tarvittavat tiedot on jo laskettu. Symmetrisissä rakenteissa on hyvä käyttää rakenteen peilikuvaa hyödyksi piirrettäessä rasituskuvioita, sillä näin voidaan säästyä ylimääräiseltä laskutyöltä. Kuvassa 3.10.3 on esitetty edellisen palkin leikkausvoimakuvio Q ja momenttikuvio M.

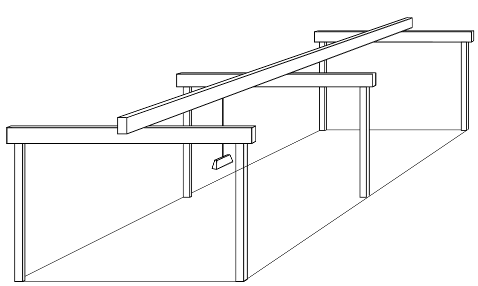


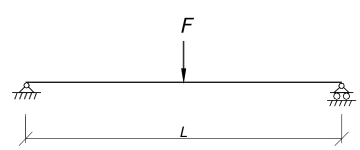
Kuva 3.10.3 Palkin leikkausvoima- ja momenttikuvio.

Edellinen tehtävä olisi voitu ratkaista myös yhteenlaskuperiaatteella eli laskemalla yksi voima kerrallaan. Tässä keskitytään selkeyden vuoksi kuitenkin vain yhteen ratkaisumenetelmään. Seuraavat esimerkit ovat tyypillisiä palkkeja ja niiden erilaisia kuormituksia. Tehtävistä on esitetty ratkaisut ja selostukset.

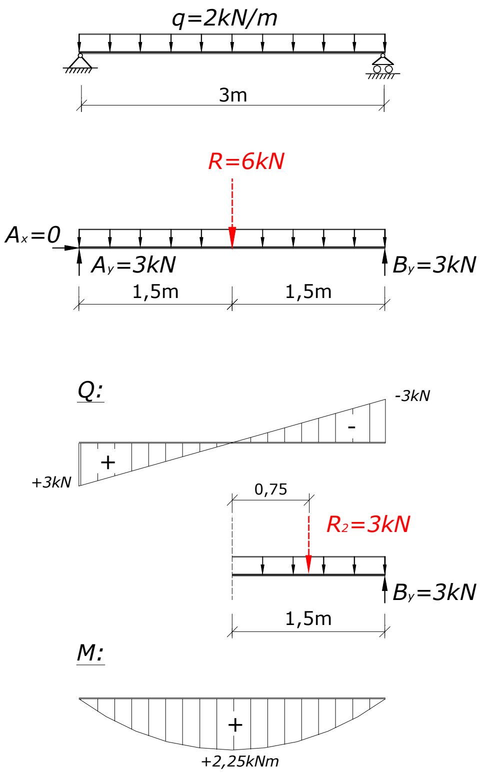
PERUSTAPAUKSET:

Tyypillisin tapaus on vapaasti tuettu yksiaukkoinen staattisesti määrätty palkki (katso kuva 3.10.4. vasemmalla on kuva rakennuksen rungosta ja oikealla rakennemalli yhden kehän palkista).





Kuva 3.10.4 Rakennuksen kehärunko, jossa palkkilinja keskellä tuotannollisista syistä.



Kuva 3.10.5 Palkki.

Esimerkki 19.

Piirrä kuvan 3.10.5 palkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Ensiksi selvitetään tasaisen kuorman resultantti ja ratkaistaan tukivoimat:

$$R = q \cdot L = 2kN/m \cdot 3m = 6kN$$

$$\rightarrow \quad A_y = 0$$

$$\circlearrowleft A \quad -6kN \cdot 1{,}5m + B_y \cdot 3m = 0 \Rightarrow B_y = 3kN$$

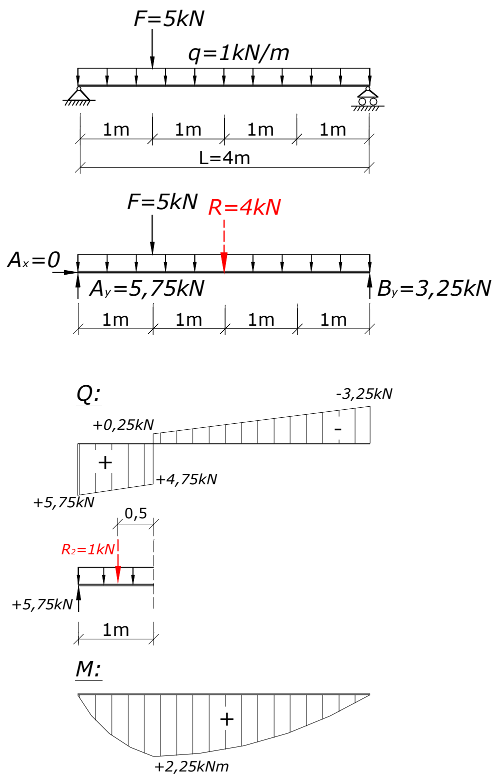
$$\uparrow \quad A_y - 6kN + 3kN = 0 \Rightarrow A_y = 3kN$$

Kun leikkausvoimakuvio on piirretty, huomataan, että leikkausvoima vaihtaa merkkiä palkin keskellä. Tässä kohdassa on momentilla ääriarvo. Lasketaan siis momentti palkin keskellä.

$$M_{\max} = R_2 \cdot 0{,}75m + B_y \cdot 1{,}5m$$

$$M_{\max} = -3kN \cdot 0{,}75m + 3kN \cdot 1{,}5m = 2{,}25kNm$$

Huom! <u>Momentilla on aina ääriarvo samassa pisteessä, missä leikkausvoima vaihtaa etumerkkiä tai menee nollaan</u>. Tällaisia pisteitä edellisessä tehtävässä ovat palkin päät ja keskikohta. Leikkauspisteitä on yleensä useampia. Kaikki nämä kohdat on laskettava erikseen, jotta saadaan maksimiarvo selvitettyä.



Kuva 3.10.6 Palkki.

Esimerkki 20.

Piirrä kuvan 3.10.6 palkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Kuten edellä. Selvitetään tasaisen kuorman resultantti ja ratkaistaan tukivoimat:

$$R = q \cdot L = 1kN/m \cdot 4m = 4kN$$

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\curvearrowleft A \quad -5kN \cdot 1m - 4kN \cdot 2m + B_y \cdot 4m = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 3{,}25kN$$

$$\uparrow \quad A_y - 5kN - 4kN + 3{,}25kN = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 5{,}75kN$$

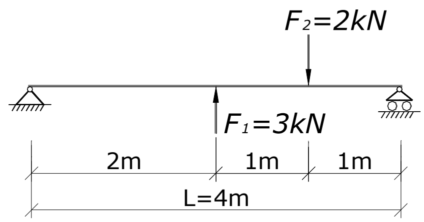
Pistevoima muuttii leikkausvoimakuvion tois-puoleiseksi. Lasketaan momentti 1 metrin etäisyy-dellä tuesta A.

$$M_{\max} = A_y \cdot 1m - R_2 \cdot 0.5m$$

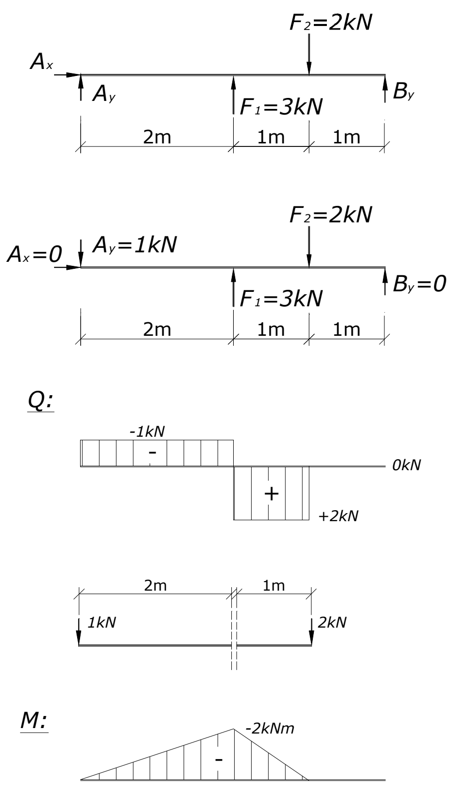
$$M_{\max} = 5{,}75kN \cdot 1m - 1kN \cdot 0{,}5m = 5{,}25kNm$$

Esimerkki 21.

Piirrä kuvan 3.10.7 palkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.7 Palkki, jossa on piste-kuormia.



Kuva 3.10.8 Palkki.

Ratkaisu:

Lasketaan aluksi tukivoimat:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\curvearrowleft A \quad +F_1 \cdot 2m - F_2 \cdot 3m + B_y \cdot 4m = 0$$

$$+3 \cdot 2m - 2 \cdot 3m + B_y \cdot 4m = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\uparrow \quad +A_y + 3kN - 2kN = 0 \Rightarrow A_y = -1kN$$

Koska tukivoima A_y oli miinusmerkkinen, on syytä vaihtaa voiman suunta kuvaan päinvastaiseksi.

Piirretään leikkausvoimakuvio sääntöjen mukaisesti. Huomataan, että momentilla on ääriarvot kohdissa 0 m, 2 m ja 3 m vasemmalta lukien.

$$M_{\max} = -A_y \cdot 2m$$

$$M_{\max} = -1kN \cdot 2m = -2kNm$$

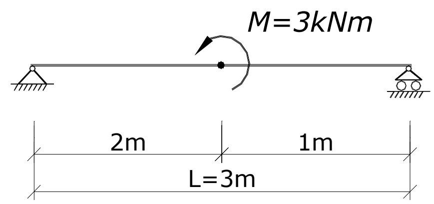
Tarkistuksen vuoksi voidaan laskea momentti palkkin toiselta puolelta.

$$M_{\max} = +B_y \cdot 2m - F_2 \cdot 1m$$

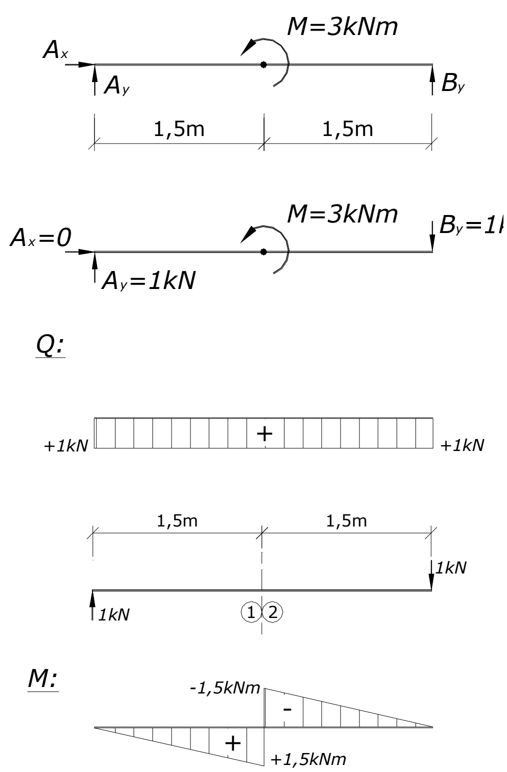
$$M_{\max} = 0 \cdot 2m - 2kN \cdot 1m = -2kNm$$

Esimerkki 22.

Piirrä kuvan 3.10.9 palkin rasituskuviot, kun palkkia rasittaa pistemomentti.



Kuva 3.10.9 Palkki, jossa on pistemomentti.



Kuva 3.10.10 Palkki.

Ratkaisu:

Lasketaan aluksi tukivoimat:

$\rightarrow \quad A_x = 0$

$\curvearrowleft A \quad M + B_y \cdot 3m = 0 \Rightarrow$

$3kNm + B_y \cdot 3m = 0 \Rightarrow B_y = -1kN$

$\uparrow \quad A_y - B_y = 0 = A_y - 1kN = 0 \Rightarrow A_y = 1kN$

Piirrettään jälleen vkk uudelleen näkyviin ja siihen B_y vastakkaissuuntaisena.

Piirretään leikkausvoimakuvio. Pistemomentti tekee poikkeuksen momenttikuvion osalta. Momentilla on ääriarvo pistemomentin kohdalla, vaikka leikkausvoima ei vaihda merkkiä tai mene nollaan kyseisessä pisteessä.

Lasketaan momentti molemmilta puolin pisteissä 1 ja 2.

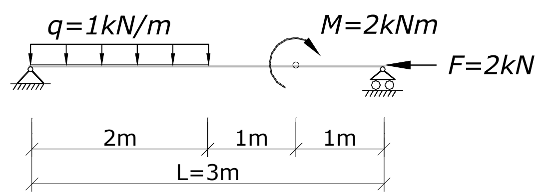
$$M_{vas.1} = A_y \cdot 1{,}5m = 1kN \cdot 1{,}5m = 1{,}5kNm$$

$$M_{oik.2} = -B_y \cdot 1{,}5m = -1kN \cdot 1{,}5m = -1{,}5kNm$$

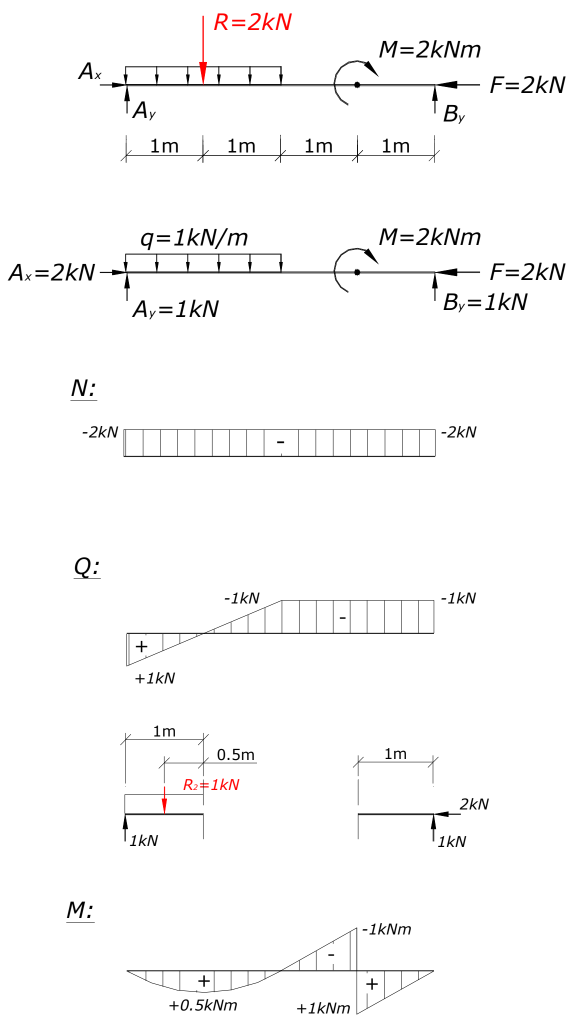
Huom! Momentin arvo on epämääräinen pistemomentin vaikutuskohdassa, mutta leikkausvoima on täysin määrätty.

Esimerkki 23.

Piirrä kuvan 3.10.11 palkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.11 Kuormitetu palkki.



Kuva 3.10.12 Palkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Lasketaan aluksi tukivoimat:

$$\rightarrow \quad A_x - 2kN = 0 \;\Rightarrow A_x = 2kN$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad -R \cdot 1m - M + B_y \cdot 4m = 0$$

$$-2kN \cdot 1m - 2kNm + B_y \cdot 4m = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 1kN$$

$$\uparrow \quad +A_y - R + B_y = 0$$

$$+A_y - 2kN + 1kN = 0 \;\Rightarrow A_y = 1kN$$

Kun tukivoimat on saatu selville, piirretään vielä kerran esille vkk., jossa kaikki voimat on piirretty positiivisina näkyviin. Resultantteja ei enää piirretä näkyviin.

Nyt joudutaan piirtämään myös normaalivoimakuvio *N*, koska palkissa on vaakavoimia.

Leikkausvoimakuviosta *Q* nähdään, missä kuvio vaihtaa merkkiä tai menee nollaan. Lasketaan näissä pisteissä momentin arvo:

$$M_{vasen} = A_y \cdot 1m - R_2 \cdot 0{,}5m$$

$$M_{vasen} = 1kN \cdot 1m - 1kN \cdot 0{,}5m = 0{,}5kNm$$

Lasketaan nyt momentti oikealta ennen piste-momenttia:

$$M_{oikea} = +B_y \cdot 1m$$

$$M_{oikea} = +1kN \cdot 1m = 1kNm$$

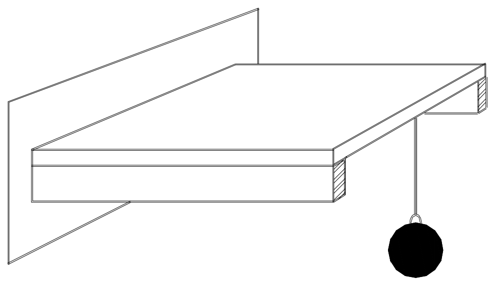
Ja pistemomentti jälkeen:

$$M_{oikea} = +B_y \cdot 1m - M$$

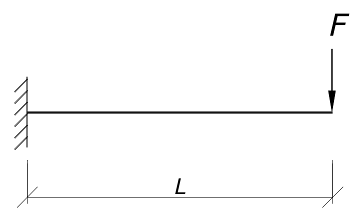
$$M_{oikea} = +1kN \cdot 1m - 2kNm = -1kNm$$

ULOKEPALKIT:

Ulokepalkit (kuva 3.10.13a ja b) on toinen tyypillinen perustapaus, joka tulee vastaan hyvin usein rakenteita suunniteltaessa. Kun uloke on lyhyt ja voimakkaasti kuormitettu, tulee usein mitoittavaksi tekijäksi leikkausvoima. Pitkillä ulokepalkeilla taas taipuma on rajoittava tekijä.



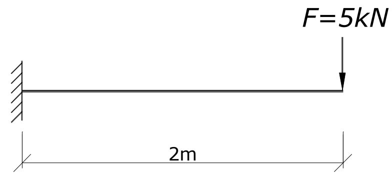
Kuva 3.10.13a Katoksen ulokepalkit.



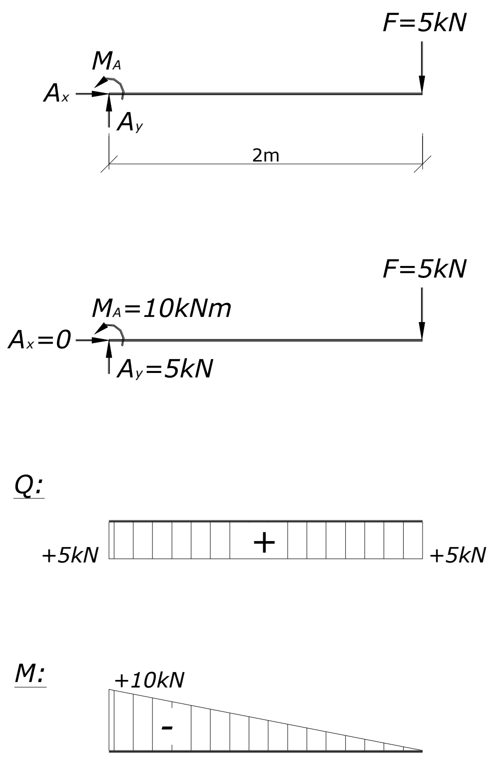
Kuva 3.10.13b Rakennemalli.

Esimerkki 24.

Piirrä kuvan 3.10.14 palkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.14 Ulokepalkki.



Kuva 3.10.15 Ulokepalkin ratkaisu.

Ratkaisu:

Piirretään vkk ja ratkaistaan tukireaktiot:

$\rightarrow \quad A_x = 0$

$\uparrow \quad A_y - F = 0$

$A_y - 5kN = 0 \Rightarrow A_y = 5kN$

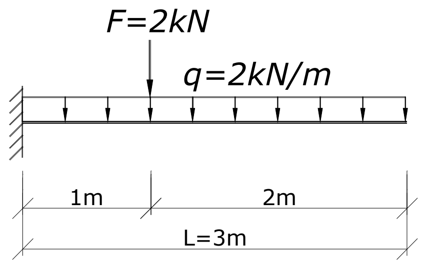
$\curvearrowleft A \quad M_A - F \cdot 2m = 0$

$M_A - 5kN \cdot 2m = 0 \Rightarrow M_A = 10kNm$

Nyt voidaan piirtää leikkausvoima- ja momenttikuviot ilman enempää laskemista.

Esimerkki 25.

Piirrä kuvan 3.10.16 ulokepalkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.16 Ulokepalkki, jossa piste- ja tasainenkuorma.

Ratkaisu:

Lasketaan ensin tasaisenkuorman resultantti:

$$R = q \cdot L = 2kN/m \cdot 3m = 6kN$$

Piiretään rakennemallista vkk. Merkitään jäykkää tukea vastaavat tukivoimat ja ratkaistaan ne tasapainoyhtälöillä:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\uparrow \quad A_y - F - R = 0$$

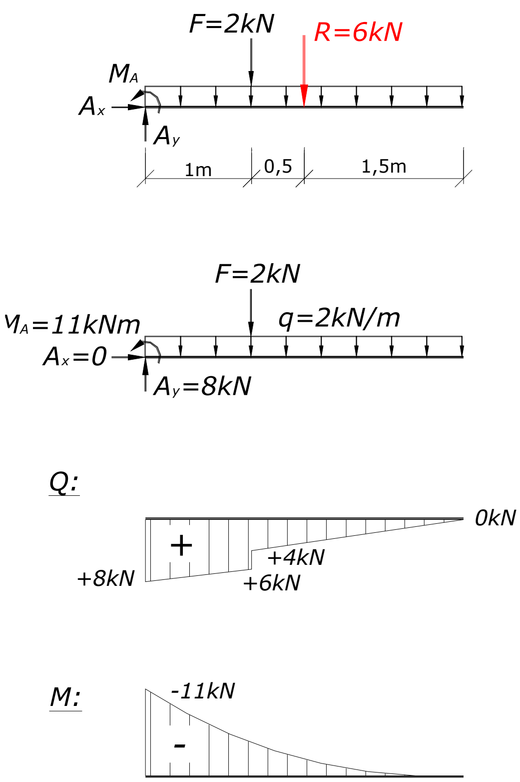
$$A_y - 2kN - 6kN = 0 \Rightarrow A_y = 8kN$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad M_A - F \cdot 1m - R \cdot 1{,}5m = 0$$

$$M_A - 2kN \cdot 1m - 6kN \cdot 1{,}5m = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 11kNm$$

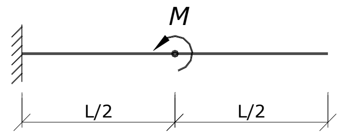
Nyt voidaan piirtää leikkausvoima- ja momenttikuviot. Voiman F kohdalla ei ole välttämätöntä laskea momenttia, koska leikkausvoima ei vaihda merkkiä eikä pistemomentti vaikuta kyseisessä pisteessä.



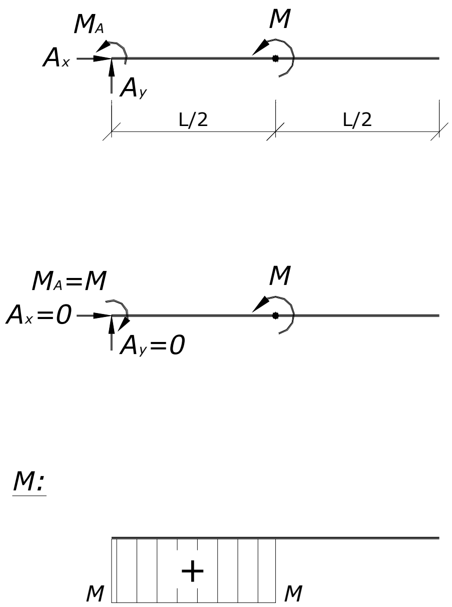
Kuva 3.10.17 Ulokepalkin rasituskuviot.

Esimerkki 26.

Piirrä kuvan 3.10.18 ulokepalkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.18 Ulokepalkki.



Kuva 3.10.19 Ulokepalkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Piirretään vkk ja merkitään tuntemattomat tukivoimat näkyviin.

Ratkaistaan tukivoimat:

$\rightarrow \quad A_x = 0$

$\uparrow \quad A_y = 0$

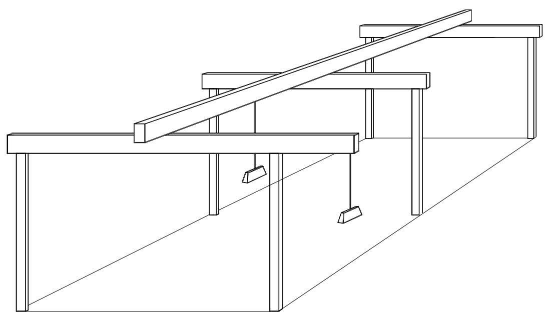
$\uparrow \quad M_A + M = 0 \;\Rightarrow M_A = -M$

Käännetään tukimomenttinuoli vastakkaiseen suuntaan, koska tulos oli negatiivinen.

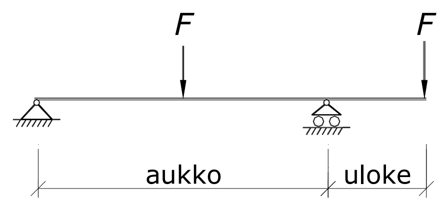
Nyt voidaan piirtää rasituskuviot. Rakenteessa ei siis ole muuta rasitusta kuin momentti.

ULOKKEELLISET PALKIT:

Kun tavanomaiseen palkkiin lisätään uloketta toiseen päähän tai molempiin päihin, syntyy ulokkeellinen palkki (kuva 3.10.20). Tyypillisesti ulokkeellisen palkin voi havaita vaikka tasakattoisessa katoksessa. Ulokkeen ja aukon mittasuhteista riippuen rakenteesta saattaa tulla tavallista yksiauk-koista edullisempi, koska uloke vähentää aukon taipumaa ja maksimimomenttia.

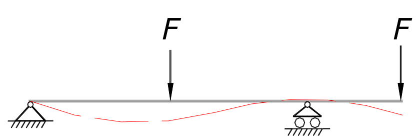


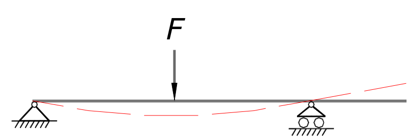
Kuva 3.10.20 Ulokkeellinen palkki kehässä.



Kuva 3.10.21 Ulokkeellinen palkki.

Jotta uloke vähentäisi aukon momenttia ja taipumaa, on palkin oltava samaan suuntaan kuormitettu sekä ulokkeen että aukon kohdalta, kuten kuvassa 3.10.21 on esitetty. Jos ulokeosuudella ei ole kuormitusta, toimii palkki kuten ulokkeeton yksiaukkoinen kannatin. Tällöin uloke vain myötää palkin taipuman mukaan (kuva 3.10.22 oikealla).

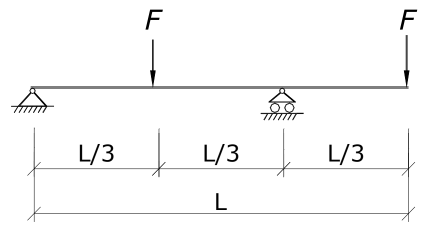




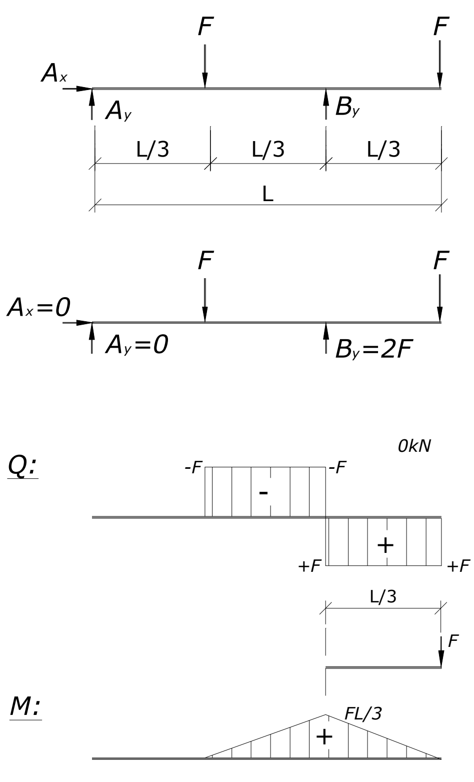
Kuva 3.10.22 Ulokkeellisen palkin taipumaviivat eri kuormitustilanteessa.

Esimerkki 27.

Piirrä kuvan 3.10.23 palkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.23 Ulokkeellinen palkki.



Kuva 3.10.24 Ulokepalkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Piirretään vkk ja merkitään tuntemattomat tukivoimat näkyviin.

Ratkaistaan tukivoimat:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\uparrow \quad -F \cdot \frac{L}{3} + B_y \cdot \frac{2L}{3} - F \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow B_y \cdot \frac{2L}{3} = \frac{4FL}{3} \quad \Rightarrow B_y = 2F$$

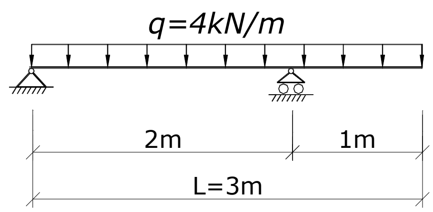
$$\uparrow \quad A_y - F + B_y - F = 0$$

$$\uparrow \quad A_y - F + 2F - F = 0 \quad \Rightarrow A_y = 0$$

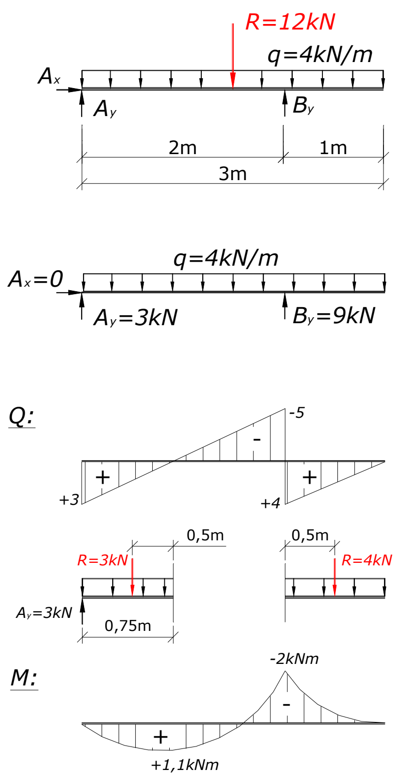
Piirretään leikkausvoima- ja momenttikuvio.

Esimerkki 28.

Piirrä kuvan 3.10.25 palkin rasituskuviot.



Kuva 3.10.25 Ulokkeellinen palkki.



Kuva 3.10.26 Ulokepalkin rasituskuviot.

Ratkaisu:

Piirretään vkk. ja merkitään tuntemattomat tukivoimat näkyviin.

Ratkaistaan tukivoimat:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\uparrow \quad -F \cdot \frac{L}{3} + B_y \cdot \frac{2L}{3} - F \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow B_y \cdot \frac{2L}{3} = \frac{4FL}{3} \quad \Rightarrow B_y = 2F$$

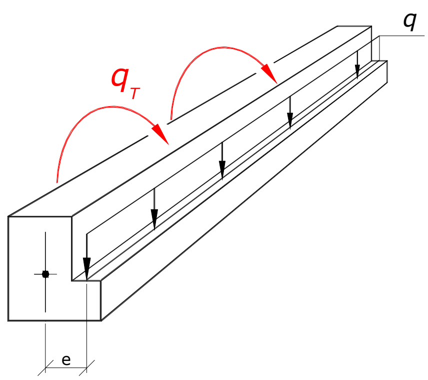
$$\uparrow \quad A_y - F + B_y - F = 0$$

$$\uparrow \quad A_y - F + 2F - F = 0 \quad \Rightarrow A_y = 0$$

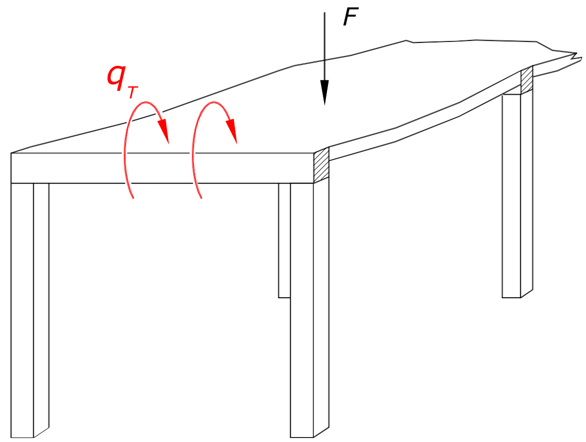
Piirretään leikkausvoima- ja momenttikuvio.

3.11 Vääntö

Vääntörasitus esiintyy harvemmin talonrakennustekniikassa, mutta vaativimmissa kohteissa ja siltarakenteissa sitä tavataan useammin. Usein rakenteet voidaan myös suunnitella siten, ettei vääntörasitusta pääse syntymään. Kuitenkin joissain tapauksissa vääntö tulee ottaa huomioon. Etenkin betonirakenteissa käytetään usein umpihakoja väännön vastaanottamiseksi. Seuraavassa on esitetty periaatekuvia eräistä rakenteista joissa vääntörasitusta esiintyy.



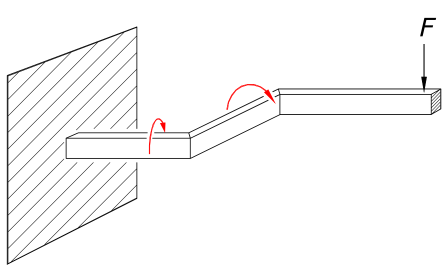
Kuva 3.11.1 Leukapalkki.



Kuva 3.11.2 Reunapalkin vääntörasitus.

Kuvassa 3.11.1 on leukapalkki. Kun ontelolaatat tukeutuvat leuan päälle, on kuormitus epäkeskeistä palkin vääntökeskiöön nähden. Tästä johtuen palkkiin tulee vääntörasitusta. Kuormituksen etäisyys vääntökeskiöön e nähden määrää väännön suuruuden. Kuvassa 3.11.2 on pilari-palkki-laatasto-järjestelmä, jossa reunimmaiselle palkille tulee vääntörasitusta laatan taipuessa. Väännön syn-tyminen tässä edellyttää jäykkää liitosta laatan ja palkin sekä pilarin ja palkin välillä.

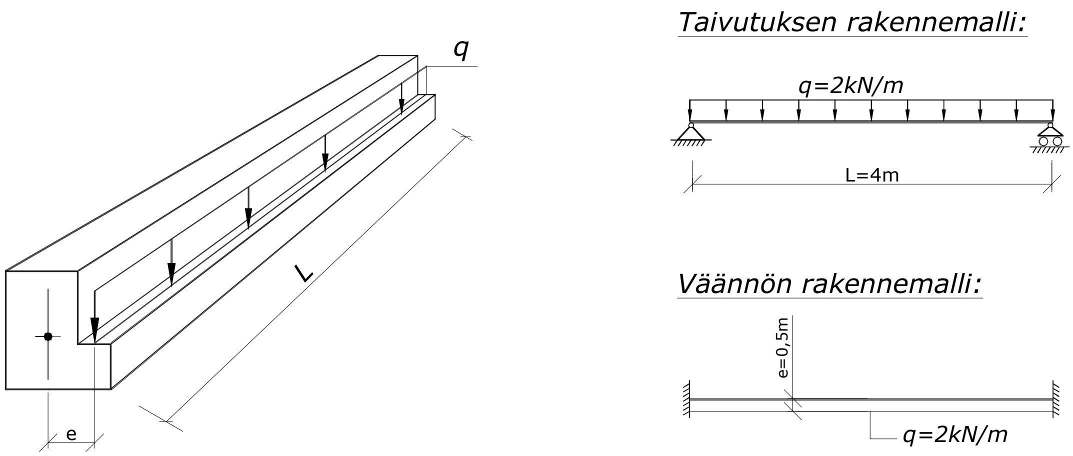
Jos rakenne on kolmiulotteinen, on siinä usein myös vääntörasitusta kuten kuvan 3.11.3 rakenteessa. Emme käsittele tässä kuitenkaan kolmiulotteisia rakenteita enempää, koska niihin liittyvissä tehtävissä ratkaisumenetelmät ovat usein hieman erilaisia.



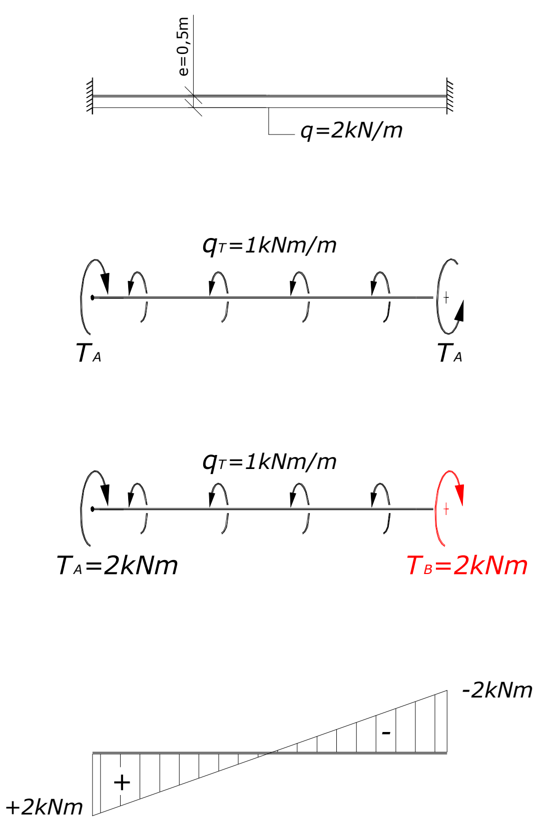
Kuva 3.11.3 Kolmiulotteinen rakenne.
Vääntöä aiheutuu kahteen eri suuntaan.

Esimerkki 29.

Piirrä kuvan 3.11.4 leukapalkin vääntörasituskuvio, kun kuorman etäisyys vääntökeskiöön e on 0,5 m ja kuorma q on 2 kN/m. Palkki on tuettu päistään haarukkalaakerilla, joka sallii kiertymisen taivutuksen suhteen, mutta ei väännön suhteen.



Kuva 3.11.4 Leukapalkin vääntö. Oikealla taivutuksen- ja väännön rakennemallit.



Kuva 3.11.5 Leukapalkin ratkaisu.

Ratkaisu:

Lasketaan väännön aiheuttama kuormitus metriä kohden.

$$q_T = q \cdot e$$
$$q_T = 2kN/m \cdot 0{,}5m = 1kNm/m$$

Piirretään vkk. väännön suhteen ja merkitään siihen tukimomentti positiiviseen suuntaan

Päättelemällä havaitaan, että tukimomentti T_B on vastakkaissuuntainen, koska sen on väännettävä niin sanotusti. kuormitusta vastaan.

Lasketaan tukimomentit:

$$T_A = \frac{q_T \cdot L}{2} = \frac{1kNm/m \cdot 4m}{2} = 2kNm$$
$$T_B = \frac{-q_T \cdot L}{2} = \frac{-1kNm/m \cdot 4m}{2} = -2kNm$$

Piirretään vääntömomenttikuvio.

Huom! Väännön yhteydessä tukimomenttien laskenta sekä vääntökuvion muoto on usein samanlainen, kuin tarkasteltaessa leikkausvoiman käyttäytymistä vastaavasti kuormitetuilla palkeilla.

Mahdollinen vääntö rakenteissa on aina otettava huomioon ja sen vaikutus rakenteen vaakavuuteen on arvioitava. Jos esimerkin 31 palkin päitä ei olisi tuettu väännön suhteen, rakenteeseen ei olisi tullut myöskään väätörasitusta. Tukematon palkki olisi päässyt vapaasti kiertymään vääntö-keskiönsä ympäri. Tällöin vaarana olisi palkin pyörähtäminen tuilla, mistä saattaisi seurata esimerkiksi ontelolaattojen putoaminen palkin leuan päältä. Tämänkaltainen stabiliteetti (vakavuus) – tarkastelut on suunnittelussa huomioitava.

4. Harjoitustehtävät

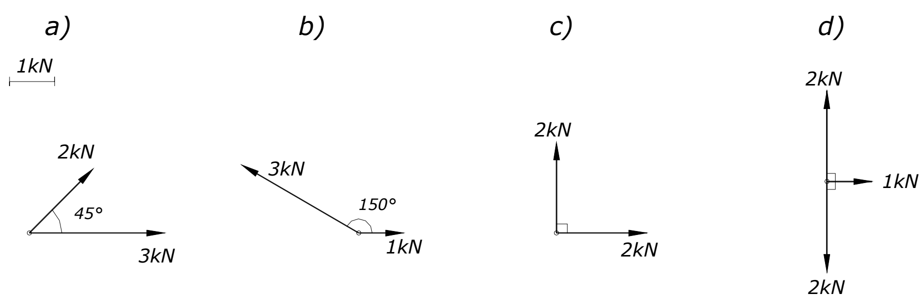
PARTIKKELIN STATIIKKA

2.1 Rakennemalli ja vapaakappalekuva

Tehtävä 1. Piirrä seuraavista rakenteista vapaakappalekuva:

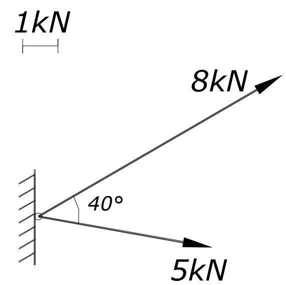
2.3 Voimat ja niiden yhdistäminen

Tehtävä 2. Yhdistä voimat resultanteiksi graafisesti, mikä on resultantin suuruus:



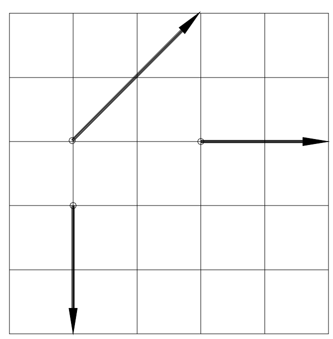
Vast: a) 4,6 kN b) 2,2 kN c) 2,8 kN d) 1 kN

Tehtävä 3. Yhdistä voimasysteemi analyyttisesti. Mikä on resultantin suunta ja suuruus? Tarkista tehtävä gaafisesti.



Vast: *12,26 kN,* $\alpha = 24{,}8\,^{o}$ *(voimaan 5kN)*

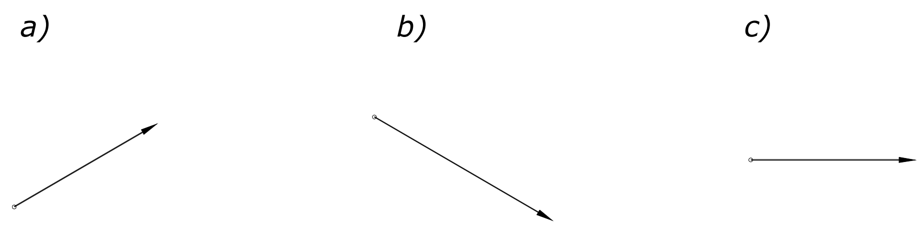
Tehtävä 4. Yhdistä voimat graafisesti, mikä on resultantin suuruus ja suunta, kun yksi ruutu on 1 kN?



Vast: *4 kN* $\rightarrow$

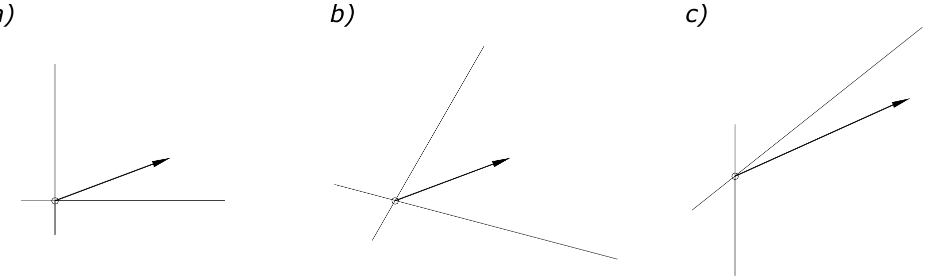
2.4 Voimien jako komponentteihin

Tehtävä 5. Jaa voimat kahteen mielivaltaiseen komponenttiin.



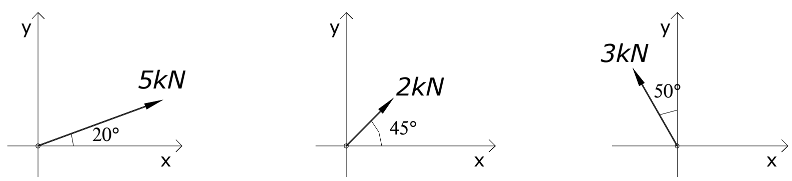
Tehtävä 6. Jaa voimat vaikutussuorien suuntaisiin komponentteihin.

a) b) c)



Tehtävä 7. Jaa voimat suorakulmaisiin komponentteihin koordinaatiston mukaisesti.

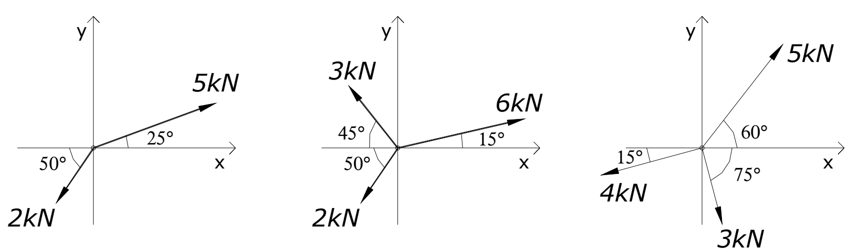
a) b) c)



Vast: *a)* $F_x = 4{,}7\ kN$ *b)* $F_x = 1{,}4\ kN$ *c)* $F_x = -2{,}3\ kN$
$F_y = 1{,}7\ kN$ $F_y = 1{,}4\ kN$ $F_y = 1{,}9\ kN$

Tehtävä 8. Jaa voimat suorakulmaisiin komponentteihin koordinaatiston mukaisesti.

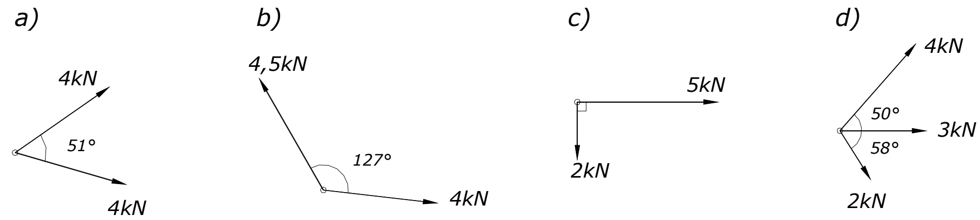
a) b) c)



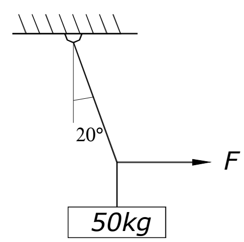
Vast: *a)* $F_x = 3{,}2\ kN$ *b)* $F_x = 2{,}4\ kN$ *c)* $F_x = 0{,}6\ kN$
$F_y = 0{,}6\ kN$ $F_y = 2{,}1\ kN$ $F_y = 0{,}4\ kN$

2.5 Tasapaino

Tehtävä 9. Piirrä voimasysteemiin yksi voima lisää siten, että partikkelipiste on tasapainossa.

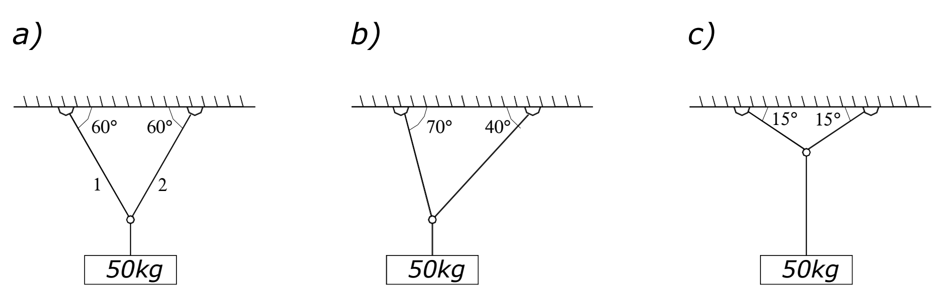


Tehtävä 10. Määritä voiman F suuruus, kun köysisysteemi on tasapainossa.



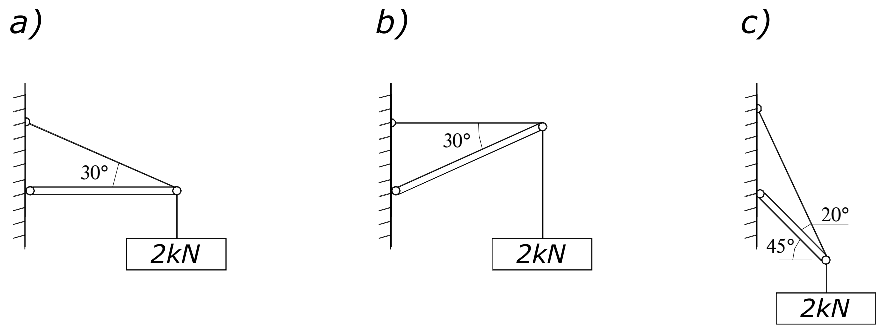
Vast: $F = 182\ N$

Tehtävä 11. Määritä ripustuslankojen rasitukset.



Vast: a) $F_1 = 289\ N$, $F_2 = 289\ N$ b) $F_1 = 408\ N$, $F_2 = 182\ N$ c) $F_1 = 966\ N$, $F_2 = 966\ N$

Tehtävä 12. Määritä kannattimen tangon ja vaijerin rasitukset. Rakenteiden omaa painoa ei huomioida.

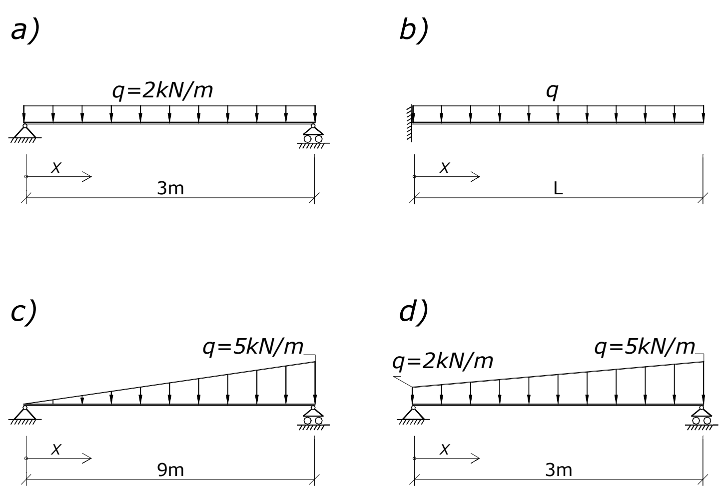


Vast: *a) $F_{vaijeri}$ = 4 kN* *a) $F_{vaijeri}$ = 3,5 kN* *a) $F_{vaijeri}$ = 4,1 kN*
F_{tanko} = -3,5 kN *F_{tanko} = -4 kN* *F_{tanko} = -2,5 kN*

JÄYKÄN KAPPALEEN TASOSTATIIKKA

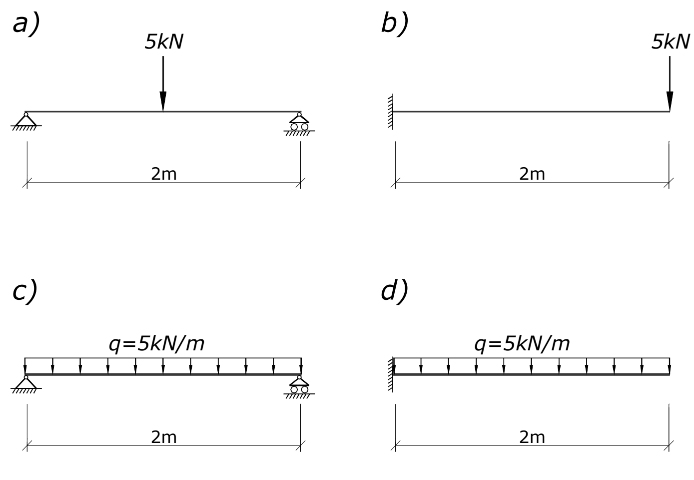
3.3 Kuormitustapauksia, niiden jakamista ja resultantteja

Tehtävä 13. Laske kuormien resultantin suuruus ja merkitse se kuvaan.



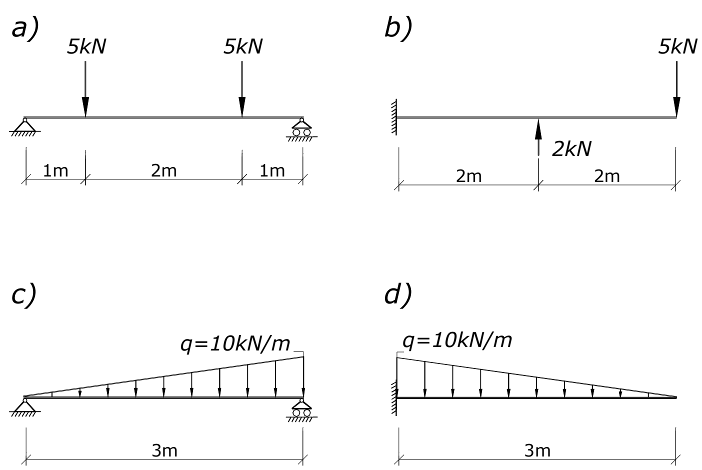
Vast: a) 6kN (x=1,5m) b) qL (x=L/2) c) 22,5kN (x=6m) d) 6kN (x=1,5m) ja 4,5kN (x=2m)

Tehtävä 14. Piirrä palkkien rasituskuviot, määritä suurin momentti ja leikkausvoima.



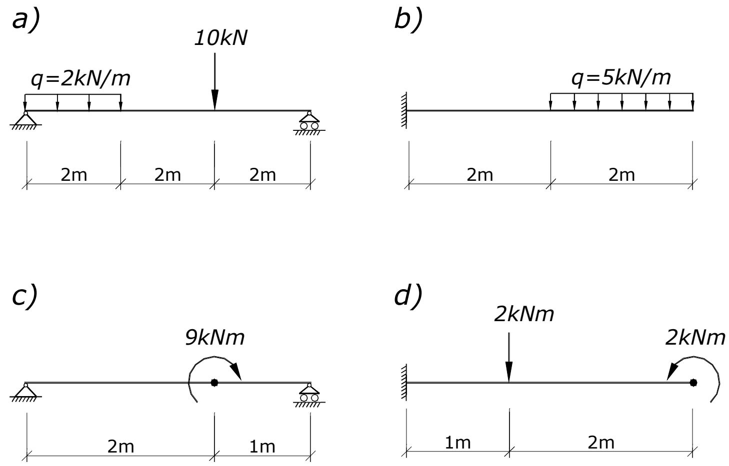
Vast: a) $M_{max} = 2{,}5\ kNm$: $Q_{max} = 2{,}5\ kN$ b) $M_{max} = -10\ kNm$ $Q_{max} = 5\ kN$ c) $M_{max} = 2{,}5\ kNm$ $Q_{max} = 5\ kN$ d) $M_{max} = -10kNm$ $Q_{max} = 10\ kN$

Tehtävä 15. Piirrä palkkien rasituskuviot, määritä suurin momentti ja leikkausvoima.



Vast: a) $M_{max} = 5\ kNm$: $Q_{max} = 5\ kN$ b) $M_{max} = -16\ kNm$ $Q_{max} = 5\ kN$ c) $M_{max} = 5{,}8\ kNm$ $Q_{max} = 10\ kN$ d) $M_{max} = -15\ kNm$ $Q_{max} = 15\ kN$

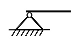
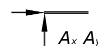
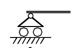
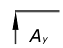
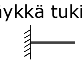
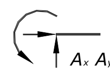
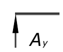
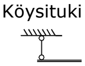
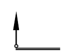
Tehtävä 16. Piirrä palkkien rasituskuviot, määritä suurin momentti ja leikkausvoima.



Vast: a) $M_{max} = 14{,}7\ kNm$: $Q_{max} = -7{,}3\ kN$; b) $M_{max} = -30\ kNm$, $Q_{max} = 10\ kN$; c) $M_{max} = -6\ kNm$, $Q_{max} = 3\ kN$; d) $M_{max} = 0$, $Q_{max} = 2\ kN$

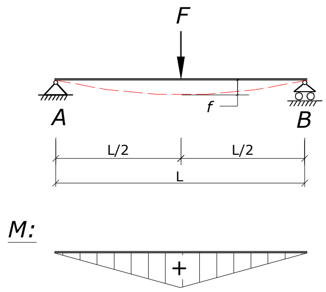
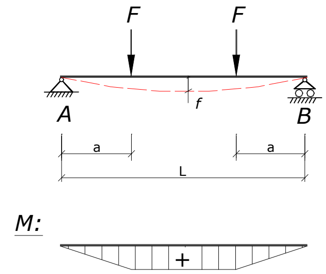
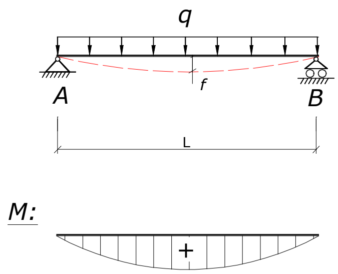
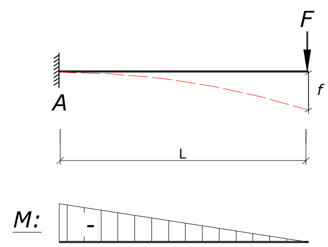
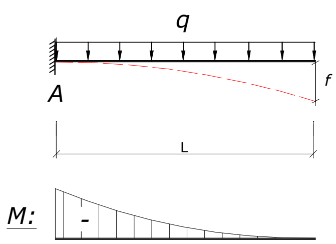
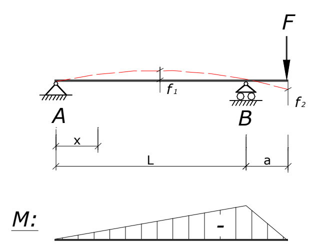
LIITE 1.

Tuentatapaukset ja niitä vastaavat tuki-
komponentit.

Tuentatapaus (Rakennemalli)	Tukikomponentit (vapaakappalekuva)
Niveltuki  A	 A_x A_y M_A
Liikkuva nivel  A	 A_y
Jäykkä tuki  A	 A_x A_y M_A
Keinutuki  A	 A_y
Köysituki  A	 A_y
Kitkaton kosketus  A	 A_y

LIITE 2.

Kuormitustapaus, tukireaktiot, momentti ja taipuma.

 $A = B = \frac{F}{2}$ $M_{max} = \frac{FL}{4}$ $f = \frac{FL^3}{48EI}$	 $A = B = F$ $M_{max} = Fa$ $f = \frac{FL^2a}{24EI}\left(3-4\frac{a^2}{L^2}\right)$
 $A = B = \frac{qL}{2}$ $M_{max} = \frac{qL^2}{2}$ $f = \frac{5qL^4}{384EI}$	 $A = F$ $M_{max} = -FL$ $f = \frac{FL^3}{3EI}$
 $A = qL$ $M_{max} = \frac{-qL^2}{2}$ $f = \frac{qL^4}{8EI}$	 $A = \frac{-Fa}{L}$ $B = \frac{F(F+a)}{L}$ $M_B = -Fa$ $f = \frac{FL^2a}{9EI\sqrt{3}}$, (kohdassa $x = 0{,}577 \cdot L$)